Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 6, 1999

УДК 515.12

ПРИМЕР СЧЕТНО КОМПАКТНОГО СЕПАРАБЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА, НЕ ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ БИКОМПАКТОМ

Н. С. Стреколовская

В работе в предположении СН строится пример топологического пространства с первой аксиомой счетности со свойствами, сформулированными в заглавии.

В работе [1] сформулирован следующий вопрос о счетно компактных пространствах: совместимо ли с аксиоматикой ZFC утверждение — всякое сепарабельное счетно компактное пространство с первой аксиомой счетности является бикомпактом?

В настоящей статье доказана следующая теорема.

Теорема. *В предположении континуум-гипотезы существует сепарабельное счетно компактное пространство с первой аксиомой счетности, не являющееся бикомпактом.*

Доказательство. Как обычно, через $W(\omega_1)$ обозначаем пространство трансфинитов, меньших первого несчетного ординала ω_1 в стандартной топологии. Пусть h — некоторое непрерывное отображение упорядоченной суммы отрезка $I = [0,1]$ числовой прямой $\mathbb{R}$ и пространства трансфинитов $W(\omega_1)$ на полуинтервал $[-1,1)$, монотонно возрастающее на отрезке I.

Обозначим через f отображение полуинтервала $(0,1]$ прямой $\mathbb{R}$ в отрезок $[-1,1]$, задаваемое формулой $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, и через X — объединение двух множеств $I \times I$ и $\{0\} \times W(\omega_1)$. Фундаментальная система окрестностей в X состоит из множеств двух видов. Если точка

$p \in I \times I$ и имеет координаты (x, y), $x \neq 0$, то ее базу окрестностей образуют открытые прямоугольники квадрата $I \times I$ со сторонами, параллельными осям координат, содержащие точку p.

Если точка $p \in X$, $p = (0, x)$, то базу окрестностей образуют множества вида

$$O(x, V, W) = (\{0\} \times V) \cup \{f^{-1}W \times I\} \cap U,$$

где W — окрестность точки $h(p)$ в полуинтервале $[0, 1)$ числовой прямой $\mathbb{R}$, V — окрестность точки x в подпространстве $X_1 = \{0\} \times \times (I \cup W(\omega_1))$, где $I \cup W(\omega_1)$ — упорядоченная сумма, множество $U = [0, d) \times I$, где $[0, d)$ — полуинтервал.

Очевидно пространство X хаусдорфово. Докажем, что пространство X сепарабельно. Рассмотрим множество точек Q в множестве $I \times I$, у которых обе координаты рациональны. Очевидно, $[Q] = X$, так как любая окрестность точек вида $(0, x)$ пересекается с множеством Q из задания топологии. И, наконец, произвольная окрестность точки вида $(y, x), y \neq 0$ очевидно содержит точки из множества Q. Сепарабельность пространства X установлена. Пространство X счетно компактно. В самом деле, если счетная последовательность x_k содержит подпоследовательность, все члены которой имеют первую координату, равную нулю, то она имеет предельную точку, поскольку подпространство X_1, $X_1 \subseteq X$, состоящее из точек с первой нулевой координатой, счетно компактно.

Если последовательность точек имеет подпоследовательность, лежащую в множестве $I \times I$, то возможны два случая: либо первые координаты этой подпоследовательности имеют предельную точку, равную нулю, либо отличную от нуля. В первом случае предельная точка с нулевой первой координатой существует, поскольку существует предельная точка вторых координат проекций этой подпоследовательности на график функции f (вдоль прямых, параллельных оси ординат). Во втором случае подпоследовательность может быть заключена в бикомпакт $B = [a, 1] \times [0, 1]$, где число $a > 0$, и, следовательно, имеет предельную точку в бикомпакте B.

Итак, пространство X счетно компактно, с первой аксиомой счетности, сепарабельно и не является бикомпактом. Теорема доказана.

Résumé

Assuming CH we construct a separable first countable countably compact non-compact space.

Литература

[1] Архангельский А. В., Федорчук В. В. *Об уплотнениях счетно компактных пространств*// Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. В. 4. С. 871–879

[2] Пасынков Б. А., Александров П. С. *Введение в теорию размерности.* М.: Наука, 1973.

Петрозавозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33