Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 5, 1998

УДК 517

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ПЭЛИ—ВИНЕРА—АХИЕЗЕРА

С. С. Платонов

Приводится новое доказательство теоремы типа Пэли—Винера для преобразования Бесселя.

В классической теореме Пэли—Винера описывается образ при преобразовании Фурье множества функций из $L_2(\mathbb{R})$ с носителем на отрезке $[-\sigma,\sigma]$ (все функции предполагаются комплекснозначными). Более точно, справедлива следующая

Теорема 1 (Пэли, Винер [1]). *Функция $f(x)$ допускает представление*

$$f(x)=\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixt}\,\varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)\in L_2[-\sigma,\sigma]$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $f(x)$ — *целая функция экспоненциального типа $\le\sigma$;*

2) $f(x)\in L_2(\mathbb{R})$, *т. е.* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx<\infty$.

В настоящее время под теоремами типа Пэли—Винера понимают различные теоремы, в которых описывается образ какого-нибудь класса функций (например, класса $\mathcal{D}$ всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем или класса $\mathcal{D}'$ всех обобщенных функций с компактным носителем) при преобразовании Фурье или при каком-нибудь другом интегральном преобразовании. Одним из наиболее распространенных и важных интегральных преобразований является преобразование Бесселя (или, как его еще часто называют, преобразование Ганкеля). Для преобразования Бесселя наиболее близкая к классической теорема типа Пэли—Винера доказана

Н. И. Ахиезером в [2], другие теоремы типа Пэли—Винера для преобразования Бесселя получены А. И. Киприяновым и А. А. Куликовым (см. [3] или [4]). В настоящей работе приводится новое доказательство теоремы Пэли—Винера для преобразования Бесселя в форме Ахиезера с несколько измененной формулировкой (будем называть ее теоремой Пэли—Винера—Ахиезера). Эта теорема представляет значительный интерес в связи с недавними работами по теории приближений функций, в которых используется преобразование Бесселя (см. [5], [6]).

Пусть
$$\mathcal{B} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x}\,\frac{d}{dx}, \qquad \alpha \geq -\frac{1}{2},$$
— дифференциальный оператор Бесселя. Обозначим через $j_\alpha(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x}\,\frac{dy}{dx} + \lambda^2 y = 0$$
с начальными условиями
$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$
Отметим, что
$$j_\alpha(\lambda x) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\, J_\lambda(\lambda x)}{(\lambda x)^\alpha},$$
где $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя (см. [7]).

Мы будем рассматривать функции на промежутке $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, но при этом удобно считать, что функции по четности продолжены на всю прямую $\mathbb{R}$. Пусть $C(\mathbb{R})$ — множество всех четных непрерывных функций на $\mathbb{R}$, $C^{(k)}(\mathbb{R}_+)$ — множество всех четных k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$. Через $L_{p,\alpha}$, $1 \leq p < \infty$, обозначим множество всех измеримых функций $f(x)$ на $\mathbb{R}_+$ (функции берутся с точностью до значений на множестве меры 0), для которых конечна норма
$$\|f\|_{p,\alpha} = \Big(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p\, x^{2\alpha+1}\, dx\Big)^{1/p}.$$
Множество $L_{p,\alpha}$ является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ (в дальнейшем нас будут интересовать только случаи $p = 1$ и $p = 2$).

Через $L_{p,\alpha}([0,\sigma])$ будем обозначать подмножество в $L_{p,\alpha}$, состоящее из всех функций с носителем на отрезке $[0,\sigma]$.

Прямое и обратное преобразования Бесселя определяются следующим образом (см. [7]):

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_0^\infty f(x)\, j_\alpha(\lambda x)\, x^{2\alpha+1}\, dx, \tag{1}$$

$$f(x) := [2^\alpha \Gamma(\alpha+1)]^{-2} \int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\, J_\alpha(\lambda x)\, \lambda^{2\alpha+1}\, d\lambda \tag{2}$$

(т. е. прямое и обратное преобразования Бесселя отличаются числовым множителем $[2^\alpha\Gamma(\alpha+1)]^{-2}$). Формулы (1) и (2) могут иметь различный смысл в зависимости от вида функции f. Если $f \in L_{1,\alpha}$, то интеграл (1) сходится и функция $\widehat{f}(\lambda)$ непрерывная, ограниченная и даже стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. Если $f \in L_{2,\alpha}$, то интеграл (1) нужно понимать как предел в $L_{2,\alpha}$ при $N \to \infty$ последовательности функций

$$\widehat{f}_N(\lambda) = \int_0^N f(x)\, j_\alpha(\lambda x)\, x^{2\alpha+1}\, dx.$$

Преобразование Бесселя и обратное преобразование Бесселя являются взаимно обратными линейными изоморфизмами пространства $L_{2,\alpha}$ на себя, при этом справедлива формула Планшереля

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, x^{2\alpha+1}\, dx = [2^\alpha\Gamma(\alpha+1)]^{-2} \int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\, \widehat{g}(\lambda)\, \lambda^{2\alpha+1}\, d\lambda,$$

$f, g \in L_{2,\alpha}$. Отметим также, что если $f(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$ и функции f и $\mathcal{B}f$ принадлежат $L_{1,\alpha}$, то

$$(\widehat{\mathcal{B}f})(\lambda) = -\lambda^2 \widehat{f}(\lambda). \tag{3}$$

Основной целью работы является доказательство следующей теоремы

Теорема 2 (Пэли—Винер—Ахиезер). *Функция $f(x)$ допускает представление*

$$f(x) = \int\limits_0^\sigma \Phi(t)\, j_\alpha(tx)\, t^{2\alpha+1}\, dt, \tag{4}$$

где $\Phi(t)$ — функция из $L_{2,\alpha}([0,\sigma])$, $\sigma > 0$, тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) *$f(x)$ — целая четная функция экспоненциального типа $\le \sigma$;*
2) *$f(x) \in L_{2,\alpha}$.*

При $\alpha = -\frac{1}{2}$ теорема 2 следует из теоремы 1, поэтому будем считать, что $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Доказательство теоремы 2 будет состоять из доказательств серии утверждений.

(А) *Необходимость условий* 1) *и* 2).

Пусть функция $f(x)$ допускает представление (4). Известно следующее интегральное представление для функции $j_\alpha(tx)$ (см. [7]):

$$j_\alpha(tx) = c \int\limits_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2\alpha} \cos(tx\sin\theta)\, d\theta, \tag{5}$$

где

$$c = \Big(\int\limits_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2\alpha}\, d\theta\Big)^{-1} = \frac{2\,\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}.$$

Из (5) и обычных свойств целых функций экспоненциального типа (см. [9]) следует, что $j_\alpha(tx)$ — целая функция экспоненциального типа $\le t$, а из (4) тогда вытекает, что $f(x)$ — целая функция экспоненциального типа $\le \sigma$, т. е. выполнено условие 1). Необходимость условия 2) очевидна.

(Б) *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 2 *и, кроме того, еще и условиям*

3) *$f(x) \in L_{1,\alpha}$;*
4) *$(\mathcal{B}^r f)(x) \in L_{1,\alpha}$,*

где r — какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $r > \alpha + 1$ (например, можно взять $r = [\alpha] + 2$, $[\alpha]$ — целая часть числа α).

Тогда найдется функция $\Phi(t) \in L_{2,\alpha}([0, \sigma])$, для которой

$$f(x) = \int\limits_0^\sigma \Phi(t)\, j_\alpha(tx)\, t^{2\alpha+1}\, dt. \tag{6}$$

Утверждение (Б) справедливо при $\alpha = -\frac{1}{2}$ (даже без дополнительных условий 3) и 4)). Докажем, что из справедливости утверждения (Б) при $\alpha = p$ вытекает справедливость этого утверждения при $\alpha = p + u$ для любого u, удовлетворяющего условиям $0 < u < 1$.

Пусть для функции $f(x)$ выполнены условия 1)–4) при $\alpha = p + u$. Так как $L_{1,p+u} \subseteq L_{1,p}$ и $L_{2,p+u} \subseteq L_{2,p}$, то по предположению функция $f(x)$ допускает представление

$$f(x) = \int\limits_0^\sigma \Psi(t)\, j_p(tx)\, t^{2p+1}\, dt, \tag{7}$$

где $\Psi(t) \in L_{2,p}([0, \sigma])$. С другой стороны, пользуясь преобразованием Бесселя, получаем, что

$$f(x) = \int\limits_0^\infty \Phi(s)\, j_{p+u}(sx)\, s^{2(p+u)+1}\, ds, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \left[2^{p+u}\Gamma(p+u+1)\right]^{-2} \int\limits_0^\infty f(x)\, j_{p+u}(sx)\, x^{2(p+u)+1}\, dx = \\ &= \left[2^{p+u}\Gamma(p+u+1)\right]^{-2} \widehat{f}(s).\end{aligned}$$

Из того, что $f(x) \in L_{2,p+u}$, следует, что $\Phi(s) \in L_{2,p+u}$. Так как функция $f(x)$ удовлетворяет условию 3), то функция $\Phi(s)$ непрерывна и ограничена, а из условия 4) и из (3) следует, что функция

$$\widehat{\mathcal{B}^r g}(s) = (-s^2)^r \widehat{g}(s)$$

ограничена. Следовательно,

$$|\Phi(s)| \leq c\, s^{-2r}$$

для некоторой постоянной $c > 0$. Так как $r > p + u + 1$, то интеграл в формуле (8) абсолютно сходится.

Воспользуемся известным соотношением для функций Бесселя (см. [8, формула №6.576]):

$$\int_0^1 x^{\nu+1} (1-x^2)^{\mu} J_\nu(bx)\, dx = 2^{\mu}\Gamma(\mu+1)\, b^{-(\mu+1)} J_{\nu+\mu+1}(b), \qquad (9)$$

$b > 0, \operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \mu > -1$. Переходя к функциям $j_\nu(x)$ и взяв $\nu = p$, $\mu = u - 1$, получим из (9), что

$$\int\limits_0^1 a^{2p+1}(1-a^2)^{u-1}\, j_p(xa)\, da = \frac{1}{2} B(u, p+1)\, j_{p+u}(x), \qquad (10)$$

где $B(x, y)$ — вета-функция. Тогда

$$j_{p+u}(sx) = 2(B(u,p+1))^{-1} \int\limits_0^1 j_p(sxa)\, a^{2p+1}(1-a^2)^{u-1}\, da =$$

$$= 2(B(u,p+1))^{-1} s^{-2p-2u} \int\limits_0^s j_p(tx)\, t^{2p+1}\, (s^2-t^2)^{u-1}\, dt \qquad (11)$$

(последний интеграл получен из предыдущего заменой $t = sa$). Подставляя (11) в (8) и меняя порядок интегрирования, получаем, что

$$f(x) = 2\big(B(u,p+1)\big)^{-1} \int\limits_0^\infty \Big(\int\limits_0^s \Phi(s)\, j_p(tx)\, t^{2p+1}\, (s^2-t^2)^{u-1} s\, dt\Big)\, ds =$$

$$= 2\big(B(u,p+1)\big)^{-1} \int\limits_0^\infty \Big(\int\limits_t^\infty \Phi(s)\, (s^2-t^2)^{u-1} s\, ds\Big) t^{2p+1}\, j_p(tx)\, dt. \qquad (12)$$

Из единственности представления функции в виде (7) следует, что

$$\int\limits_t^\infty \Phi(s)\, (s^2-t^2)^{u-1} s\, ds = 0 \qquad (13)$$

при $t \geq \sigma$. Соотношение (13) представляет собой интегральное уравнение Абеля (с точностью до замены переменной). Из единственности решения этого уравнения следует, что $\Phi(s) = 0$ при $s \geq \sigma$, следовательно,

$$f(x) = \int\limits_0^\sigma \Phi(s)\, j_{p+u}(sx)\, s^{2(p+u)+1}\, ds,$$

что и требовалось доказать.

(B) *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям* 1) *и* 2), *то существует последовательность функций $f_n(x)$, сходящаяся в $L_{2,\alpha}$ к $f(x)$, причем каждая функция $f_n(x)$ является целой функцией экспоненциального типа $\leq \sigma + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, и все функции $f_n(x)$ удовлетворяют условиям* 2), 3) *и* 4).

Пусть

$$g_\delta(x) = f(x)\, \left(\frac{\sin \delta x}{\delta x}\right)^k,$$

где $\delta > 0$, k — достаточно большое натуральное число (оно будет указано в дальнейшем). Очевидно, что $g_\delta(x)$ — целая функция экспоненциального типа $\leq \sigma + k\delta$, удовлетворяющая условию 2). Проверим, что она также удовлетворяет условиям 3) и 4).

Чтобы доказать, что $g_\delta(x) \in L_{1,\alpha}$, достаточно проверить, что сходится интеграл

$$\int\limits_1^\infty |g_\delta(x)|\, x^{2\alpha+1}\, dx.$$

Для этого заметим, что функция $f(x)$ ограничена, т. к. $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и известно, что целые функции экспоненциального типа, принадлежащие пространству $L_2(\mathbb{R})$, ограничены (см. [9]). Пусть $|f(x)| \leq C$, тогда

$$\int\limits_1^\infty |g_\delta(x)|\, x^{2\alpha+1}\, dx \leq C\, \delta^{-k} \int\limits_1^\infty x^{-k}\, x^{2\alpha+1}\, dx < \infty$$

при $2\alpha - k + 1 < -1$. Достаточно, например, взять $k = 2[\alpha] + 3$.

Для проверки условия 4) достаточно доказать, что

$$\int\limits_1^\infty |\mathcal{B}^r g_\delta(x)|\, x^{2\alpha+1}\, dx. \tag{14}$$

Функцию $g_\delta(x)$ представим в виде $g_\delta(x) = x^{-k}\, h(x)$, где $h(x) = \delta^{-k}\, f(x)\,(\sin\delta x)^k$. Заметим, что $h(x)$ — целая функция экспоненциального типа и $h(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$. Из классического неравенства Бернштейна для целых функций экспоненциального типа следует, что любая производная $H^{(d)}(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$. Заметим теперь, что функцию $\mathcal{B}(x^{-k}h(x))$ можно представить как линейную комбинацию функций вида $x^{-(k+a)}\,h^{(d)}(x)$, где $a, d \in \mathbb{Z}_+$. Рассуждая как выше, получим, что

$$\int\limits_1^\infty x^{-(k+a)}\,|h^{(d)}(x)|\,x^{2\alpha+1}\,dx < \infty,$$

откуда следует (14).

Легко видеть, что $\|f(x) - g_\delta(x)\|_{2,\alpha} \to 0$ при $\delta \to 0$. В качестве последовательности $f_n(x)$ можно взять последовательность функций $f_n(x) := g_{1/n}(x)$. Тогда $f_n(x) \to f(x)$ в $L_{2,\alpha}$.

(Г) *Достаточность условий* 1) *и* 2).

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 2. Функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \int\limits_0^\infty \Phi(t)\,j_\alpha(tx)\,t^{2\alpha+1}\,dt,$$

где $\Phi(t) = [2^\alpha\,\Gamma(\alpha+1)]^{-2}\widehat{f}(t) \in L_{2,\alpha}$. Пусть $f_n(x)$ — последовательность из пункта (В), сходящаяся к $f(x)$ в $L_{2,\alpha}$. Из пункта (Б) следует, что

$$f_n(x) = \int\limits_0^{\sigma+\varepsilon_n} \Phi_n(t)\,j_\alpha(tx)\,t^{2\alpha+1}\,dt,$$

где $\Phi_n(t) = [2^\alpha\,\Gamma(\alpha+1)]^{-2}\widehat{f_n}(t)$. Так как преобразование Бесселя непрерывно в $L_{2,\alpha}$, то последовательность $\Phi_n(t)$ сходится к $\Phi(t)$ в пространстве $L_{2,\alpha}$. Каждая функция $\Phi_n(t)$ равна нулю при $t > \sigma + \varepsilon_n$ и $\varepsilon_n \to 0$, следовательно, и функция $\Phi(t)$ почти всюду равна нулю при $t > \sigma$. Тогда

$$f(x) = \int\limits_0^\sigma \Phi(t)\,j_\alpha(tx)\,t^{2\alpha+1}\,dt,$$

что окончательно завершает доказательство теоремы 2.

Résumé

It is contained the new proof of Paley—Wiener type theorem for the Bessel transform in this paper.

Литература

[1] Винер Н., Пэли Р. *Преобразование Фурье в комплексной области.* М.: Наука, 1964.

[2] Ахиезер Н. И. *К теории спаренных интегральных уравнений*// Ученые записки Харьковского гос. ун-та. 1957. Т. 80. С. 5–21.

[3] Киприянов И. А., Куликов А. А. *Теорема Пэли—Винера—Шварца для преобразования Фурье—Бесселя*// Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. №1. С. 21–25.

[4] Киприянов И. А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи.* М.: Наука, 1997.

[5] Платонов С. С. *О пространствах Никольского—Бесова, построенных по обобщенным сдвигам Бесселя*// Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: Тезисы докладов международной конф. М., 1998. С. 50.

[6] Московский А. В. *Теоремы Джексона в пространствах* L_p, $1 \le p \le 2$, *на полупрямой*// Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докл. 9-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1997.

[7] Левитан Б. М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье*// Успехи мат. наук. 1951. Т. 6. № 2. С. 102–143.

[8] Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: Наука, 1971.

[9] Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука, 1977.