Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 6, 1999

УДК 513.83

ЧИСЛО ЭБЕРЛЕЙНА И КЛАССИЧЕСКИЕ КАРДИНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Е. Н. Степанова

В работе сравниваются новые кардинальные характеристики компактов — число Эберлейна и число Корсона с классическими инвариантами — весом, плотностью, числом Суслина и теснотой.

В работе [4] для любого компакта F были определены число Эберлейна $eber(F)$ и число Корсона $cor(F)$:

$eber(F) = \aleph_0 \cdot \min\{\tau :$ в F существует T_0-разделяющее семейство $\gamma = \{\gamma_\alpha : \alpha < \tau\}$ коноль-множеств, причем каждое γ_α точечно конечно$\}$,

$cor(X) = \aleph_0 \cdot \min\{\tau : X$ гомеоморфно вкладывается в $\Sigma_\tau(A)$ для некоторого множества $A\}$.

Напомним, что семейство γ подмножеств пространства X называют T_0-разделяющим, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдется множество $U \in \gamma$, содержащее ровно одну из них. Для множества A и кардинала τ

$$\Sigma_\tau(A) = \{x \in \mathbb{R}^{|A|} : |\{\alpha \in A : x_\alpha \neq 0\}| \leqslant \tau\}.$$

По теореме Розенталя [6] компакт является компактом Эберлейна в том и только в том случае, если в нем существует T_0-разделяющее σ-точечно конечное семейство коноль-множеств, поэтому компакты F с $eber(F) = \aleph_0$ — это в точности компакты Эберлейна. Компакт называется компактом Корсона, если он вкладывается в Σ-произведение прямых [1, с. 34], поэтому компакты F с $cor(F) = \aleph_0$ — это в точности компакты Корсона. Таким образом, были получены две классификации компактов, одна из которых начинается с компактов Эберлейна, а другая — с компактов Корсона.

В данной работе рассмотрим связь предложенных характеристик с классическими кардинальными инвариантами.

Неравенство

$$t(F) \leqslant cor(F) \leqslant eber(F) \leqslant w(F),$$

которое имеет место для всякого компакта F, было получено в [4]. Здесь $t(F)$ и $w(F)$ — это соответственно теснота и вес F.

Обратимся к числу Суслина.

Через $C_p(X, Y)$ обозначают пространство всех непрерывных отображений из X в Y, наделенное топологией поточечной сходимости, через $C_p(X)$ — пространство $C_p(X, \mathbb{R})$.

Сетевой вес $nw(X)$ определяется как минимум мощностей сетей пространства X.

Пусть $\tau \geqslant \aleph_0$. Пространство X называется *τ-монолитным*, если из $A \subset X$ и $|A| \leqslant \tau$ следует, что $nw([A]) \leqslant \tau$. *Монолитным* называется пространство, τ-монолитное при всех $\tau \geqslant \aleph_0$ [2, с. 1042]. Здесь $[A]$ — замыкание множества A.

Теорема Розенталя [6]. *Пусть X — компакт и F — компактное подпространство пространства $C_p(X)$. Тогда если число Суслина пространства F счетно, то F — метризуемый компакт.*

Обобщением этого результата является

Теорема 1. *Пусть F – компактное подпространство пространства $C_p(X, \mathbb{R}^\tau)$ для некоторого компакта X. Тогда*

$$w(F) \leqslant c(F) \cdot \tau.$$

Доказательство. I. Пусть $\tau = 1$.

Случай $c(F) = \lambda = \aleph_0$ покрывается приведенным результатом Розенталя.

Пусть $c(F) = \lambda > \aleph_0$.

Если X — компакт и компакт $F \subset C_p(X)$, то в F найдется всюду плотное множество M типа G_δ такое, что топология, порожденная метрикой равномерной сходимости, совпадает с топологией, индуцированной на F из $C_p(X)$, во всех точках множества M [1, с. 26], поэтому $c(M) = c(F) = \lambda$ [5, с. 184].

Пространство M метризуемо и $c(M) = \lambda$, значит, в M (а следовательно, и в F) существует всюду плотное множество A мощности, не превосходящей λ [5, с. 379].

X — компакт, следовательно, пространство $C_p(X)$ — монолитно [1, с. 22]. Это означает: $nw(F) = nw([A]) \leqslant |A| \leqslant \lambda$. Заметим, что для любого компакта F сетевой вес совпадает с его весом [5, с. 202]: $nw(F) = w(F)$. Значит, $w(F) \leqslant \lambda = cF$.

С другой стороны, $c(F) \leqslant w(F)$ для любого топологического пространства F.

Таким образом, можем сделать заключение: если X — компакт, то для компакта $F \subset C_p(X)$

$$w(F) = c(F).$$

II. $\tau > 1$. $F \subset (C_p(X))^\tau$. Пусть $F_\alpha = \pi_\alpha(F)$ — образ при естественной проекции, $\alpha < \tau$.

По пункту I $w(F_\alpha) = c(F_\alpha) = \lambda_\alpha$ для всех $\alpha < \tau$. Положим $\lambda = \sup\{\lambda_\alpha : \alpha < \tau\}$. При этом получаем оценку:

$$w(F) \leqslant \max\{\tau, \sup w(F_\alpha) : \alpha < \tau\} = \max\{\tau, \lambda\}.$$

С другой стороны, $c(F) \geqslant \lambda$. Отсюда имеем:

$$c(F) \cdot \tau \geqslant \lambda \cdot \tau \geqslant \max\{\tau, \lambda\} \geqslant w(F).$$

Таким образом, $w(F) \leqslant c(F) \cdot \tau$. □

Следствие. *1. Для любого компакта X*

$$w(X) = c(X) \cdot eber(X).$$

Доказательство. Пусть $eber(X) = \tau$. Согласно теореме 1 из [4], существует гомеоморфное вложение X в $C_p(Y, \mathbb{R}^\tau)$ для некоторого компакта Y. При этом из нашей теоремы непосредственно вытекает, что

$$w(X) \leqslant c(X) \cdot \tau = c(X) \cdot eber(X). \tag{1}$$

С другой стороны, для любого топологического пространства X верно неравенство $w(X) \geqslant c(X)$ [5, с. 103]; кроме того, для любого компакта X имеет место оценка: $w(X) \geqslant eber(X)$. Очевидно, это означает:

$$w(X) \geqslant c(X) \cdot eber(X). \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), получаем нужное равенство. □

Следствие. 2. *Для любого компакта X число Суслина пространства X равно точной верхней грани чисел Суслина компактов, лежащих в $C_p(X)$.*

Доказательство. Согласно теореме, для компактного подпространства F пространства $C_p(X)$ вес равен числу Суслина: $w(F) = c(F)$. Остается воспользоваться теоремой Архангельского [1, с. 28]: для любого компакта X число Суслина пространства X равно точной верхней грани весов компактов, лежащих в $C_p(X)$. □

Сравним теперь $c(X)$ с $eber(X)$ и $cor(X)$.

Определение [5, с. 186]. *Наименьший кардинал $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, такой, что каждое семейство мощности $> \mathfrak{m}$, состоящее из непустых открытых подмножеств пространства X, содержит подсемейство мощности $> \mathfrak{m}$ с непустым пересечением, называется X числом Шанина пространства X и обозначается через $\check{s}(X)$.*

Предложение 1. *Пусть $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, где пространство X_α — компакт с $\check{s}(X_\alpha) \leqslant \lambda$ для некоторого регулярного кардинала λ и для любого $\alpha \in A$, $|A| = \tau > \lambda$. Тогда $c(X) < cor(X)$.*

Доказательство. Поскольку $\check{s}(X_\alpha) \leqslant \lambda$ для любого $\alpha \in A$, то $\check{s}(\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha) \leqslant \lambda$ [5, с. 186].

В работе [4] для произведения компактов $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ было доказано:

$$\begin{aligned} &1)\ eber(X) = |A| \cdot sup\{eber(X_\alpha) : \alpha \in A\}, \\ &2)\ cor(X) = |A| \cdot sup\{cor(X_\alpha) : \alpha \in A\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Поэтому в нашем случае:

$$\begin{aligned} &1)\ eber(X) = \tau \cdot sup\{eber(X_\alpha) : \alpha \in A\} \geqslant \tau, \\ &2)\ cor(X) = \tau \cdot sup\{cor(X_\alpha) : \alpha \in A\} \geqslant \tau. \end{aligned}$$

Так как для любого топологического пространства X имеет место неравенство $c(x) \leqslant \check{s}(X)$ [5, с. 186], то окончательно получаем:

$$c(X) \leqslant \check{s}(X) < cor(X) \leqslant (X). \quad \square$$

Подобное соотношение получим и для произведения диадических компактов.

Предложение 2. *Пусть* $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, *где* X_α — *диадический компакт для любого* $\alpha \in A$, $|A| = \tau > \aleph_0$. *Тогда* $c(x) < cor(X) = eber(X)$.

Доказательство. Произведение X также является диадическим компактом, значит, $c(X) = \aleph_0$ и $w(X) = t(X)$ [5, с. 346], то есть $t(X) = cor(X) = eber(X) = w(X)$.

Согласно равенствам (3), $cor(X) = eber(X) \geqslant \tau$. В итоге: $c(x) < cor(X) = eber(X)$. □

Теперь рассмотрим ситуацию, в которой имеет место обратное неравенство.

Предложение 3. *Пусть* X — *компакт,* F — *компактное подпространство пространства* $C_p(X, \mathbb{R}^\lambda)$, *где* λ *не более чем счетно. Тогда* $c(F) \leqslant eber(F) = cor(F)$. *Если число Суслина компакта* F *несчетно, то* $c(F) > eber(F) = cor(F)$.

Доказательство. Из включения $F \subset C_p(X, \mathbb{R}^\lambda)$ и определения числа Эберлейна получаем, что $eber(F) = \max\{\lambda, \aleph_0\} = \aleph_0$ [4]. Поскольку $\aleph_0 \leqslant cor(F) \leqslant eber(F)$ для любого компакта F, то $cor(F) = eber(F)$.

Из пункта I доказанной выше теоремы 1 следует, что $w(F) = c(F)$, но $eber(F) \leqslant w(F)$.

Значит, $c(F) \geqslant eber(F) = cor(F)$.

Если же $c(F) > \aleph_0$, то имеет место строгое неравенство: $c(F) > eber(F) = cor(F)$. □

Таким образом, существуют компакты, для которых выполнено равенство $c(F) < eber(F)$, и компакты, для которых $c(F) > eber(F)$.

Аналогично обстоит дело и с плотностью компактов. Неравенство $d(F) > eber(F) = cor(F)$ имеет место в условиях предложения 3 в предположении $c(F) > \aleph_0$. Достаточно учесть, что $d(F) \geqslant c(F)$ для любого топологического пространства.

Предложение 4. *Пусть* $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in M\}$, *где* X_α — *компакты,* $d(X_\alpha) \leqslant \tau$ *для любого* $\alpha \in M$ *и* $|M| = 2^\tau > \aleph_0$. *Тогда* $d(x) < cor(X) \leqslant eber(X)$.

Доказательство. Если $d(X_\alpha) \leqslant \tau$ для любого $\alpha \in M$ и $|M| = 2^\tau > \aleph_0$, то $d(\prod_{\alpha \in M} X_\alpha) \leqslant \tau$ [3, с. 103].

Оценим число Корсона:

$$cor(X) = |M| \cdot sup\{cor(X_\alpha) : \alpha \in M\} \geqslant 2^\tau.$$

Поскольку $\tau < 2^\tau$, то $d(x) < cor(X) \leqslant eber(X)$. $\square$

Résumé

In the report new characteristics of compacta are compared with some classical ones, namely weight, density, Souslin's number and tightness.

Литература

[1] Архангельский А. В. *Пространства функций в топологии поточечной сходимости и компакты* // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 11–50.

[2] Архангельский А. В. *Факторизационные теоремы и пространства функций: устойчивость и монолитность* // ДАН. 1982. 265. № 5. С. 1039–1043.

[3] Архангельский А. В., Пономарев В. И. *Основы общей топологии в задачах и упражнениях.* М.: Наука, 1974.

[4] Степанова Е. Н. *Классификация бикомпактов, начинающаяся с бикомпактов Эберлейна* // Вестник МГУ. Серия математика, механика. 1989. № 6. С. 65–67.

[5] Энгелькинг Р. *Общая топология.* М.: Мир, 1986.

[6] Rosental H. P. *The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces* // Composito Math. 1974. V. 28. P. 88–111.

Петрозавозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33