Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 6, 1999

УДК 517

ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СЕМЕЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ ШАРА В $\mathbf{C}^N$

Я. Годуля, П. Личберский, В. В. Старков

Понятие линейно-инвариантного семейства отображений шара в $\mathbb{C}^n$ введено в [1,2], оно обобщает классический случай $n = 1$ [3]. Эта статья представляет собой сводку основных результатов авторов, ранее опубликованных в [4-6]. Дается новое простое определение порядка отображения (приводимые примеры показывают преимущества этого определения), устанавливается связь линейно-инвариантных семейств отображений с классом функций Блоха в $\mathbb{C}^n$, получена теорема регулярности.

Понятие линейно-инвариантного семейства (л.-и.с.) аналитических в круге $\mathbf{B} = \mathbf{B}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций впервые было введено и изучалось Ch. Pommerenke в [3]. Линейная инвариантность семейства $\mathfrak{M}$ локально однолистных в $\mathbf{B}$ функций $f(z) = z + \ldots$ означает, что наряду с каждой функцией $f \in \mathfrak{M}$ этому семейству принадлежит и функция

$$\frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))}{f'(\varphi(0))\varphi'(0)} = z + \cdots \tag{1}$$

при любом конформном автоморфизме $\varphi(z)$ круга $\mathbf{B}$. Многие известные классы конформных отображений круга $\mathbf{B}$ являются л.-и.с.

В дальнейшем понятие линейной инвариантности обобщалось многими авторами в различных направлениях. В 1997 г. в [1] понятие л.-и.с.было перенесено на локально биголоморфные отображения шара $\mathbf{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| < 1\}$, $n > 1$; в [1] изучались л.-и.с.таких отображений. Следует также заметить, что еще ранее подобное обобщение было предпринято в [2] для случая $n = 2$. Предлагаемая статья содержит результаты, полученные авторами в этом направлении и опубликованные ранее в [4-6].

1. Порядок линейно-инвариантного семейства

Обозначим $\mathbb{C}^n$ n-мерное комплексное пространство, состоящее из всех n-мерных векторов $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, скалярное произведение $\langle z, w\rangle = z_1\bar{w}_1 + \cdots + z_n\bar{w}_n$, $\|z\| = (\langle z, z\rangle)^{\frac{1}{2}} < 1$. Для $r > 0$ обозначим $\mathbf{B}_r^n = r\mathbf{B}^n$. Единичную матрицу обозначим $\mathbf{I}$.

Далее будем рассматривать локально биголоморфные отображения $f(z) = (f^1(z), \ldots, f^n(z))$ шара $\mathbf{B}^n$. Для отображения f обозначим $\mathrm{D}^m f(z)$ дифференциал Фреше m-го порядка в точке z. Обозначим $J_f(z) = \det \mathrm{D}f(z)$ якобиан в точке z.

Пусть

$$LS_n =$$

$$\{f : f \text{ голоморфна в } \mathbf{B}^n, J_f(z) \neq 0 \text{ при } z \in \mathbf{B}^n, f(\mathbb{O}) = \mathbb{O}, \mathrm{D}f(\mathbb{O}) = \mathbf{I}\}$$

— семейство нормированных в нуле локально биголоморфных отображений шара $\mathbf{B}^n$. Далее по аналогии с (1) определим оператор

$$\Lambda_\varphi(f)(z) = (\mathrm{D}\varphi(\mathbb{O}))^{-1}(\mathrm{D}f(\varphi(\mathbb{O})))^{-1}\{f(\varphi(z)) - f(\varphi(\mathbb{O}))\},$$

здесь φ принадлежит множеству всех биголоморфных автоморфизмов $\mathcal{A}$ шара $\mathbf{B}^n$.

По аналогии со случаем $n = 1$ в [1] даны следующие определения.

Определение 1. *1. Семейство $\mathcal{F}$ называется линейно-инвариантным семейством* (л.-и.с.)*, если*

(i) $\mathcal{F} \subset LS_n$,

(ii) $\Lambda_\varphi(f) \in \mathcal{F}$ для всех $f \in \mathcal{F}$ и $\varphi \in \mathcal{A}$.

Определение 2. *2.Порядком л.-и.с. $\mathcal{F}$ называется число*

$$\mathrm{ord}\mathcal{F} = \sup_{g\in\mathcal{F}} \sup_{\|w\|=1} \left|\mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{D}^2 g(\mathbb{O})(w, \cdot)\right\}\right| = \sup_{g\in\mathcal{F}} \sup_{\|w\|=1} \left|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_{jk}^j(\mathbb{O})w_k\right|,$$

где $g_{ik}^j = \dfrac{\partial^2 g^j}{\partial z_i \partial z_k}$.

Определение 3. *3. Семейство*

$$\mathcal{U}_\alpha = \bigcup\{f \in LS_n : \mathrm{ord} f \leqslant \alpha\}$$

называется универсальным л.-и.с. порядка α.

Символ tr здесь обозначает след матрицы. В [1] показано, что $\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$ для $\alpha < \dfrac{n+1}{2}$.

В случае $n = 1$ определение 2 является классическим определением порядка л.-и.с.$\mathfrak{M}$ [3]: $\mathrm{ord}\mathfrak{M} = \sup\limits_{f\in\mathfrak{M}} \left|\dfrac{f''(0)}{2}\right|$. J. A. Pfaltzgraff [1] замечает, что

(i) компактное л.-и.с.имеет конечный порядок,

(ii) л.-и.с.всех нормированных в нуле биголоморфных отображений шара $\mathbf{B}^n$ имеет бесконечный порядок.

Он также доказал теорему искажения в $\mathcal{U}_\alpha$: если $\mathrm{ord} f = \alpha$, то

$$\frac{(1-\|z\|)^{\alpha-(n+1)/2}}{(1+\|z\|)^{\alpha+(n+1)/2}} \leqslant |J_f(z)| \leqslant \frac{(1+\|z\|)^{\alpha-(n+1)/2}}{(1-\|z\|)^{\alpha+(n+1)/2}}, \quad z\in\mathbf{B}^n, \qquad (2)$$

и утверждал точность этого неравенства, основываясь на том, что для отображения

$$K_\alpha(z) = (k_\alpha(z_1), z_2\sqrt{k'_\alpha(z_1)}, \ldots, z_n\sqrt{k'_\alpha(z_1)}),$$

где

$$k_\alpha(z_1) = \frac{n+1}{4\alpha}\left[\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right)^{2\alpha/(n+1)} - 1\right], \ \left(J_{K_\alpha}(z) = \frac{(1+z_1)^{\alpha-(n+1)/2}}{(1-z_1)^{\alpha+(n+1)/2}}\right),$$

$\mathrm{ord}K_\alpha = \alpha$. Однако при доказательстве равенства $\mathrm{ord}K_\alpha = \alpha$. Pfaltzgraff J. A. использует равенство (5.3) из своей работы [1], хотя оно — неверно (при переходе к (5.3) от предыдущего равенства допущена непоправимая ошибка). Тем не менее неравенство (2) является точным и равенство $\mathrm{ord}K_\alpha = \alpha$ справедливо, оно доказано в [7] совсем другим путем.

Далее порядком отображения $f \in LS_n$ будем называть число

$$\mathrm{ord} f = \sup_{\varphi\in\mathcal{A}}\sup_{\|w\|=1} \frac{1}{2}|\mathrm{tr}\{\mathrm{D}^2 g(\mathbb{O})(w,\cdot)\}|,$$

где $g(z) = \Lambda_\varphi(f)(z)$.

Для $f \in LS_n$ обозначим

$$\alpha_0(f) = \inf\{\alpha : \alpha\in\theta(f)\},$$

где $\theta(f)$ — множество всех таких $\alpha \in [\frac{n+1}{2}, \infty)$, что

$$|J_{\Lambda_\varphi(f)}(z)| \leqslant \frac{(1+\|z\|)^{\alpha-(n+1)/2}}{(1-\|z\|)^{\alpha+(n+1)/2}}, \quad z \in \mathbf{B}^n_{r(f)} \subset \mathbf{B}^n, \tag{3}$$

для любого $\varphi \in \mathcal{A}$. Из неравенства (2) следует, что $\theta(f) \neq \emptyset$, если $\operatorname{ord} f < \infty$. Оказывается, определенный выше порядок л.-и.с.тесно связан с неравенством (2).

Теорема 1. *Если $f \in LS_n$, то $\alpha_0(f) = \operatorname{ord} f$.*

Следствие. *1. Пусть $\mathcal{F}$ — л.-и.с. Тогда*

$$\operatorname{ord}\mathcal{F} = \inf\{\alpha : |J_f(z)| \leqslant \frac{(1+\|z\|)^{\alpha-(n+1)/2}}{(1-\|z\|)^{\alpha+(n+1)/2}}, \quad f \in \mathcal{F},\ z \in \mathbf{B}^n\},$$

причем условие $z \in \mathbf{B}^n$ здесь может быть заменено условием $z \in \mathbf{B}^n_r$ для любого $r \in (0,1)$.

Следствие. *2. Пусть $\mathcal{V}_\alpha$ — семейство всех отображений $f \in LS_n$, для которых существует такое число $r(f) \in (0,1)$, что для любого $\varphi \in \mathcal{A}$ и любого $z \in \mathbf{B}^n_{r(f)}$ выполняется неравенство (3). Тогда $\mathcal{V}_\alpha = \mathcal{U}_\alpha$.*

Весьма неожиданным оказывается следующее утверждение

Предложение 1. *Если $f_1, f_2 \in LS_n$ и $|J_{f_1}(z)| = |J_{f_2}(z)|$ для всех $z \in \mathbf{B}^n$, то $\operatorname{ord} f_1 = \operatorname{ord} f_2$.*

Таким образом, порядок отображения f оказывается зависимым только от якобиана $|J_f(z)|$.

О важности и полезности предложения 1 и нового определения $\operatorname{ord}\mathcal{F}$ (см. следствие 1) говорит следующий пример. Пусть $\mathcal{F} = \{F \in LS_n : J_F(z) \equiv 1\}$, $\Lambda(\mathcal{F}) = \{f = \Lambda_\varphi(F) : F \in \mathcal{F}, \varphi \in \mathcal{A}\}$. В [8, теорема 5] утверждается (доказательство этой теоремы ошибочно, поскольку опирается на неверное равенство (5.3) из [1]), что $\operatorname{ord}\Lambda(\mathcal{F}) = \frac{n+1}{2}$. Теперь этот результат является простым следствием предложения 1 и того факта, что $\operatorname{ord} f_0 = \frac{n+1}{2}$ для $f_0(z) \equiv z$. Более того, из предложения 1 следует, что $\operatorname{ord}\Lambda(\mathcal{F}_a) = \frac{n+1}{2}$ для любого семейства $\mathcal{F}_a = \left\{F \in LS_n : |J_F(z)| = \left(\frac{1-\|a\|^2}{|1-\langle z,a\rangle|^2}\right)^{(n+1)/2}\right\}$ при любом фиксированном $a \in \mathbf{B}^n$.

В случае $n = 1$ D. M. Campbell [9] доказал, что равенство в (2) достигается только для функции

$$f(\zeta) = f_t(\zeta) = \frac{e^{-it}}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+\zeta e^{it}}{1-\zeta e^{it}}\right)^{\alpha} - 1\right], \quad \zeta \in \mathbf{B} \text{ и } t \in \mathbb{R}.$$

Совершенно иной оказывается ситуация в случае $n > 1$. J. A. Pfaltzgraff [1] утверждал (но не доказал, доказательство этого факта см. в [7]), что равенство в (2) достигается для отображения $K_\alpha(z)$. Из предложения 1 следует, что при $n > 1$ экстремальных функций в неравенстве (2) бесконечно много и для построения их необязательно использовать функции k_α. Действительно, пусть $n > 1$ и пусть фиксировано $\nu \in \{1, \ldots, n\}$. Далее, пусть, например,

$$H_\nu(z) = \tag{4}$$

$$(z_1 h_1(z_\nu), \ldots, z_{\nu-1} h_{\nu-1}(z_\nu), \int_0^{z_\nu} h_\nu(s)\,ds, z_{\nu+1} h_{\nu+1}(z_\nu), \ldots, z_n h_n(z_\nu)),$$

где функции $h_j(z)$, $h_j(0) = 1$, $j = 1, \ldots, n$, — произвольные голоморфные в $\mathbf{B}$ функции, удовлетворяющие условию

$$\prod_{j=1}^{n} h_j(z_\nu) = \frac{(1+z_\nu)^{\alpha-(n+1)/2}}{(1-z_\nu)^{\alpha+(n+1)/2}}.$$

Тогда

$$J_{H_\nu}(z) = \prod_{j=1}^{n} h_j(z_\nu), \quad z \in \mathbf{B}^n,$$

и по предложению 1 $\mathrm{ord} H_\nu = \mathrm{ord} K_\alpha = \alpha$. Таким образом, H_ν является экстремальной функцией в неравенстве (2).

2. Теорема регулярности

Теоремой регулярности называют теорему, в которой утверждается, что функции, имеющие максимальную для данного класса скорость роста, растут гладко (регулярно).

Теорема регулярности известна в разных классах голоморфных функций одного комплексного переменного. Так, в классе S голоморфных и однолистных в единичном круге $\mathbf{B}$ функций $f(z) = z + \cdots$ справедлива

Теорема A. (Теорема регулярности в S). [10,11] (см. также [12–14]). *Для $f \in S$ существует предел*

$$\lim_{r\to 1^-}\left[\frac{(1-r)^2}{r}M(r,f)\right] = \lim_{r\to 1^-}\left[\frac{(1-r)^3}{1+r}M(r,f')\right] = \delta \in [0,1]$$

(здесь $M(r,\psi)$ обозначает $\max\limits_{|z|=r}|\psi(z)|$ для непрерывной в $\mathbf{B}$ функции); $\delta = 1$ только для функции Кёбе $K_\theta(z) = z(1-ze^{i\theta})^{-2}$, $\theta \in [0,2\pi)$; при $\delta \neq 1$ величины, стоящие под знаком пределов, убывают по $r \in [0,1)$. Если $\delta \neq 0$, то для каждой функции $f \in S$ существует такое число $\theta_f \in [0,2\pi)$, что при любом $\theta \in [0,2\pi)$ существует предел

$$\lim_{r\to 1^-}\left[\frac{(1-r)^2}{r}|f(re^{i\theta})|\right] = \lim_{r\to 1^-}\left[\frac{(1-r)^3}{1+r}|f'(re^{i\theta})|\right] = \begin{cases} \delta, & \theta = \theta_f, \\ 0, & \theta \neq \theta_f. \end{cases}$$

Величины, стоящие здесь под знаком предела, не возрастают по $r \in [0,1)$.

Эта теорема была обобщена на случай производных высших порядков $f^{(k)}(z), k \geq 2, f \in S$ [15], и на функции, p-листные в среднем [10]. В [9,16,17] была получена теорема регулярности для произвольных л.-и.с.голоморфных в $\mathbf{B}$ функций конечного порядка.

Для непрерывного в шаре $\mathbf{B}^n$ отображения g обозначим $M(r,g) = \max\limits_{\|z\|=r}|g(z)|$. В случае больших размерностей ($n > 1$) в л.-и.с.может быть доказана следующая теорема регулярности.

Теорема 2. (Теорема регулярности). *Для любого отображения $f \in \mathcal{U}_\alpha$*

1) величины

$$M(r,J_f)\frac{(1-r)^{\alpha+(n+1)/2}}{(1+r)^{\alpha-(n+1)/2}} \qquad \text{и} \qquad |J_f(rv)|\frac{(1-r)^{\alpha+(n+1)/2}}{(1+r)^{\alpha-(n+1)/2}}$$

не возрастают по $r \in [0,1)$ *для любого* $v \in \partial\mathbf{B}^n$;

2) существуют вектор $v_0 = v_0(f) \in \partial\mathbf{B}^n$ *и число* $\delta_f \in [0,1]$ *такие, что*

$$\lim_{r\to 1^-}\left[M(r,J_f)\frac{(1-r)^{\alpha+(n+1)/2}}{(1+r)^{\alpha-(n+1)/2}}\right] = \lim_{r\to 1^-}\left[|J_f(rv_0)|\frac{(1-r)^{\alpha+(n+1)/2}}{(1+r)^{\alpha-(n+1)/2}}\right]$$
$$= \lim_{r\to 1^-}\left[M(r,\frac{d}{dr}J_f)\frac{(1-r)^{\alpha+(n+3)/2}}{(n+1+2\alpha)2^{\alpha-(n+3)/2}}\right]$$
$$= \limsup_{r\to 1^-}\left[\left|\frac{d}{dr}J_f(rv_0)\right|\frac{(1-r)^{\alpha+(n+3)/2}}{(n+1+2\alpha)2^{\alpha-(n+3)/2}}\right]$$
$$= \lim_{r\to 1^-}\left[\int_0^r M(\rho,\frac{d}{d\rho}J_f)d\rho\frac{(1-r)^{\alpha+(n+1)/2}}{2^{\alpha-(n+1)/2}}\right]$$
$$= \lim_{r\to 1^-}\left[\int_0^r \left|\frac{d}{d\rho}J_f(\rho v_o)\right| d\rho\frac{(1-r)^{\alpha+(n+1)/2}}{(1+r)^{\alpha-(n+1)/2}}\right] = \delta_f,$$

если $\delta_f > 0$, *то вектор* $v_0 = v_0(f) \in \mathbf{B}^n$ *будем называть направлением максимального роста отображения* $f \in \mathcal{U}_\alpha$;

3) если в п. 2) теоремы направление максимального роста $v_0 = (1,0,...,0)$ *(этого всегда можно достигнуть преобразованием поворота с помощью некоторой унитарной матрицы), то для отображения* $f \in \mathcal{U}_\alpha$ $\quad\delta_f = 1$ *в том и только в том случае, если*

$$J_f(z_1v_0) = \frac{(1+z_1)^{\alpha-(n+1)/2}}{(1-z_1)^{\alpha+(n+1)/2}},\quad z_1 \in \mathbf{B}. \tag{5}$$

Причем, в отличие от случая $n > 1$, *таких отображений* $f \in \mathcal{U}_\alpha$, *удовлетворяющих условию (5), — бесконечное множество; любая аналитическая в* $\mathbf{B}$ *функция* $h_1(\xi) \neq 0$ *порождает такое отображение (см. формулу (4)).*

3. Функции Блоха и отображения Блоха

В многомерном случае, как и в случае $n = 1$ (см. [18,19]), удается установить тесную связь между л.-и.с.отображений и функциями Блоха в шаре $\mathbf{B}^n$. R. Timoney [20,21] изучал функции Блоха многих комплексных переменных и дал несколько эквивалентных определений таких функций (см. также [22,23]). Здесь мы будем использовать следующее определение.

Определение 4. *4. Голоморфная функция $h : \mathbf{B}^n \to \mathbb{C}$ называется функцией Блоха, если ее норма*

$$||h||_{\mathcal{B}} = |h(\mathbb{O})| + \sup_{\varphi\in\mathcal{A}} ||\nabla(h\circ\varphi)(\mathbb{O})||$$

конечна.

Обозначим

$$Q_h(z) = \sup_{\mathbb{C}^n\ni x\neq\mathbb{O}} \frac{|\langle\nabla h(z),\bar{x}\rangle|}{H_z(x,x)^{1/2}},$$

где $H_z(u,v) = \dfrac{n+1}{2}[(1-||z||^2)\langle u,v\rangle+\langle u,z\rangle\langle z,v\rangle]/(1-||z||^2)^2$ — метрика Бергмана, $u,v\in\mathbb{C}^n, z\in\mathbf{B}^n$. Тогда по лемме 1 из [22] получаем, что $Q_{h\circ\varphi}(z) = Q_h(\varphi(z))$ для любого автоморфизма $\varphi\in\mathcal{A}$. Следовательно,

$$\sup_{a\in\mathbf{B}^n} Q_h(a) =$$

$$\frac{2}{n+1}\sup_{\varphi\in\mathcal{A},||x||=1} |\langle\nabla(h\circ\varphi)(\mathbb{O}),x\rangle| = \frac{2}{n+1}\sup_{\varphi\in\mathcal{A}} ||\nabla(h\circ\varphi)(\mathbb{O})||.$$

Таким образом, определение 4 эквивалентно следующему определению функций Блоха, данному в [23]: $\sup_{a\in\mathbf{B}^n} Q_h(a) < \infty$. R. Timoney в [20] доказал, что величины $\sup_{a\in\mathbf{B}^n} Q_h(a)$ и $\sup_{||w||=1} [(1-||w||^2)\langle\nabla h(w),\bar{w}\rangle|]$ — эквивалентны. Отсюда следует эквивалентность норм $||h||_{\mathcal{B}}$ и

$$||h||_X = |h(\mathbb{O})| + \sup_{w\in\mathbf{B}^n}(1-||w||^2)|\langle\nabla h(w),\bar{w}\rangle|.$$

Класс функций Блоха будем обозначать $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{B}^n)$. Следующая теорема дает новое эквивалентное определение функций Блоха и связывает класс $\mathcal{B}$ с линейно-инвариантными семействами конечного порядка.

Теорема 3. *Голоморфная функция $h : \mathbf{B}^n \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathcal{B}$ в том и только в том случае, если существует такое отображение $f \in \bigcup_{\alpha<\infty} \mathcal{U}_\alpha \subset LS_n$, что*

$$h(z) - h(\mathbb{O}) = \log J_f(z), \quad z\in\mathbf{B}^n. \tag{6}$$

Если при этом $\mathrm{ord} f = \alpha$, *то*

$$2\left(\alpha - \frac{n+1}{2}\right) \leqslant \|h - h(\mathbb{O})\|_X \leqslant 2\left(\alpha + \frac{n+1}{2}\right)$$

и

$$2\left(\alpha - \frac{n+1}{2}\right) \leqslant \|h - h(\mathbb{O})\|_{\mathcal{B}} \leqslant 2\left(\alpha + \frac{n+1}{2}\right),$$

оба последних неравенства — точные в классе $\mathcal{B}$.

В случае $n = 1$ теорема 3 доказана в [19].

Из теоремы 2 (регулярности) и теоремы 3 получаем

Следствие. *3. Для любой функции* $h \in \mathcal{B}$ *и любого* $v \in \partial \mathbf{B}^n$ *величины*

$$\mathrm{Re}[h(rv) - h(\mathbb{O})] + \left(\alpha + \frac{n+1}{2}\right)\log(1-r) - \left(\alpha - \frac{n+1}{2}\right)\log(1+r)$$

и

$$\max_{\|v\|=1} \mathrm{Re}[h(rv) - h(\mathbb{O})] + \left(\alpha + \frac{n+1}{2}\right)\log(1-r) - \left(\alpha - \frac{n+1}{2}\right)\log(1+r)$$

не возрастают относительно $r \in [0,1)$ *и при* $r \to 1^-$ *имеют пределы, не большие нуля; здесь* $\alpha = \mathrm{ord} f$, $f \in \bigcup_{\alpha<\infty} \mathcal{U}_\alpha$, f *и* h *связаны равенством (6).*

Заметим, что в последнем следствии невозможно заменить знак вещественной части на знак модуля, т. к. при вещественных λ функции $e^{i\lambda}h \in \mathcal{B}$ будет соответствовать отображение $f_\lambda \in \bigcup_{\alpha<\infty} \mathcal{U}_\alpha$ $(e^{i\lambda}(h(z) - h(\mathbb{O})) = \log J_{f_\lambda}(z))$, для которого порядок $\alpha_\lambda = \mathrm{ord} f_\lambda$ зависит от λ.

Теорема 4. *Голоморфная функия* $h : \mathbf{B}^n \to \mathbb{C}$ *принадлежит классу* $\mathcal{B}$ *в том и только в том случае, если существует такая положительная постоянная* C, *что для всех* $z \in \mathbf{B}^n$

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{A}} |\,\mathrm{Re}[h(\varphi(z)) - h(\varphi(\mathbb{O}))] + \log\left|\frac{J_\varphi(z)}{J_\varphi(\mathbb{O})}\right| + \log(1 - \|z\|^2)^{(n+1)/2}|$$

$$\leqslant C \log \frac{1+\|z\|}{1-\|z\|},$$

наилучшее (наименьшее) значение C *здесь равно* $\operatorname{ord} f$, *где* $f \in LS_n$ *и связано с* h *равенством (6).*

Перейдем к рассмотрению отображений Блоха.

Определение 5 [24]. Голоморфное отображение $h : \mathbf{B}^n \to \mathbb{C}^n$ называется отображением Блоха, если оно имеет конечную норму Блоха

$$\|h\|_{\mathcal{B}(n)} = \|h(\mathbb{O})\| + \sup_{\varphi \in \mathcal{A}} \|\mathrm{D}(h \circ \varphi)(\mathbb{O})\|,$$

где $\|\mathrm{D}h(z)\|$ обозначает норму линейного оператора $\mathrm{D}h(z)$.

Семейство всех таких отображений будем обозначать $\mathcal{B}(n)$. Следующая теорема устанавливает соотношение между $\mathcal{B}(n)$ и семействами $\mathcal{U}_\alpha$.

Теорема 5. *Голоморфное отображение* $h : \mathbf{B}^n \to \mathbb{C}^n$ *принадлежит классу* $\mathcal{B}(n)$ *в том и только в том случае, если существуют такие отображения* $f_1, \ldots, f_n \in \bigcup\limits_{\alpha < \infty} \mathcal{U}_\alpha$, *что*

$$h(z) - h(\mathbb{O}) = (\log J_{f_1}(z), \ldots, \log J_{f_n}(z)).$$

Если при этом $\alpha_k = \operatorname{ord} f_k$, $k = 1, \ldots, n$, *то*

$$2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k - \frac{n+1}{2}\right)^2} \leqslant \|h - h(\mathbb{O})\|_{\mathcal{B}(n)} \leqslant 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k + \frac{n+1}{2}\right)^2};$$

оба неравенства точные.

Из теоремы 5, в частности, вытекает, что голоморфное отображение $h = (h_1, \ldots, h_n)$ принадлежит классу $\mathcal{B}(n)$ в том и только в том случае, если для каждого $k = 1, \ldots, n$ функции h_k принадлежат классу $\mathcal{B}$.

Résumé

In the paper we suggest a new definition of the order of a linearly invariant family of locally biholomorphic mappings of the unit ball in $\mathbb{C}^n$. This definition is equivalent to the one given by Pfaltzgraff in [1]. It bases on a very simple relationship with the Jacobian of the mappings (see Corollary 1). It appears that the order of a mapping depends only on its Jacobian (see Proposition 1).

Литература

[1] Pfaltzgraff J. A. *Distortion of locally biholomorphic maps of the n-ball* // Complex Variables Theory Appl. 1997. V. 33. P. 239–253.

[2] Barnard R. V., FitzGerald C. H., Gong S. *A distortion theorem for biholomorphic mappings in* $\mathbb{C}^2$// Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 344. P. 907–924.

[3] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen. I*// Math. Ann. 1964. Hf. 155. P. 108–154.

[4] Godula J., Liczberski P., Starkov V.V. *Order of linearly invariant family of mappings in* $\mathbb{C}^n$// Complex Variables Theory Appl. (to appear).

[5] Godula J. Starkov V. V. *Universal linearly invariant families and Bloch functions in the unit ball*//(to appear).

[6] Liczberski P., Starkov V. V. *Regularity theorem for linearly invariant families of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$// (to appear).

[7] Liczberski P., Starkov V. V. *Linearly invariant families of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$ *— transition to a smaller dimenssion*// (to appear).

[8] Pfaltzgraff J. A., Suffridge T. J. *An extension theorem and linear invariant families generated by starlike maps*// Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A. 1999. V. 53. (to appear).

[9] Campbell D. M. *Applications and proof of uniqueness theorem for linearly invariant families of finite order*// Rocky Mountain J. Math. 1974. V. 4. P. 621–634.

[10] Хейман В. К. *Многолистные функции.* М.: ИЛ, 1960.

[11] Krzyz J. *On the maximum modulus of univalent functions*// Bull. Acad. Polonici Sci. 1955. V. CI. III. № 3. P. 203–206.

[12] Лебедев Н. А. *Принцип площадей в теории однолистных функций.* М.: Наука, 1975.

[13] Милин И. М. *Однолистные функции и ортонормированные системы.* М.: Наука, 1971.

[14] Bieberbach L. *Einführung in die konforme Abbildung.* Berlin: Sammlung Göschen, 1967. Band 768/786a.

[15] Базилевич И. Е. *Асимптотическое свойство производных одного класса регулярных в круге функций*// Исслед. по соврем. пробл. теории функций компл. перем.: Сб. статей. М.: Физматгиз, 1961. С. 216–219.

[16] Старков В. В. *Теорема регулярности в универсальных линейно-инвариантных семействах функций*// Труды международной конференции по конструктивной теории функций (Варна. 1984). София, 1984. С. 76–79.

[17] Старков В. В. *Теоремы регулярности для универсальных линейно-инвариантных семейств функций*// Сердика. София, 1985. Т. 11. С. 299–318.

[18] Campbell D. M., Cima J. A., Pfaltzgraff J. A. *Linear space and linear-invariant families of locally univalent analytic functions*// Manuscripta Math. 1971. V. 4. P. 1-30.

[19] Godula J., Starkov V. V. *Applications of ideas of Möbius invariance to obtain equivalent definitions of Bloch functions*// Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1995. V. 49. P. 41–58.

[20] Timoney R. M. *Bloch functions in several complex variables, I* // Bull. London Math. Soc. 1980. V. 12. P. 241–267.

[21] Timoney R. M. *Bloch functions in several complex variables, II* // J. Reine Angew. Math. 1980. V. 319. P. 1–22.

[22] Hahn K. T. *Quantitative Bloch's theorem for certain classes of holomorphic mappings of ball into P_nC*// J. Reine Angew. Math. 1976. V. 283. P. 99–109.

[23] Hahn K. T. *Holomorphic mappings of the hyperbolic space into the complex Euclidean space and the Bloch theorem* // Canad. J. Math. 1975. V. 27. P. 446–458.

[24] Liu X. *Bloch functions of several complex variables* // Pacific J. Math. 1992. V. 152. № 2. P. 347–363.

Institute of Mathematics,
Maria Curie-Skłodowska University,
20-031 Lublin, Poland. e.mail: godulagolem.umcs.lublin.pl

Institute of Mathematics,
Technical University of Łódź,
90-924 Łódź, Poland; e-mail: piliczbck-sg.p.lodz.pl

Петрозавозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33