Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 5, 1998

УДК 517

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С СИЛЬНО МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Мосягин, Б. М. Широков

В статье доказана теорема об однозначной разрешимости нелинейного уравнения в банаховом пространстве. Для этой цели авторы вводят понятие согласованной пары банаховых пространств и обобщенной сильной монотонности оператора.

Пусть E — вещественное банахово пространство, θ_E — нулевой элемент этого пространства.

Замкнутое выпуклое множество $K \subset E$ называется *конусом*, если $z \in K$, $z \neq \theta_E$ влечет за собой $\alpha z \in K$ при $\alpha \geq 0$ и $-z \notin K$.

Любой конус $K \subset E$ позволяет ввести в пространстве E полуупорядоченность: $u \geqslant v$ (равносильно $v \leqslant u$), если $u - v \in K$. Элементы $z \geqslant \theta_E$ (то есть $z \in K$) называются *положительными.*

Понятие полуупорядоченности эффективно используется при изучении операторов в банаховых пространствах. В каждом конкретном случае специфика конуса может обеспечить дополнительные свойства полуупорядоченности (см., например, [1]).

Конус K называется нормальным, если существует такое число $N(K)$, что из $\theta_E \leqslant v \leqslant u$ следует $\|v\| \leq N(K)\|u\|$. В этом случае норма в E называется *полумонотонной*, а число $N(K)$ называется *константой нормальности* конуса K. Если $N(K) = 1$, то конус называют *острым*, а норму в E — *монотонной.*

Определение . *Пусть E — банахово пространство с конусом и монотонной нормой, X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, для каждой пары элементов x, y которого определено умножение xy со значением в пространстве E, подчиненное условиям:*

© В. В. Мосягин, Б. М. Широков, 1998

1) $||xy||_E \leq ||x||\,||y||$,
2) $||x^2||_E = ||x||^2$,
3) $x^2 \geqslant \theta_E$ $\quad$ (θ_E — *нуль в* E).

Тогда будем говорить, что пространства X *и* E *образуют согласованную пару* $\langle X, E\rangle$.

Например, если X — гильбертово пространство, а $E = \mathbb{R}$ с конусом $K = \{z : z \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$ и xy — скалярное произведение, то $\langle X, E\rangle$ — согласованная пара пространств.

Если $X = E = C_{[a,b]}$ и K — множество неотрицательных функций в пространстве непрерывных функций $C_{[a,b]}$, то $\langle X, E\rangle$ — другой пример согласованной пары банаховых пространств.

Теорема. *Пусть* $\langle X, E\rangle$ — *согласованная пара банаховых пространств, а оператор* $F\colon X \to X$ *удовлетворяет условиям:*

$$[F(x) - F(*y)]^2 \leqslant M^2(x-y)^2, \qquad M > 0, \quad \forall x, y \in X; \tag{1}$$
$$[F(x) - F(y)](x-y) \geqslant m(x-y)^2, \tag{2}$$
$$(x-y)[F(x) - F(y)] \geqslant m(x-y)^2, \qquad m > 0, \quad \forall x, y \in X; \tag{3}$$
$$M > m. \tag{4}$$

Тогда уравнение

$$F(x) = g \tag{5}$$

имеет единственное решение для любого $g \in X$.

Свойство оператора F, выраженное неравенствами (2) и (3), будем называть *обобщенной сильной монотонностью* оператора F.

Доказательство. Из неравенства (1) и свойств произведения элементов в X следует, что F удовлетворяет обычному условию Липшица:

$$||F(x) - F(y)|| \leq M||x-y|| \qquad \forall x, y \in X.$$

Из свойства обобщенной сильной монотонности имеем:

$$m||x-y||^2 \leq ||F(x) - F(y)||\,||x-y|| \qquad \forall x, r \in X,$$

и, следовательно,

$$||F(x) - F(y)|| \geq m||x-y|| \qquad \forall x, y \in X.$$

Пусть $g \in X$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим оператор A_ε, определенный соотношением:

$$A_\varepsilon x = x - \varepsilon(F(x) - g).$$

Для произвольных $x, y \in X$ из условий теоремы имеем:

$$\begin{gathered}(A_\varepsilon x - A_\varepsilon y)^2 = (x-y)^2 - \varepsilon(x-y)(F(x) - F(y)) - \\ -\varepsilon(F(x) - F(y))(x-y) + \varepsilon^2(F(x) - F(y))^2 \leqslant \\ \leqslant (1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 m^2)(x-y)^2,\end{gathered}$$

а тогда

$$||A_\varepsilon x - A_\varepsilon y||^2 \leq (1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 m^2)||(x-y)||^2.$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 2m/M)$ и $\lambda = (1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 m^2)^{1/2}$, тогда A_ε — сжимающий оператор (с константой $\lambda < 1$) в банаховом пространстве X. Следовательно, существует единственный элемент $x \in X$, для которого

$$A_\varepsilon x = x.$$

Отсюда следует, что $F(x) = g$. $\square$

Замечание . Если $X = H$ — гильбертово пространство, а $E = \mathbb{R}$, то из доказанной теоремы вытекает теорема 29.3 монографии [2].

Résumé

It is concidered an existence of a solution of the nonlinear operator equation in Banach cpace in this paper.

Литература

[1] Красносельский М. А. *Положительные решения операторных уравнений.* М.: Физматгиз, 1962. 392 с.

[2] Куфнер А., Фучик С. *Нелинейные дифференциальные уравнения.* М.: Наука, 1988. 304 с.