Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 7, 2000

УДК 515.12

H-СТРУКТУРЫ И e-КОМПАКТИФИКАЦИИ

К. В. Матюшичев

Основным предметом изучения в настоящей работе являются H-структуры В. В. Федорчука. С помощью дополнительных аксиом на пространстве X определяются такие H-структуры, что соответствующие им полурегулярные H-замкнутые расширения X являются его e-компактификациями. Попутно устанавливается несколько характеристических свойств локально H-замкнутых пространств.

Введение

Всюду ниже рассматриваются только хаусдорфовы топологические пространства.

В [8] С. Хехлер ввел класс e-компактифицируемых пространств, которые определяются следующим образом. Пространство X называется e-компактифицируемым, если оно обладает таким расширением Y, что из любого открытого покрытия пространства Y можно выделить конечное подсемейство, покрывающее X.

Известно ([7], см. также А. В. Иванов [1]), что расширение Y пространства X является e-компактификацией X в том и только в том случае, если Y H-замкнуто и X сильно регулярно в Y, то есть для любой точки $y \in Y$ подпространство $X \cup \{y\}$ пространства Y регулярно.

Таким образом, всякая e-компактификация Y данного e-компактифицируемого пространства X является H-замкнутым расширением X и возникает естественная задача выделения e-компактификаций пространства X из множества всех H-замкнутых расширений пространства X.

В настоящей работе эта задача решается (теорема 2) для множества всех полурегулярных H-замкнутых расширений полурегулярного пространства X, получившего описание в работе [6] В. В. Федорчука на языке H-структур. В теореме 2 формулируется аксиома I_e, которой удовлетворяют те и только те H-структуры, которым соответствуют полурегулярные e-компактификации пространства X (ими можно ограничиться — см. А. В. Иванов [1]). Доказанные в настоящей статье предложения позволяют также дать на языке H-структур описание класса полурегулярных локально H-замкнутых пространств (теорема 3).

Содержание работы делится на две части: вспомогательный § 1, содержащий описание полурегулярных H-замкнутых расширений пространства X с помощью разбиений гиперабсолюта BX (см. также [3]) и теорему 1, содержащую некоторые характеристики локально H-замкнутых пространств с помощью их гиперабсолютов, и § 2, содержащий все полученные в данной работе результаты об H-структурах, а также теоремы 2 и 3.

§ 1. Разбиение гиперабсолюта на замкнутые подмножества

Напомним, что гиперабсолютом BX пространства X называется множество ультрафильтров в семействе открытых подмножеств пространства X или, для краткости, просто ультрафильтров[1], топологизированное определением открытой базы, состоящей из множеств вида $O_U = \{\xi \in BX : U \in \xi\}$, U — произвольное открытое подмножество пространства X.

Абсолютом aX пространства X называется множество таких ультрафильтров ξ, что $\cap\{[U]_X : U \in \xi\} \neq \emptyset$. Легко видеть, что последнее пересечение одноточечно и равно $\{x\}$ в том и только в том случае, если ξ содержит все окрестности точки x.

На протяжении всей работы употребляется обозначение

$$\bar{x} = \{\xi \in BX : \cap\{[U]_X : U \in \xi\} = \{x\}\} = \cap\{O_U : U \text{ — } \textit{окрестность } x \textit{ в } X\}.$$

В работе С. Илиадиса и С. В. Фомина [2] доказаны все необходимые для дальнейшего свойства BX, например, хаусдорфовость, ком-

[1] Других ультрафильтров в нашей работе не встретится.

пактность, экстремальная несвязность, плотность aX в BX, замкнутость множества O_U и т. п. Напомним еще, что для отображения $f\colon X \to Y$ и множества P принято обозначение $f^{\#}(P) = Y \setminus f(X \setminus P) = \{y \in Y\colon f^{-1}(y) \subset P\}$ (словами: малый образ множества P) и что система $\xi = \{U\}$ открытых подмножеств пространства X называется регулярной, если для любого $U \in \xi$ найдется $V \in \xi$ со свойством $[V]_X \subset U$.

Предложение 1. *Пусть R — разбиение BX на непустые замкнутые подмножества такое, что $R \supset \{\bar{x}\colon x \in X\}$. Тогда фактор-множество BX/R, наделенное топологией с базой $\pi^{\#}$, где $\pi\colon BX \to BX/R$ — естественная проекция, а W — произвольное открытое подмножество пространства BX, будет полурегулярным H-замкнутым расширением пространства X, если само X полурегулярно.*

Доказательство. Указанная топология на BX/R есть топология малых образов открытых множеств В. В. Федорчука, введенная в [5], и из предложений, доказанных там же, легко следует требуемое. □

Примем следующее соглашение: буквой π (с возможными индексами) будет всегда обозначаться естественная проекция множества на свое фактор-множество.

Следующее легко проверяемое предложение обращает предложение 1.

Предложение 2. *Всякое полурегулярное H-замкнутое расширение Y пространства X может быть получено как пространство BX/R, где R — разбиение BX на непустые замкнутые множества, $R \supset \{\bar{x}\colon x \in X\}$, и множества вида $\pi^{\#}(W)$, $\pi\colon BX \to BX/R$, W открыто в BX, образуют базу пространства BX/R.*

Напомним, что булевой алгеброй канонически открытых подмножеств пространства X называется множество всех таких подмножеств со следующими операциями $G * H = G \cup H$, $G + H = \langle [G \cup H]_X \rangle_X$, $-G = X \setminus [G]_X$. Обозначается эта алгебра символом $\mathfrak{A}(X)$. В силу экстремальной несвязности и компактности BX алгебра $\mathfrak{A}(BX)$ содержит все множества O_U, U открыто в X, и только их. Кроме того, в алгебре $\mathfrak{A}(BX)$ сложение совпадает с обычным теоретико-множественным объединением, а переход к обратному элементу — со взятием обычного теоретико-множественного дополнения. Отображение $O\colon \mathfrak{A}(X) \to \mathfrak{A}(BX)$, определяемое по правилу $O(G) = O_G$, как легко видеть, является изоморфизмом. Так как проекция π в предложении 1 θ-непрерывна, неприводима и замкнута, то отображение $\pi^{\#}\colon \mathfrak{A}(BX) \to \mathfrak{A}(BX/R)$, ставящее в соответствие множеству O_U множество $\pi^{\#}(O_U)$, является изоморфизмом (см. [5]). Композиция этих двух изоморфизмов есть не что иное, как изоморфизм $M\colon \mathfrak{A}(X) \to \mathfrak{A}(BX/R)^2$.

Два расширения Y_1 и Y_2 пространства X считаются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $f\colon Y_1 \to Y_2$, тождественный на X. Заметим, что эквивалентные H-замкнутые расширения пространства X индуцируют одно и то же разбиение BX; если разбиения R_1 и R_2 (такие, как в предложении 1) различны, то расширения BX/R_1 и BX/R_2 неэквивалентны. Мы не будем различать эквивалентные расширения. Отметим также, что при отождествлении расширений пространства X условие тождественности на X весьма существенно: просто гомеоморфные расширения (даже если гомеоморфизм переводит X в X) могут давать различные разбиения гиперабсолюта. Каждый раз, когда пространство X отождествляется с некоторым другим, гомеоморфизм, осуществляющий это отождествление, считается фиксированным раз и навсегда (это касается и гомеоморфизма g из предложения 1).

С учетом сказанного ясно, что предложения 1 и 2 показывают, что под частично упорядоченным множеством полурегулярных H-замкнутых расширений данного полурегулярного пространства X можно понимать множество всех разбиений R гиперабсолюта BX на непустые замкнутые множества, содержащих $\bar{x}$ для любого $x \in X$. Порядок в этом множестве, обозначаемом в дальнейшем SX, определяется естественным образом: $R_1 \geq R_2$, если R_1 вписано в R_2. Любое непустое подмножество ч. у. множества SX имеет точную верхнюю грань: если $\{R_\alpha\}$ — такое подмножество, то семейство R, состоящее из множеств $p(\xi) = \cup\{p_\alpha\colon p_a l \in R_\alpha,\ \xi \in p_\alpha\}$, взятых по всем $\xi \in BX$, будет требуемым разбиением гиперабсолюта BX. В частности, в SX имеется наибольший элемент R_s, который состоит из всех $\bar{x},\ x \in X$, и всех $\xi \in BX \setminus aX$. Соответствующее полурегулярное H-замкнутое расширение $sX = BX/R_s$ пространства X является полурегуляризацией расширений σX и τX (см. [2]), но в общем случае не совпадает с ними. Для произвольного разбиения $R_0 \in SX$ введем также обозначения $SX_{\leq}(R_0) = \{R \in SX\colon R \leq R_0\}$. Покажем, как пространства

[2] S — semiregular.

B/RX, $R \in SX_{\leq}(R_0)$ могут быть получены из BX/R_0.

Определение 1. *Подмножество F пространства X назовем $\varkappa$-компактным в X, если из любой системы $\{G_\alpha\}$ канонически открытых в X множеств, покрывающей F, можно выделить такую конечную подсистему $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$, что $F \subset \sum_{i=1}^n G_{\alpha_i}$ (сумма понимается в смысле операции сложения в алгебре $\mathfrak{A}(X)$).*

Предложение 3. *Пусть $R \in SX$. Множество $F \subset BX/R$ $\varkappa$-компактно в BX/R в том и только в том случае, если $\pi^{-1}(F)$ компактно в BX.*

Предложение 4. *Пусть $R_0 \in SX$ и r — разбиение пространства BX/R_0 на непустые $\varkappa$-компактные в нем множества, все нетривиальные элементы которого лежат в наросте $(BX/R_0) \setminus X$. На фактор-множестве $(BX/R_0)/r$ введем топологию заданием базы, состоящей из множеств $\pi_0^{\#}(\gamma)$, где $\gamma \in \mathfrak{A}(BX/R_0)$, а $\pi_0\colon BX/R_0 \to (BX/R_0)/r$ будет полурегулярным H-замкнутым расширением пространства X, совпадающим с некоторым расширением BX/R, $R \leq R_0$. Более того, так может быть получено любое расширение BX/R, $R \leq R_0$.*

Оба предложения непосредственно следуют из определений.

По поводу условий предложения 4 заметим, что в наросте полурегулярного H-замкнутого расширения можно встретить $\varkappa$-компактные в этом расширении, но не компактные подмножества, и что легкое видоизменение в определении базы топологии фактор-множества (γ предполагается обязательно канонически открытым, а не просто открытым, как это было в предложении 1) существенно — произвольные открытые множества использовать нельзя.

Выше было показано, что любое непустое подмножество ч. у. множества SX имеет точную верхнюю грань. Вопрос о существовании у любого непустого подмножества точной нижней грани решается в случае H-замкнутых расширений хаусдорфовых пространств точно так же, как и в случае компактификаций вполне регулярных пространств, а именно любое непустое подмножество ч. у. множества SX имеет точную нижнюю грань в том и только в том случае, если SX обладает наименьшим элементом. Следующая ниже теорема 1 устанавливает несколько равносильных этому условий.

Определение 2. *Пространство X назовем локально H-замкнутым,* *если любая его точка обладает окрестностью, замыкание которой H-замкнуто (как пространство с индуцированной из X топологией).*

Теорема 1. *Пусть X не H-замкнутое полурегулярное пространство. Следующие условия равносильны:*

(i) *пространство X является локально H-замкнутым;*
(ii) *множество $BX \setminus aX$ замкнуто;*
(iii) *ч. у. множество SX обладает наименьшим элементом;*
(iv) *пространство X обладает полурегулярным H-замкнутым расширением с одноточечным наростом;*
(v) *найдется полурегулярное H-замкнутое расширение Y пространства X, нарост $Y \setminus X$ которого $\varkappa$-компактен в Y;*
(vi) *для любого полурегулярного H-замкнутого расширения Y пространства X нарост $Y \setminus X$ $\varkappa$-компактен в Y;*
(vii) *абсолют aX пространства X локально компактен.*

Утверждение теоремы следует из определений.

§ 2. θ-близости и H-структуры

2.1. Основные определения и свойства

Напомним некоторые определения.

Бинарное отношение δ на множестве всех подмножеств топологического пространства X называется θ-близостью на этом пространстве, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

I. $A\delta B = B\delta A$;
II. $A\delta B_i,\ i = 1,2 \iff A\delta(B_1 \cup B_2)$;
III. $\emptyset \delta X$;
IV. $\{x\}\delta\{y\} \iff x = y$;
V. $A\delta B \Rightarrow$ существует такое канонически открытое множество G, содержащее множество A, что $A\delta(X \setminus [G])$, $G\delta B$;
VI. Если точку x и множество A можно заключить в непересекающиеся окрестности, то $\{x\}\delta A$.

Следующие далее определения суть лишь легкое видоизменение (без изменения объема понятий) определений из работы В. В. Федорчука [6].

Пусть η — некоторое семейство θ-близостей на пространстве X. Открытое множество $G \subset X$ назовем η-окрестностью ультрафильтра ξ, если для любой θ-близости $\delta \in \eta$ найдется такое $U \in \xi$, что $U\delta(X \setminus [G])$ (словами: U δ-подчинено G).

Понятно, что ультрафильтр содержит всякую свою η-окрестность. Если η состоит из одной θ-близости, то говорят о $\{\delta\}$-окрестностях.

Семейство θ-близостей η называется H-структурой на пространстве X, если выполнены следующие аксиомы:

I_H. Если ультрафильтры ξ_1 и ξ_2 имеют непересекающиеся η-окрестности, то для любой точки $x \in X$ существуют такие η-окрестности G_i ультрафильтров ξ, $i = 1, 2$, что $x \notin [G_1] \cap [G_2]$.
II_H. Если существует η-окрестность ультрафильтра ξ_1, не пересекающаяся с некоторым элементом ультрафильтра ξ_2, то ультрафильтры ξ_1 и ξ_2 имеют непересекающиеся η-окрестности.
III_H. Если $\delta \notin \eta$, то найдется такой ультрафильтр ξ, что некоторая его η-окрестность не является его $\{\delta\}$-окрестностью.

Далее, в [6] В. В. Федорчук показал, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех H-структур на данном полурегулярном пространстве и множеством всех его полурегулярных H-замкнутых расширений посредством следующей конструкции.

Пусть η — H-структура на полурегулярном пространстве X. Назовем η-системой семейство $\gamma = \{G\}$ непустых канонически открытых подмножеств пространства X, если γ удовлетворяет следующим двум условиям:

1) γ центрировано;
2) для любого $G \in \gamma$ и любой θ-близости $\delta \in \eta$ найдется такое $G' \in \gamma$, что $G'\delta(X \setminus [G])$ (то есть G' δ-подчинено G).

Всякая η-система содержится в некоторой максимальной η-системе. Максимальные η-системы называются еще η-концами. Множество $h_\eta X$ всех η-концов топологизируется введением базы, состоящей из множеств вида

$$O(G) = \{\gamma \in h_\eta X : G \in \gamma\}, \quad G \in \mathfrak{A}(X)^3.$$

Доказывается, что система γ_x всех канонически открытых окрестностей произвольной точки $x \in X$ есть η-конец, отображение $\gamma : X \to h_\eta X$, $\gamma(x) = \gamma_x$, является вложением и $h_\eta X$ можно считать полурегулярным H-замкнутым расширением пространства X, отождествляя

[3] $O(G) \subset h_\eta X$, тогда как $O_G \subset BX$

его с $\gamma(X)$. Соответствие ¡¡H-структура на пространстве X¿¿ $\mapsto$ ¡¡H-замкнутое полурегулярное расширение $h_\eta X$ пространства X¿¿ является взаимно однозначным отображением ¡¡на¿¿.

Теперь установим взаимно однозначное соответствие между множеством всех H-структур на пространстве X, обозначаемом в дальнейшем HX, и ч. у. множеством SX. Тем самым частичный порядок переносится с множества SX на HX (этот частичный порядок упоминался в [6]). Пусть $\eta \in HX$. Для каждого η-конца $\gamma = \{G\} \in h_\eta X$ определим компакт $p(\gamma) = \cap\{O_G : G \in \gamma\} \subset BX$ и семейство $R_\eta = \{p(\gamma) : \gamma \in h_\eta X\}$. Пусть $f : BX \to h_\eta X$ — отображение, определенное в предложении 2. Учитывая отождествление X с $\gamma(X)$, получаем, что для ультрафильтра $\xi \in BX$ равенство $f(\xi) = \gamma \in h_\eta X$ выполняется в том и только в том случае, если $\xi \supset \gamma$, так как $O(G) \cap X = G$, то есть след фундаментальной системы окрестностей $\{O(G) : G \in \gamma\}$ точки $\gamma \in h_\eta X$ на X совпадает с самим η-концом γ. Далее, $\xi \supset \gamma \iff \xi \in p(\gamma)$, откуда следует, что $R_\eta = \{f^{-1}(\gamma) : \gamma \in h_\eta X\}$, то есть $R_\eta \in SX$. Таким образом, определено отображение $\eta : HX \to SX$, сопоставляющее H-структуре η разбиение R_η.

Покажем, что это отображение сюръективно. Пусть $R \in SX$. Имеем: BX/R — полурегулярное H-замкнутое расширение пространства X. В работе В. В. Федорчука [6] (предложение 3) доказано, что на всяком H-замкнутом пространстве (и, в частности, на BX/R) существует единственная H-структура, состоящая из всех θ-близостей на BX/R. Эта H-структура на BX/R порождает H-структуру на пространстве X: элементами η являются сужения на X θ-близостей, заданных на BX/R. Мы докажем требуемую сюръективность, если установим, что $R = R_\eta$. С этой целью рассмотрим расширение $h_\eta X$ пространства X, порождающее на X ту же H-структуру, что и BX/R [6, теорема 3]. Там же доказана единственность полурегулярного H-замкнутого расширения пространства X, порождающего на X данную H-структуру η; при этом гомеоморфизм $g : h_\eta X \to BX/R$, тождественный на X, определяется следующим образом: для η-конца $\gamma = \{G\} \in h_\eta X$ полагается $g(\gamma) = \cap\{[G]_{BX/R} : G \in \gamma\}$ — одноточечное подмножество пространства BX/R. Пусть $g(\gamma) = p \in R$. Тогда $p \cap p(\gamma) \neq \emptyset$. Действительно, если бы было $p \cap p(\gamma) = \emptyset$, то нашлись бы такие канонически открытые в X множества H и G, что $p \subset O_H$, $G \in \gamma$ и $O_H \cap O_G = \emptyset$. Тогда $\pi^\#(O_H) \cap \pi^\#(O_G) = \emptyset$, где $\pi : BX \to BX/R$ — проекция. Но $\pi^\#(O_H)$ — окрестность точки p в пространстве BX/R, а из $\pi^\#(O_H) \cap \pi^\#(O_G) = \emptyset$

следует, что $\pi^{\#}(O_H) \cap \emptyset_G = \emptyset$, так как $G = \pi^{\#}(O_G) \cap X$, откуда, в свою очередь, следует, что $p \notin [G]_{BX/R}$, что противоречит определению отображения g. Легко проверить и обратное: если $p \cap p(\gamma) = \emptyset$, то $p = g(\gamma)$. Отсюда и из биективности g вытекает, что $g(\gamma) = p \iff p = p(\gamma)$. Итак, $R = R_\eta = \{p(\gamma)\colon \gamma \in h_\eta X\}$, что и требовалось доказать.

Предложение 5. *Пусть H-структуры $\eta_1, \eta_2 \in HX$, R_{η_1}, $R_{eta_2} \in SX$ — соответствующие им разбиения. Тогда $\eta_1 \subset \eta_2$ в том и только в том случае, если $R_{\eta_1} \geq R_{\eta_2}$.*

Это утверждение легко следует из леммы, доказанной в [6].

Лемма. *Если η — H-структура на пространстве, то все канонически открытые η-окрестности произвольного ультрафильтра ξ образуют единственный η-конец, содержащийся в ξ.*

Следствие. *Отображение $\eta\colon HX \to SX$, $\eta(R) = R_\eta$, является биекцией.*

Доказательство. Выше было показано, что η сюръективно. Предложение 5 устанавливает его инъективность. □

В дальнейшем HX рассматривается как ч. у. множество и вместо $\eta_1 \subset \eta_2$ можем писать $\eta_1 \leq \eta_2$. Отображение $\eta\colon HX \to SX$ становится при этом порядковым изоморфизмом.

2.2. Компактификации и e-компактификации

Опишем теперь такие элементы ч. у. множества HX, которые соответствуют полурегулярным e-компактификациям пространства X и компактификациям пространства X (если таковые имеются).

Пусть η — некоторое семейство θ-близостей на пространстве X. Мы будем говорить, что η удовлетворяет аксиоме I_e, если для η выполняется следующее условие:

если G является канонической η-окрестностью ультрафильтра ξ, то найдется каноническая η-окрестность H ультрафильтра ξ такая, что $[H] \subset G$.

Пусть опять η — некоторое семейство θ-близостей на пространстве X. Скажем, что η удовлетворяет аксиоме I_e, если для η выполняется следующее условие:

если G — каноническая η-окрестность ультрафильтра ξ, то найдется такая каноническая η-окрестность H ультрафильтра ξ, что у любого ультрафильтра ζ, содержащего H, найдется каноническая η-окрестность со свойством $W \subset G$.

Теорема 2. *Семейство η, состоящее из θ-близостей на пространстве X, является элементом ч. у. множества HX, соответствующим полурегулярной e-компактификации пространства X, в том и только в том случае, если η удовлетворяет аксиомам I_e, II_H и III_H. Аналогично семейство η является элементом ч. у. множества HX, соответствующим компактификации пространства X, в том и только в том случае, если η удовлетворяет аксиомам I_e, II_H и III_H.*

Доказательство. Начнем с аксиомы I_e. В самом деле, пусть семейство $\eta \in HX$ таково, что пространство $h_\eta X$ является e-компактификацией пространства X. Так как η — H-структура, аксиомы II_H и III_H выполнены. Проверим выполнение аксиомы I_e. Пусть G — каноническая η-окрестность ультрафильтра ξ. По лемме $G \in \lambda \subset \xi$, λ — единственный элемент множества $h_\eta X$, содержащийся в ξ. Поскольку пространство $h_\eta X$ — e-компактификация пространства X, след $\{O(G) \cap X : G \in \lambda\} = \lambda$ на X фундаментальной системы окрестностей $\{O(G) : G \in \lambda\}$ точки λ в пространстве $h_\eta X$ регулярен в X, то есть система λ регулярна в X. Найдется, следовательно, $H \in \lambda$ такое, что $[H] \subset G$. Но по той же лемме канонически открытое множество H является η-окрестностью ультрафильтра ξ. Итак, η удовлетворяет I_e. Пусть, обратно, семейство η удовлетворяет аксиомам I_e, II_H и III_H. Легко видеть, что $I_e \Rightarrow I_H$. В самом деле, пусть G_1 и G_2 — непересекающиеся канонические η-окрестности ультрафильтров ξ_1 и ξ_2 соответственно. По I_e получаем, что найдутся такие канонические η-окрестности H_1 и H_2 ультрафильтров ξ_1 и ξ_2, что $[H_i] \subset G_i, i = 1, 2$. Понятно, что для любой точки $x \in X$ выполнено $x \notin [H_1] \cap [H_2]$. Итак, $\eta \in HX$. Аксиома I_e и лемма имеют своим следствием следующее утверждение: любой элемент $\lambda \in h_\eta X$ представляет собой регулярную систему, что, как показано выше, означает, что $h_\eta X$ — e-компактификация пространства X, что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к аксиоме I_e. Действительно, пусть семейство $\eta \in HX$ таково, что пространство BX/R_n является компактификацией пространства X. Так как η — H-структура, аксиомы II_H и III_H выполнены. Проверим выполнение аксиомы I_e. Для каждого $\lambda \in h_\eta X$ определяем $p(\lambda) = \cap\{O_G : G \in \lambda\} \subset BX$; тогда $R_\eta = \{p(\lambda) : \lambda \in h_\eta X\}$

(см. выше). Пусть G — каноническая η-окрестность ультрафильтра ξ. По лемме находим элемент $\lambda \in h_\eta X$ такой, что $G \in \lambda \subset \xi$. Имеем: $\xi \in p(\lambda) \subset O_G$. Поскольку пространство BX/R_η регулярно, по доказанному выше получаем, что найдется $H \in \mathfrak{A}(X)$ такое, что $p(\lambda) \subset O_H$ и $St_{R_\eta}(O_H) \subset O_G$. Из включения $p(\lambda) \subset O_H$ следует, что H является η-окрестностью ультрафильтра ξ. Пусть ультрафильтр ζ содержит $H : H \in \zeta$. Находим $\lambda_1 \in h_\eta X$ такой, что $\lambda_1 \subset \zeta$. Имеем: $\zeta \in O_H$ и $\zeta \in p(\lambda_1)$, откуда $p(\lambda_1) \subset St_{R_\eta}(O_H) \subset O_G$. Так как $p(\lambda_1) = \cap\{O_W : W \in \lambda_1\}$ — пересечение компактов, найдется элемент $W \in \lambda_1$ такой, что $O_W \subset G$, откуда $W \subset G$. По лемме W является η-окрестностью ультрафильтра ζ. Итак, η удовлетворяет аксиоме I_e . Пусть, обратно, семейство η удовлетворяет аксиомам I_e, II_H и III_H. Покажем, что $I_e \Rightarrow I_H$. В самом деле, пусть G_1 и G_2 — непересекающиеся канонические η-окрестности ультрафильтров ξ_1 и ξ_2 соответственно. Пусть H_1 — каноническая η-окрестность ультрафильтра ξ_1, как в I_e, и H_2 — каноническая η-окрестность ультрафильтра ξ_2, как в I_e. Можно считать, что $H_i \subset G_i, i = 1, 2$. Покажем, что $[H_1]\cap[H_2] = \emptyset$, откуда и будет вытекать I_H.

Предположим противное: нашелся $x \in X$ такой, что $x \in [H_1]\cap[H_2]$. Тогда $\{H_1\} \cap \gamma_x$ — центрированная система открытых в X множеств ($\gamma_x \in h_\eta X$ — система всех канонических окрестностей точки x в X). Пусть ультрафильтр ζ мажорирует систему $\{H_1\} \cup \gamma_x$. Тогда по I_e получаем такую каноническую η-окрестность W ультрафильтра ζ, что $W \subset G_1$. Но по лемме $W \in \gamma_x$, и, следовательно, $W \cap H_2 \neq \emptyset$, так что $H_2 \cap G_1 \neq \emptyset$, откуда и $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ — противоречие. Итак, $\eta \in HX$. Проверим, наконец, что пространство BX/R_η регулярно. Пусть $G \in \mathfrak{A}(X)$ и $p(\lambda) \in R_\eta, \lambda \in h_\eta X$ таковы, что $p(\lambda) \subset O_G$. Фиксируем произвольный ультрафильтр $\xi \in p(\lambda)$. По лемме имеем: G — каноническая η-окрестность ультрафильтра ξ. Находим такую каноническую η-окрестность H ультрафильтра ξ, как в I_e. По лемме $H \in \lambda$ и $p(\lambda) \subset O_H$. Покажем, что $St_{R_\eta}(O_H) \subset O_G$. Пусть $\zeta \in St_{R_\eta}(O_H)$. Найдется $\lambda_1 \in h\eta X$ такой, что $\zeta \in p(\lambda_1)$ и $p(\lambda_1) \cap O_H \neq \emptyset$. Пусть $\zeta_1 \in p(\lambda_1) \cap O_H$. Имеем: $H \in \zeta_1$. По I_e получаем, что найдется каноническая η-окрестность W ультрафильтра ζ_1 такая, что $W \subset G$. По лемме $W \in \lambda_1$. Окончательно: $\zeta \in p(\lambda_1) \subset O_G$, то есть $St_{R_\eta}(O_H) \subset O_G$, что и требовалось доказать. □

2.3. Системы θ-близостей, дополняемые до H-структур

Предложение 6. *Пересечение непустого семейства H-структур на пространстве X снова будет H-структурой на пространстве X.*

Доказательство следует из установленного выше взаимно однозначного соответствия между ч. у. множествами HX и SX .

Следствие. *Если $\{\eta_\alpha\}$— непустое подмножество ч. у. множества HX, то $\cap\eta_\alpha = sup\{\eta_\alpha\}$.*

Следующее предложение доказывается автоматически.

Предложение 7. *Пусть $\eta_1, \eta_2 \in HX$. Тогда $\eta_1 \geq \eta_2$ в том и только в том случае, если всякая η_2-окрестность любого ультрафильтра ξ будет и его η_1-окрестностью.*

Рассмотрим некоторые типы семейств θ-близостей, которые можно дополнять до H-структур. Прежде всего к таким семействам следует отнести H-системы.

Определение 3. *Непустое семейство θ-близостей на пространстве X назовем H-системой, если оно удовлетворяет аксиомам I_H и II_H.*

Доказательства следующих двух предложений автоматически вытекают из определений.

Предложение 8. *Всякую H-систему можно дополнить до некоторой H-структуры.*

Предложение 9. *H-структура $[\eta]$, определенная для произвольной данной H-системы η, совпадает с пересечением всех H-структур, содержащих H-систему η, и является, таким образом, наибольшей (в смысле частичного порядка на HX) H-структурой, содержащей η* [4].

Пусть η — H-система. Так как у любого ультрафильтра множества его η- и $[\eta]$-окрестностей совпадают, а $[\eta]$-концы суть не что иное, как множества $[\eta]$-окрестностей ультрафильтров (см. лемму), то становится ясно, что всякая H-система η полностью описывает расширение $h_{[\eta]}X$. Приведем некоторые примеры.

В [6] В. В. Федорчук определил для каждого $x \in X$ следующую θ-близость δ_x на пространстве X:

[4]Что и оправдывает обозначение $[\eta]$.

$A\bar{\delta}_x B \Leftrightarrow$ существуют такие окрестности U и V множеств A и B соответственно, что $U \cap V = \emptyset$ и $x \notin [U] \cap [V]$.

Там же В. В. Федорчук доказал, что всякая H-структура η на пространстве X содержит δ_x для всех $x \in X$. Естественно поэтому предположить, что семейство $\eta_X = \{\delta_x : x \in X\}$ самым непосредственным образом отвечает наибольшему расширению sX пространства X. Действительно, имеет место следующее легко проверяемое утверждение.

Предложение 10. *Семейство η_X является H-системой, и H-структура $[\eta_X]$ есть наибольший элемент ч. у. множества, отвечающий расширению sX.*

Вообще, каждый раз, когда для данного семейства η, состоящего из θ-близостей на пространстве X, найдется H-структура $\eta' \in HX$, содержащая семейство η, имеет смысл говорить о наименьшей (по включению) такой H-структуре, которую мы будем обозначать $[\eta]$.

Дальнейшие примеры семейств θ-близостей, дополняемых до H-структур дает следующее предложение.

Предложение 11. *Для любой θ-близости δ на пространстве X существует H-структура, ее содержащая.*

Доказательство. Прежде всего напомним некоторые построения из работы [4] В. В. Федорчука. Назовем систему $\lambda = \{U\}$ открытых подмножеств пространства X δ-системой, если она удовлетворяет двум условиям:

(i) λ центрирована;

(ii) для любого $U \in \lambda$ найдется такое $V \in \lambda$, что $V\bar{\delta}X\ [U]$.

Максимальные δ-системы называются δ-концами. Все δ-концы делятся на два типа: свободные δ-концы λ, для которых $\cap\{[U] : U \in \lambda\} = \emptyset$, и несвободные δ-концы λ, для которых $\cap\{[U] : U \in \lambda\} \neq \emptyset$. Для всякого несвободного δ-конца λ множество $\cap\{[U] : U \in \lambda\}$ одноточечно и $\cap\{[U] : U \in \lambda\} = \{x\}$ в том и только в том случае, если λ содержит все окрестности точки x. В этом случае говорят, что λ касается x. Множество всех δ-концов обозначается $b_\delta X_\delta$, а множество несвободных δ-концов — X_δ. Множество $b_\delta X_\delta$ становится топологическим пространством, если определить базу топологии следующим образом: она состоит из множеств вида $O(U) = \{\lambda \in b_\delta X_\delta : U \in \lambda\}$ [5]. Доказывается, что $b_\delta X_\delta$ — компакт.

Применим теперь эту конструкцию для доказательства нашего предложения. Каждому $\lambda \in b_\delta X_\delta$ в гиперабсолюте BX пространства X поставим в соответствие компакт $p(\lambda) = \cap\{O_U : U \in \lambda\} \neq \emptyset$. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $p(\lambda_1) \cap p(\lambda_2) = \emptyset$. Покажем, что множество $B = \cup\{p(\lambda) : \lambda \in b_\delta X_\delta\}$ компактно. Рассматривая покрытие множества B открытыми в BX множествами, можно без ограничения общности считать, что оно имеет вид $\{O_{U_\lambda} : U_\lambda \in \lambda, \lambda \in b_\delta X_\delta\}$. Тогда семейство $\{O(U_\lambda) : U_\lambda \in \lambda, \lambda \in b_\delta X_\delta\}$ покрывает $b_\delta X_\delta$. Так как $b_\delta X_\delta$ компактно, найдутся такие $\lambda_i, i = 1, ..., n$, что $b_\delta X_\delta = \cup_{i=1}^n O(U_{\alpha_i})$. Понятно, что тогда $B \subset \cup_{i=1}^n O_{U_{\alpha_i}}$. Итак, B компактно. Покажем, что B всюду плотно в BX. Действительно, для любого $x \in X$ найдется $\lambda \in b_\delta X_\delta$, касающийся x.[6] Ясно тогда, что $p(\lambda) \subset \bar{x}$. Так как $\{\bar{x} : x \in X\}$ — плотная в BX система (то есть каждое непустое открытое подмножество BX содержит некоторое множество из этой системы), то $[B]_{BX} = BX$. Так как B замкнуто и всюду плотно в BX, то $B = BX$. Если $\lambda \in b_\delta X_\delta \backslash X_\delta$, то $p(\lambda) \subset BX \backslash aX$; для всякого $x \in X$ имеем: $\bar{x} = \cup\{p(\lambda) : \lambda$ касается $x\}$.

Рассмотрим теперь семейство $R = \{p(\lambda : \lambda \in b_\delta X_\delta \backslash X_\delta\} \cup \{\bar{x} : \in X\}$. Это семейство — элемент ч. у. множества SX. Пусть $\eta \in HX$ — соответствующая разбиению R H-структура. Покажем, что $\delta \in \eta$. Если это не так, то аксиома III_H гласит, что найдутся ультрафильтр ξ и его η-окрестность G_0, не являющаяся его $\{\delta\}$-окрестностью. Предположим сначала, что $\xi \in p(\lambda), \lambda \in b_\delta X_\delta \backslash X_\delta$. Найдется элемент $\gamma \in h_\eta X$ такой, что $p(\lambda) = \cap\{O_G : G \in \gamma\}$. Имеем: $G_0 \in \gamma$, откуда $p(\lambda) \subset O_{G_0}$, и, следовательно, $G_0 \in \lambda$ и G_0 является $\{\delta\}$-окрестностью ξ. Противоречие. Предположим теперь, что $\xi \in \bar{x}$ для некоторого $x \in X$. Найдется $\lambda \in X_\delta$ такой, что $\xi \in p(\lambda) \subset \bar{x}$. Так как G_0 — η-окрестность ξ, то $\bar{x} \subset O_{G_0}$, и мы опять получим, что $p(\lambda) \subset O_{G_0}$, что приведет к противоречию. Итак, $\delta \in \eta$. Предложение доказано. □

В [6] В. В. Федорчук доказал, что на H-замкнутом пространстве семейство всех θ-близостей образует H-структуру[7]. Следующая те-

[5] Опять $O(U)$ и O_U имеют разный смысл: $O(U) \subset b_\delta X_\delta$, а $O_U \subset BX$.

[6] Все окрестности точки x образуют систему (см. [4]), а всякая δ-система содержится в некотором δ-конце.

[7] На H-замкнутом пространстве эта H-структура будет и единственной (см. [6]).

орема устанавливает границы класса пространств, для которых это верно.

Теорема 3. *Полурегулярное пространство X является локально H-замкнутым в том и только в том случае, если семейство всех θ-близостей на X является H-структурой на X.*

Доказательство. Пусть X локально H-замкнуто. Тогда в HX имеется наименьший элемент η_{min}. Если δ — θ-близость на X , то по предложению 11 найдется $\eta \in HX$ со свойством $\delta \in \eta$. Так как $\eta \geq \eta_{min}$, то есть $\eta \subset \eta_{min}$, то $\delta \in \eta_{min}$. Итак, η_{min} содержит все θ-близости на пространстве X.

Обратно, если семейство всех θ-близостей будет H-структурой, то эта H-структура будет наименьшим элементом в HX и X в силу теоремы 1 будет локально H-замкнутым. □

Таким образом, если X — локально H-замкнутое пространство, то для непустого семейства θ-близостей η можно определить наибольшую (в смысле порядка на HX) H-структуру $[\eta] = \cap\{\eta_\alpha \in HX : \eta \subset \eta_\alpha\} = sup\{\eta_\alpha \subset HX : \eta \subset \eta_\alpha\}$.

Résumé

The main subject of this paper is notion of H-structure introduced in [6] by V. V. Fedorchuk. Recall that an H-structure is a family of θ-proximities (see [5] and [4]), and there is a one-to-one correspondence between the set of all H-structures on a semiregular Hausdorff space X and the set of all semiregular H-closed extensions of X. Theorem 2 of this paper shows what restrictions it is necessary to impose on an H-structure in order to obtain an e-compactification (see [7]) of X Theorem 3 says that the family of all θ-proximities on a semiregular space X forms an H-structure on X iff X is locally H-closed (i. e. every point of X has an open neighbourhood the closure of whitch is H-closed). Theorem 1 gives some preliminary characteristics of loccaly H-closed spaces.

Литература

[1] Иванов А. В. *Относительно компактные расширения вполне регулярных пространств*// Труды ПетрГУ. Серия математика. 1996. Вып. 3. С. 79–87.

[2] Илиадис С., Фомин С. В. *Метод центрированных систем в теории топологических пространств*// Успехи мат. наук. 1966. Т. 21. Вып. 4. С. 47–76.

[3] Матюшичев К. В. *О e-компактификациях и e-компактифицируемых пространствах*// Сиб. мат. журнал (в печати).

[4] Федорчук В. В. *Совершенные неприводимые отображения и обобщенные близости*// Матем. сб. 1968. Т. 76(4). С. 513–538.

[5] Федорчук В. В. *Об H-замкнутых расширениях пространств θ-близости*// Матем. сб. 1972. Т. 89(3). С. 400–418.

[6] Федорчук В. В. *Задача А. Н. Тихонова о классификации H-замкнутых расширений*// Fundam. Math. 1974. V. 86. P. 69–90.

[7] Hart K. P., Vermeer J. *Non-Tychonoff e-compactifiable space*// Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 89(4). P. 725–729.

[8] Hechler S. H. *On a notion of weak compactness in non-regular spaces* /N. M. Stavrakas and K. R. Allen, eds.// Studies in Topology. New York: Academic Press, 1975. P. 215–237.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: matush@mainpgu.karelia.ru