Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 6, 1999

УДК 517.9, 62.50

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФАЗОВОГО ВЕКТОРА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю. В. Заика

В терминах функциональной зависимости получено описание наблюдаемых функций в нелинейных динамических системах, аналитических по фазовым переменным. При анализе базисности конечного числа интегральных операторов наблюдения развивается аналог принципа двойственности, известного в линейной теории наблюдения и управления. Рассмотрены также вопросы устойчивости базисов, учета структуры возмущений, методы приближений.

Проблема наблюдения и прогнозирования фазового состояния динамических систем по неполной обратной связи относится к классу обратных задач. По ограниченной косвенной информации требуется восстанавливать неизвестное априори движение. Формально сюда включаются и задачи параметрической идентификации моделей. Механическую терминологию используем по традиции (подобные задачи возникают, например, и в нестационарной химической кинетике). Условно можно выделить два основных направления исследований: поиск критериев наблюдаемости и построение восстанавливающих (разрешающих) операторов. В теоретическом отношении наиболее удобным является дифференцирование выхода и применение критериев инъективности отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Но в условиях реальной зашумленности измерений такой путь чреват потерей работоспособности алгоритма восстановления движения. Более корректным является применение интегральных восстанавливающих операторов. Основы соответствующего математического аппарата изложены в [1].

Этот подход обобщен на нелинейный случай в [2, 3]. Данное сообщение содержит развитие результатов [2 – 4] для нелинейных систем, аналитических по фазовым переменным. Основное внимание уделяется качественному описанию метода, технические детали и громоздкие доказательства опущены.

Для упрощения изложения считаем динамическую систему стационарной вещественной аналитической, а измерения скалярными:

$$dx/dt = f(x), \quad y = g(x), \qquad f \in C^{\omega}(U, \mathbb{R}^n), \quad g \in C^{\omega}(U, \mathbb{R}^1). \qquad (1)$$

Начальные данные неизвестны. Заданы отрезок наблюдения $[0, T]$ и множество возможных конечных состояний $U_T = \{x(T)\} \subseteq U$. В дальнейшем U, U_T, $\widetilde{U}, \ldots$ — области в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Задача наблюдения состоит в построении оператора, позволяющего по любым возможным $(x(T) \in U_T)$ реализациям обратной связи

$$y(\cdot; x, T) = g(x(\cdot; x, T)) : [0, T] \to \mathbb{R}^1$$

однозначно определять неизвестный фазовый вектор $x = x(T) \in U_T$. По $x(T)$ уже можно полностью восстанавливать траекторию движения. Запись $y(\cdot; x, T)$ означает, что регистрируемая на $[0, T]$ функция времени $y(\cdot)$ однозначно определяется искомым неизвестным состоянием x в момент T. Решения $x(\cdot; x, T)$ дифференциального уравнения в (1) с данными Коши $x(T; x, T) = x$ предполагаются продолжимыми на $[0, T]$ по смыслу задачи. Таким образом, необходима операция для систематического решения континуальной краевой задачи при вариациях начальных данных. Вопросов существования решения здесь нет, проблема в единственности и алгоритме восстановления. Более общая постановка: определять по $y(\cdot)$ значения $\varphi(x(T))$ заданной функции $\varphi : U_T \to \mathbb{R}^1$. В частности, можно рассматривать $\varphi_i(x) = x_i$.

В дальнейшем удобно проводить аналогию с линейным случаем, когда $(f, g) = (F, G)$ $(dx/dt = Fx,\ y = Gx,\ \ F,\ G$ — матрицы размерностей $n \times n$ и $1 \times n)$ [1]. Если в сопряженной системе

$$dV/dt = -F'V(t) + G'k(t), \qquad V(0) = 0, \qquad (2)$$

построить управление $k(\cdot)$ из условия $V(T) = h$, то по $y(\cdot)$ вычисляется проекция неизвестного $x(T)$ на вектор h:

$$h'x(T) = \langle\, k, y \,\rangle = (k, y)_{L_2} \quad \forall x(T) \in \mathbb{R}^n.$$

Штрихом обозначаем транспонирование. Совокупность всех $h \in \mathbb{R}^n$, для которых по любой возможной реализации $y(\cdot)$ однозначно восстанавливается значение $h'x(T)$, описывается множеством достижимости $D_T = \{V(T)\}$. Для определенности считаем управления $k(\cdot)$ непрерывными на $[0,T]$ (нетрудно обобщить до $k \in L_2$).

Следуя работам [2 – 4] примем в качестве аналога сопряженной системы (2) линейное уравнение в частных производных

$$v_t(t,x) + v_x(t,x) \cdot f(x) = k(t)g(x), \qquad v(0,x) = 0. \tag{3}$$

Когда задача линейна, т. е. $(f,g) = (F,G)$, имеем $v(t,x) = V'(t)x$, где вектор-функция $V(t)$ удовлетворяет (2). Поскольку T, U_T фиксированы, то (3) достаточно рассматривать на пучке

$$W = \{\, (t,x) \,\big|\, t \in [0,T],\ x \in U_t = x(t; U_T, T) \,\}$$

из возможных ($x(T) \in U_T$) интегральных кривых на $[0,T]$. Единственным гладким решением (3) является функция

$$v(t,x) = \int_0^t k(\tau)\, y(\tau; x, t)\, d\tau, \quad (t,x) \in W. \tag{4}$$

Гладкость в W понимается в смысле $v \in C^1(\widetilde{W})$ ($W \subset \widetilde{W}$ — область): формулой (4) $v(t,x)$ задается и в открытой окрестности W, точка (t,x) играет роль начальных данных (t_0, x_0) $(x(t_0; x_0, t_0) = x_0)$.

Смысл введения функции (4) и уравнения (3), которому она удовлетворяет, состоит в следующем. При $t = T$ в (4) получим $v(T,x) = \langle\, k, y \,\rangle$, $x \in U_T$. Это же соотношение получаем подстановкой в (3) вместо x решения $x(t; x, T)$ и интегрированием на $[0,T]$ тождества по t (слева $\dot{v}(t, x(t))$). Значит, если мы хотим определять "нелинейную проекцию" $\varphi(x(T))$ по известной $y(\cdot)$ в форме интегрального оператора $\langle\, k, y \,\rangle$, то в (3) к нулевым начальным данным $v(0,x) = 0$, $x \in U_0$, следует добавить условие $v(T,x) = \varphi(x)$, $x \in U_T$. Задача построения интегрального оператора восстановления $\varphi(x(T)) = \langle\, k, y \,\rangle$ эквивалентна граничной задаче, которую можно интерпретировать и как задачу управления: перевести фазовую точку $v(t,\cdot) : U_t \to \mathbb{R}^1$ из нуля в $\varphi(\cdot)$ за время T выбором $k(\cdot)$. Важно, что (3) линейно по паре (k, v). Исходная операторная постановка задачи наблюдения трансформируется в исследование уравнения. Эти рассуждения останутся в силе, если допускать нелинейные $k(t,y)$ $(k, k_y \in C(Q)$,

$Q \supset \{\, (t, y(t)) \,|\, x(T) \in U_T \,\}$), считать f, g гладкими, а $\langle\, k, y \,\rangle$ — интегралом $k(t, y(t))$ от 0 до T. В правой части (3) будет $k(t, g(x))$.

Определение 1. *1. Функцию $\varphi : U_T \to \mathbb{R}^1$ назовем наблюдаемой в подмножестве $M \subseteq U_T$, если существует функционал Λ из условия $\varphi(x) = \Lambda(y(\cdot; x, T))$, $x \in M$.*

Наблюдаемость (полная) пары (f, g) эквивалентна наблюдаемости в U_T всех координатных функций $\varphi_i(x) = x_i$, $i = \overline{1, n}$. Введем обозначения: $\Phi(M)$ — множество всех наблюдаемых в M функций $\varphi : U_T \to \mathbb{R}^1$, $D_T = \{\, v(T, \cdot) : U_T \to \mathbb{R}^1 \,|\, k \in C[0, T] \,\}$ — множество достижимости из нуля за время T сопряженной системы управления (3) $(\, v(T, x) = \langle\, k, y(\cdot; x, T) \,\rangle\,)$, $\{k_i,\ i \geq 1\}$ — произвольная фиксированная полная в $L_2(0, T)$ система допустимых $k(\cdot)$, $v_i(T, \cdot)$ — соответствующий $k = k_i$ элемент D_T, $\mathcal{H}$ — символ функциональной оболочки:

$$\psi \in \mathcal{H}_M\{\psi_1, \ldots, \psi_q\} \Leftrightarrow \psi(x) = H_\psi(\psi_1(x), \ldots, \psi_q(x)),\ x \in M.$$

По построению $D_T \subset \Phi(U_T) \subseteq \Phi(M)\ \forall M \subseteq U_T$.

Теорема 1. *Для любого M с компактным замыканием в U_T можно указать такие $k_{i_1}, \ldots, k_{i_p}$, что $\Phi(M) = \mathcal{H}_M\{\, v_{i_1}(T, \cdot), \ldots, v_{i_p}(T, \cdot) \,\}$.*

Если $\widetilde{M} \subset M$, то $\Phi(\widetilde{M}) = \mathcal{H}_{\widetilde{M}}\{\ldots\}$. Когда дополнительно известно, что область U_T ограничена и решения $x(\cdot; x, T)$ $(\, x = x(T) \in \widetilde{U} \supset \operatorname{cl} U_T)$ продолжимы на $[0, T]$, то можно считать $M = U_T$. Из теоремы следует взаимно однозначное соответствие

$$\{\, v_{i_\nu}(T, x),\, \nu = \overline{1, p} \,\} = \{\langle\, k_{i_\nu}, y(\cdot; x, T) \,\rangle,\, \nu = \overline{1, p}\} \ \leftrightarrow\ y(\cdot; x, T),\ x \in M.$$

Поэтому вместо $y(\cdot)$ без потери информации об искомом $x(T)$ можно оперировать конечным набором моментов $\langle\, k, y \,\rangle$, вычисляя их в масштабе реального времени.

Без априорного ограничения $k \in \{k_i, i \geq 1\}$ результат усиливается.

Теорема 2. *Существует такое семейство наборов из $2n+1$ функций $\{\, r_i \in C[0, T],\, i = \overline{0, 2n} \,\}$, для которых $\Phi(U_T) = \mathcal{H}_{U_T}\{\, w_0, \ldots, w_{2n} \,\}$, где*

$$w_j \in D_T, \quad w_j(x) = \langle\, r_j, y(\cdot; x, T) \,\rangle, \quad x \in U_T.$$

При этом $\Phi(M) = \mathcal{H}_M\{\ldots\}\ \forall M \subseteq U_T$ и каждая r_j представима равномерно сходящимся рядом на $[0, T]$ по элементам $\{k_i,\ i \geq 1\}$.

Итак, общая форма интегрального оператора восстановления:

$$\varphi(x(T)) = H(\langle r_0, y \rangle, \ldots, \langle r_{2n}, y \rangle).$$

Доказательства основаны на результатах теории комплексных аналитических множеств [5, 6]. В частности, для справедливости теоремы 2 доказывается, что множество общих нулей функций

$$\Delta v_i(x^1, x^2) = v_i(T, x^1) - v_i(T, x^2) = \langle k_i, y(\cdot; x^1, T) - y(\cdot; x^2, T) \rangle, \ i \geq 1,$$

в $U_T \times U_T$ совпадает с множеством общих нулей

$$\Delta w_j(x^1, x^2) = w_j(x^1) - w_j(x^2), \quad (x^1, x^2) \in U_T \times U_T, \ j = \overline{0, 2n}.$$

Отсюда $\{ w_j(x), j = \overline{0, 2n} \} \leftrightarrow y(\cdot; x, T)$, $x \in U_T$, вследствие полноты $\{k_i, \, i \geq 1\}$ в $L_2(0, T)$.

Для интерпретации утверждений удобно перейти в (3) к операторной форме:

$$dV/dt = -AV(t) + Bk(t), \quad V(0) = 0, \tag{5}$$

$$V(t) = v(t, \cdot) : U_t \to \mathbb{R}^1, \ AV(t) = v_x(t, \cdot) f(\cdot), \ \dot{V}(t) = v_t(t, \cdot), \ B = g(\cdot).$$

Если нет проблем с продолжимостью: решения $x(\cdot; x, t)$ с начальными данными $(t, x) = (t_0, x_0) \in [0, T] \times \widehat{U}$ определены на $[0, t]$, то (5) — линейная система управления в $C^1(\widehat{U})$ $(C^\omega(\widehat{U}))$. Здесь предполагается, что допустимые фазовые кривые $(x(T) \in U_T, \ t \in [0, T])$ не покидают $\widehat{U} \subseteq U$. Иначе придется учитывать зависимость области определения U_t фазовой точки $V(t) = v(t, \cdot)$ (как функции x) от времени. В вычислительном отношении (3), (5) удобнее рассматривать на прямом произведении $[0, T] \times \widehat{U}$.

Получаем полную аналогию с линейным случаем, если только заменить линейную зависимость функциональной: множество наблюдаемых в $M \subseteq U_T$ "нелинейных проекций" $\varphi(x(T))$ описывается как функциональная оболочка конечного числа базисных в M элементов множества достижимости $D_T = \{V(T)\}$.

Определение 2. *2. Базисом D_T в $M \subseteq U_T$ назовем такую конечную совокупность элементов $\bar{v}_j(T, \cdot) \in D_T$, $j = \overline{1, q}$, что все $v(T, \cdot) \in D_T$ выражаются как функции базисных при $x \in M$:*

$$v(T, x) = H_v(\bar{v}_1(T, x), \ldots, \bar{v}_q(T, x)), \ x \in M.$$

Совершенно аналогично определяется базис (конечный) множества $\Phi(M)$. Базис D_T в M будет и базисом $\Phi(M)$. В теоремах 1, 2 элементы $v_{i_\nu}(T,\cdot)$, $w_j(\cdot)$ образуют базис D_T в M, U_T соответственно (и в $\widetilde{M}$ $\forall\widetilde{M}\subseteq M$, $\forall\widetilde{M}\subseteq U_T$). Когда $(f,g)=(F,G)$ наблюдаемость эквивалентна наличию в (2) $V_i(T)$ из условия $\mathcal{L}\{\,V_i(T),\, i=\overline{1,n}\,\}=D_T=\mathbb{R}^n$. Здесь и далее $\mathcal{L}$ – символ линейной оболочки. Это эквивалентно $\{V_i'(T)x,\, i=\overline{1,n}\,\}\leftrightarrow x\in U_T$ $(\mathbb{R}^n)$. Поэтому в нелинейном случае, когда "коэффициенты $V(T)$ не отделяются от x", под управляемостью в $M\subseteq U_T$ сопряженной системы (3) естественно понимать свойство $\{\,\bar v_j(T,x),\, j=\overline{1,q}\,\}\leftrightarrow x\in M$. Такое определение не зависит от выбора базиса D_T в M. Смысл: не линейная, а функциональная оболочка $\mathcal{H}_M\{\,\bar v_j(T,\cdot),\, j=\overline{1,q}\,\}$ базиса образует множество всех функций аргумента $x\in M$. Как линейное пространство D_T конечномерно лишь в вырожденном случае конечномерности $\mathcal{L}\{\,y(\cdot)\,\big|\,x(T)\in U_T\,\}$, причем тогда $\dim D_T=\dim\mathcal{L}$. Формально получаем обобщение принципа двойственности: (f,g) наблюдаема в M $\Leftrightarrow$ (3) управляема в M. При этом $x(T)\in M$ однозначно определяется по базисным моментам $\mu=\langle\, k,y\,\rangle$ из системы уравнений вида $v(T,x)=\mu$. Ограничения на управления типа $|k(t)|\le\bar k$ несущественны — по мере измерений $y(t)$ можно вычислять $\langle\,\ell k,y\,\rangle$ и затем результат поделить на ℓ.

Перейдем теперь к изучению структуры элементов множества D_T. Для $(f,g)=(F,G)$ имеем $D_T=\mathcal{L}(\mathcal{K})$, где $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ — линейная оболочка столбцов матрицы управляемости $\mathcal{K}=(G',F'G',\ldots,F'^{\,n-1}G')$. В нелинейном случае аналогом столбцов матрицы управляемости сопряженной системы служат функции

$$L_f^0 g=g,\ L_f^{i+1}g=(L_f^i g)_x f:\ (f,g)=(F,G)\Rightarrow L_f^i g(x)=GF^i x.$$

В операторных терминах (3) $L_f^i g=A^iB:U\to\mathbb{R}^1$. Если f, g в приложениях задаются элементарными функциями, то и $L_f^i g$ таковые. Но сводить задачу наблюдения к решению в области U_T системы уравнений $L_f^i g(x)=y^{(i)}(T)$, $i=\overline{1,n}$, не будем по причине вычислительной некорректности такого подхода. Вместе с тем использование $L_f^i g$ для представления элементов D_T целесообразно.

Теорема 3. *Пусть T, U_T достаточно малы. Тогда возможны конечные представления*

$$y(t;x,T)=\sum\nolimits_{i=0}^{s}\gamma_i(t,x)\,L_f^i g(x),$$

$$v(T,x)=\sum\nolimits_{i=0}^{s}\sigma_i(x)\,L_f^i g(x),\quad \sigma_i(x)=\langle\, k,\gamma_i(\cdot,x)\,\rangle,$$

$$t\in[0,T],\ x\in U_T,\ \gamma_i\in C^\omega((t',t'')\times U_T),\ (t',t'')\supset[0,T].$$

Малость U_T означает: выбираем произвольную (опорную) $\bar{x}\in U$ и считаем U_T достаточно малой окрестностью $\bar{x}$. Лишь бы по смыслу задачи соответствующие решения $x(\cdot)$ были продолжимы на $[0,T]$. Малость T при установлении наблюдаемости несущественна в силу теоремы единственности для аналитических функций: $y\big|_{[t_1,t_2]}\leftrightarrow y\big|_{[0,T]}$. При наличии у $L_f^i g$, $i=\overline{0,s}$, двух различных общих нулей в U_T пара (f,g) заведомо неполностью наблюдаема в U_T. В отличие от линейного случая коэффициенты σ_i разложения элементов D_T по $A^iB=L_f^i g$ являются функциями. В общем случае с постоянными коэффициентами возможно только бесконечное разложение

$$v(T,x)=c_0B+c_1AB+c_2A^2B+\ldots,\quad c_i=\langle\, k,(\tau-T)^i\rangle/i!\,.$$

При этом (имеем дело со степенной проблемой моментов) сами "столбцы матрицы управляемости" A^iB не принадлежат D_T, D_T зависит от $T>0$. Очевидное следствие: дифференцирование $y(\cdot)$ нельзя заменить интегральным оператором.

Теорема 4. *Если область неопределенности $U_T=\{x(T)\}$ достаточно мала, можно выделить такие $k_{i_1},\ldots,k_{i_q}$, что:*

1) *элементы $v_{i_\nu}(T,x)=\langle\, k_{i_\nu},y\,\rangle$ образуют базис D_T $(\Phi(U_T))$;*
2) *базис D_T образуют и $\tilde{v}_{i_\nu}(T,x)=\langle\, k_{i_\nu}+\xi_{i_\nu},y\,\rangle$ при достаточно малых возмущениях $\|\xi_{i_\nu}\|_{L_1}<\delta$ $(\nu=\overline{1,q},\ x\in U_T)$.*

Когда (f,g) наблюдаема в U_T, обеспечивается определенная устойчивость восстановления $x(T)$ к малым вариациям базисных $k(\cdot)$.

Предположим теперь, что движение подвержено неконтролируемым возмущениям $\xi(t)$:

$$dx/dt=f(x)+\xi(t)h(x),\quad |\xi(t)|\le\bar{\xi}.$$

Пусть в (3) дополнительно $v(T,x)=\varphi(x)$, $x\in U_T$, "направление возмущения" $h:U\to\mathbb{R}^n$ известно и выполнено

$$v_x(t,x)h(x)=0,\quad t\in[0,T],\ x\in\widehat{U}$$

(относительно $\widehat{U}$ см. после (5)). Тогда для любого возмущенного решения с $x(T) \in U_T$ и фазовой кривой в $\widehat{U}$ на $[0, T]$ будет по-прежнему $\varphi(x(T)) = \langle k, y \rangle$. В операторных терминах получаем линейное фазовое ограничение вида $P(t)V(t) = 0$ $(v_x(t, \cdot)\, h(\cdot) = 0)$. Для такой идеальной ($k \neq k(\xi(\cdot))$) в направлении h наблюдаемости нужно управлять не только конечным состоянием $v(T, \cdot)$, но и градиентом $v_x(t, \cdot)$. Обратно, если k, φ фиксированы, то условие $v_x h \approx 0$ дает описание направлений h, возмущения вдоль которых слабо влияют на точность интегрального оператора восстановления $\varphi(x(T)) \approx \langle k, y \rangle$.

Теоремы 1, 2 верны и для нестационарных $f(t, x)$, $g(t, x)$. Достаточно аналитичности $\langle k, y \rangle$ по данным Коши $x = x(T) \in U_T$. Существенных изменений в теоремах 1–4 не потребуется при $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $m > 1$, $k \in L_2$. Но главное: если φ фиксирована, то класс линейных операторов $\langle k, y \rangle$ может оказаться слишком узким и следует использовать нелинейные весовые функции $k(t, y)$. При решении задачи прогнозирования, когда измерения $y(\cdot)$ известны только на отрезке времени $[0, T_*]$, $T_* < T$, следует допустимые $k(\cdot, \cdot)$ подвергать усечению $k(t, \cdot) = 0$, $t > T_*$. Возможен и обратный путь: выбираем $k(\cdot, \cdot)$ и в силу (3) (справа $k(t, g(t, x))$) находим $v(T, \cdot)$ — ту компоненту $\varphi(x(T))$, которая восстанавливается интегрированием $k(t, y(t))$ на отрезке времени $[0, T]$.

В заключение кратко о схемах приближений. Для (3) можно применять технику степенных рядов. В нестационарном случае считаем $f = f(t, x)$, $g = g(t, x)$, $k = k(t, g(t, x))$. Пусть $0 \in U_T$, $f(t, 0) = 0$, $g(t, 0) = 0$, $k(t, 0) = 0$. Приравнивая слева и справа коэффициенты однородных полиномов одинаковой степени по x, последовательно получаем линейные конечномерные задачи управления. Управления — коэффициенты разложения $k(t, y)$ по степеням y. В линейном приближении имеем (2). Для лексикографически упорядоченных коэффициентов разложения $v(t, x)$ в степенной ряд по x получается аналогичная линейному случаю система вида (2). Только вектор $V(t)$ и матрицы системы F', G' будут бесконечномерными, $F'(t)$ — нижняя блочно-треугольная. Можно ограничиться конечной подсистемой.

Вместо степенных можно использовать и другие базисные функции, ориентируясь на специфику нелинейности f, g. Аналитичность здесь необязательна. Выберем базисные $\psi_1(x), \ldots, \psi_N(x)$, $x \in \widehat{U}$. Подбираем такие функции h_j, $j = \overline{1, r}$, чтобы $h_j(t, g(t, x))$ достаточно точно приближались линейными разложениями по базису $\psi_\nu(x)$ с коэффициентами $b_{\nu j}(t)$. Аналогично приближаем

$$\varphi(x) \approx d_1\psi_1(x) + \ldots + d_N\psi_N(x),$$

$$\psi_{\nu x}(x)f(t,x) \approx a_{1\nu}(t)\psi_1(x) + \ldots + a_{N\nu}(t)\psi_N(x).$$

Ищем k, v в форме линейных комбинаций $h_j(t,y)$ и $\psi_\nu(x)$ соответственно с коэффициентами $k_j(t)$, $v_\nu(t)$. После подстановки в сопряженную систему и приравнивания коэффициентов при $\psi_\nu(x)$ получаем задачу $V(T) \approx d = (d_1,\ldots,d_N)'$ для N-мерной линейной системы вида (5) $(V = \{v_j\},\ k = \{k_j\},\ A = \{a_{ij}\},\ B = \{b_{ij}\})$. В итоге

$$\varphi(x(T)) \approx \int_0^T \sum\nolimits_{j=1}^r k_j(t)h_j(t,y(t))\,dt.$$

На проблему можно посмотреть и с позиций общей теории приближенного решения линейных граничных задач. Возьмем любую гладкую функцию $v_0(t,x)$, удовлетворяющую граничным условиям $v_0(0,x) = 0$, $v_0(T,x) = \varphi(x)$, $x \in \widehat{U}$ $(v_0 = t\varphi(x)/T)$. Определим

$$v = v_0(t,x) + \alpha_1 v_1(t,x) + \ldots + \alpha_N v_N(t,x), \quad v_i(0,x) = v_i(T,x) = 0$$

(в частности, $v_i = t(t-T)\theta_i(t)\psi_i(x)$). Аналогичным образом:

$$k(t,y) = \beta_1 k_1(t,y) + \ldots + \beta_M k_M(t,y).$$

Подставляя функции $v(t,x)$, $k(t,y)$ в сопряженное уравнение, получаем невязку $R(t,x;\alpha_1,\ldots,\beta_M)$. Ее нужно минимизировать по параметрам α_i, β_j. Линейность по (k,v) позволяет применять классические проекционные методы.

Обычно измеряется часть фазовых координат: $y_i(t) = x_i(t)$, $i = \overline{1,m}$. Формально этого можно добиться заменой или добавлением переменных. В слабых предположениях гладкости в сопряженной системе справа $k(t,x_1,\ldots,x_m)$ и можно перейти к задаче $\mathcal{D}v = 0$, $v(0,\cdot) = 0$, $v(T,\cdot) = \varphi$ (в частности, $\varphi = x_j$, $j \in \{m+1,\ldots,n\}$). Здесь $\mathcal{D}$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка $(v_t + v_x f)_{x_i}$, $i = m+1,\ldots,n$. В качестве весовой функции $k(t,y_1,\ldots,y_m)$ в интегральном операторе наблюдения будет $L_f v$ (выражение в скобках).

Подчеркнем, что исходная задача — нелинейная обратная, а в итоге пришли к прямым методам решения линейного уравнения, хотя и распределенного (следствие построения операций наблюдения для области фазового пространства).

Résumé

In function dependence terms a description of observable functions in nonlinear analytical dynamical systems is obtained. An analogue of the duality principle in linear systems is developed for the nonlinear case.

Литература

[1] Красовский Н. Н. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

[2] Кирин Н. Е. *К теории методов оценивания в динамических системах*// Вопросы механики и процессов управления. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. Вып. 8. С. 118–125.

[3] Кирин Н. Е., Исраилов И. *Оценочные системы в задачах теории управления.* Ташкент: Фан, 1990.

[4] Заика Ю. В. *Задача наблюдаемости нелинейных систем*// Кирин Н. Е. Методы оценивания и управления в динамических системах. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1993. С. 85–143.

[5] Эрве М. *Функции многих комплексных переменных.* М.: Мир, 1965.

[6] Чирка Е. М. *Комплексные аналитические множества.* М.: Наука, 1985.

Петрозавозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33