Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 8, 2001

УДК 517.54

С. Ю. Граф

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ И ОЦЕНКИ ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ДЛИН СЕМЕЙСТВ КАНОНИЧЕСКИХ ПЕТЕЛЬ НА КОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Рассматривается задача вычисления экстремальных длин гомотопических классов замкнутых кривых на компактных римановых поверхностях. Приводятся выражения и оценки для экстремальных длин семейств кривых на торе, а также на компактных римановых поверхностях специального вида. Анализируется связь экстремальных длин семейств замкнутых кривых с проблемой модулей для компактных римановых поверхностей.

1. Рассмотрим компактную риманову поверхность $\mathfrak{R}$ рода g с выделенной системой канонических сечений $a_1, \dots, a_g, b_1 \dots, b_g$. При этом будем полагать, что сечения $a_k,\ k = \overline{1, g}$, проходят по ручкам поверхности $\mathfrak{R}$, а сечения $b_k,\ k = \overline{1, g}$, — под ручками. В случае $g = 1$ данная поверхность представляет собой отмеченный тор, который представим как пространство орбит $\mathbb{C}/G(\omega_1, \omega_2)$, где $G(\omega_1, \omega_2)$ —группа сдвигов плоскости $\mathbb{C}$, действующая преобразованиями вида $z \mapsto z + m\omega_1 + n\omega_2,\ m, n \in \mathbb{Z}$. Здесь ω_1, ω_2 — пара фиксированных неколлинеарных векторов на $\mathbb{C}$. Без ограничения общности можно считать $\omega_1 = 1,\ \omega_2 = \omega = |\omega|e^{i\alpha},\ 0 < \alpha < \pi$. Тор $\mathbb{C}/G(1, \omega)$ будем обозначать символом $\mathfrak{T}_\omega$. Тогда фундаментальная область группы $G(1, \omega)$ представляет собой параллелограмм ${}_\omega$ на $\mathbb{C}$, построенный на векторах 1 и ω. Если же род поверхности $\mathfrak{R}$ больше 1, то $\mathfrak{R}$ изоморфна пространству орбит действующей в единичном круге $\mathcal{U}$ фуксовой группы $G =$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00112

$G(g; A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_g, B_g)$ с выделенной системой гиперболических образующих $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$ (отмеченной фуксовой группы). Подобные поверхности будем называть отмеченными и обозначать символом $\mathfrak{R}\,(g; a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g)$. Фундаментальный многоугольник $P = P(G) = P(\mathfrak{R})$ отмеченной поверхности рода $g > 1$ представляет собой неевклидов $4g$-угольник в единичном круге.

Для всякого семейства Γ замкнутых гомотопных кривых на компактной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ определена его экстремальная длина

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{\left(\inf_{\gamma\in\Gamma} \int_{\gamma} \rho(z)\,|dz|\right)^2}{\int\int_{\mathfrak{R}} \rho^2(z)\,dm_z}, \tag{1}$$

где супремум берется по всем допустимым метрикам на поверхности $\mathfrak{R}$, т.е. по всем измеримым неотрицательным инвариантным относительно действия группы G функциям ρ в единичном круге $\mathcal{U}$ таким, что площадь $A_\rho(\mathfrak{R}) = \int\int_{\mathfrak{R}} \rho^2(z)\,dm_z$ поверхности $\mathfrak{R}$ в метрике ρ отлична от нуля и бесконечности [1, 3].

Всякая замкнутая кривая γ на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ произвольного рода гомотопна некоторой кривой, представляющей собой цепочку последовательно проходимых в прямом или обратном направлении канонических петель поверхности $\mathfrak{R}$. Таким образом, топологическое строение всякой замкнутой кривой γ на компактной римановой поверхности определяется словом S, составленным из букв алфавита $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$, взятых в некоторой последовательности с целыми степенями, указывающими, сколько раз подряд в положительном или отрицательном направлении проходится соответствующее каноническое сечение. Возникает свободная группа $\mathfrak{G}$ с конечным числом определяющих правил. Например, отождествляются слова, которые могут быть получены друг из друга циклическим сдвигом букв (например, $a_1a_2b_2$ и $b_2a_1a_2$), слова, определяющие топологически одинаковые кривые на $\mathfrak{R}$, проходимые в противоположных направлениях, т.е. состоящие из обратных последовательностей букв с противоположными степенями ($a_1b_1^{-1}a_2$ и $a_2^{-1}b_1a_1^{-1}$). Слово S будем называть приведенным, если в нем отсутствуют блоки вида $a_ka_k^{-1}$, $b_kb_k^{-1}$, $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_g^{-1}b_g^{-1}$, определяющие петли, гомотопные точечным кривым, а последовательно расположенные одинаковые символы представлены в виде степеней с целыми показателями (например, слово $a_1b_2^{-1}b_2a_1$ приводится к виду a_1^2). Замкнутые, не имеющие самопересечений кривые $\gamma_k,\ k=\overline{1,g}$, определяемые словами вида $a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$, называются коммутаторами ручек поверхности $\mathfrak{R}$ [7]. Коммутаторы $\gamma_k,\ k=\overline{1,g}$, совместно с системой канонических сечений $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g$ и не имеющими самопересечений кривыми $\delta_l, l=\overline{1, g-3}$, топологической структуры $\gamma_1 \cdot \gamma_{l+1}$ (т.е. определяемыми словами вида $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}\ a_{l+1} b_{l+1} a_{l+1}^{-1} b_{l+1}^{-1}$) образуют модулярную систему сечений $M=(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g, \gamma_1, \ldots, g_g, \delta_1, \ldots, \delta_{g-3})$ поверхности $\mathfrak{R}$ рода $g \geq 3$, разбивающую $\mathfrak{R}$ на неразложимые (в смысле конформной жесткости) куски: торы с гиперболической дыркой и сферы с тремя гиперболическими дырками. На поверхности рода 2 все кривые обоих классов коммутаторов ручек гомотопны, а кривые вида δ_l не рассматриваются. Заметим, что на отмеченном торе группа $\mathfrak{G}$ значительно проще и всякая замкнутая кривая определяется словом вида $a^n b^m$, где a и b — образующие отмеченного тора, а $n,\ m \in \mathbb{Z}$. Единственный коммутатор тора $aba^{-1}b^{-1}$ представляет собой точечную кривую (определяется «пустым» словом $a^0 b^0$).

Символом $I=I(S)$ будем обозначать индекс приведенного слова S — количество входящих в него букв с учетом кратности и без учета знаков их степеней. Символом $\Gamma(S)$, или просто Γ, обозначим семейство замкнутых гомотопных кривых, топологическое строение которых определяется словом S.

2. Для вычисления экстремальных длин семейств кривых на компактных римановых поверхностях в [4] предлагалось рассматривать соответствующие задачи на универсальной накрывающей поверхности $\mathfrak{R}$ и в фундаментальном многоугольнике $P(\mathfrak{R})$.

Для вычисления экстремальных длин семейств кривых индекса $I \geq 2$ может быть применена следующая процедура. Пусть Γ — семейство замкнутых гомотопных кривых индекса $I \geq 2$ на компактной римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Для всякой кривой $\gamma \in \Gamma$ ее поднятие в некоторый фундаментальный многоугольник P_1 поверхности $\mathfrak{R}$ представляет собой разрывную кривую $\hat{\gamma}$, состоящую не менее чем из I непрерывных дуг. Рассмотрим непрерывную кривую $\widetilde{\gamma}$, получаемую в результате "разворачивания"$\hat{\gamma}$ в область P_Γ, представляющую собой объединение I смежных (полученных друг из друга неевклидовым движением) экземпляров $P_1, P_2, \ldots, P_I$ фундаментального многоугольника P поверхности $\mathfrak{R}$. При этом экземпляры P_k и $P_{k+1},\ k=\overline{1, I-1}$, имеют смежную сторону, а выбор очередного многоугольника P_{k+1} определяется $(k+1)$-й буквой слова S, задающего топологическое строение кривой γ. Тогда поднятие $\widetilde{\gamma}$ кривой γ в область P_Γ будет непрерывно переходить из многоугольника P_k в P_{k+1}. Полученная в результате описанной процедуры область P_Γ представляет собой четырехугольник. Кривые семейства Γ соединяют пару его противоположных сторон, что позволяет свести задачу вычисления экстремальной длины семейства Γ к вычислению экстремальной длины соответствующего семейства $\widetilde{\Gamma}$ в четырехугольнике P_Γ. Допустимыми метриками при этом считаются поднятия в P_Γ метрик, допустимых на поверхности $\mathfrak{R}$. Исходя из того, что в любой допустимой метрике площадь $A_\rho(P_\Gamma) = I(\Gamma) \cdot A_\rho(P_k)$, где P_k — произвольный экземпляр фундаментального многоугольника, с использованием известного (см., например, [1]) неравенства для экстремальных длин сумм семейств кривых доказывается

Лемма 1. *Пусть Γ — семейство замкнутых гомотопных кривых индекса $I \geq 2$ на компактной римановой поверхности $\mathfrak{R}$, $\widetilde{\Gamma}$ — его поднятие в четырехугольник P_Γ. Тогда*

$$\lambda(\Gamma) = I(\Gamma)\lambda(\widetilde{\Gamma}), \tag{2}$$

$$\lambda(\Gamma) \geq I(\Gamma)\big(\lambda(\widetilde{\Gamma}_1) + \lambda(\widetilde{\Gamma}_2) + \ldots + \lambda(\widetilde{\Gamma}_I)\big), \tag{3}$$

где $\lambda(\widetilde{\Gamma}_k)$, $k = \overline{1, I}$, — экстремальные длины семейств $\widetilde{\Gamma}_k = \widetilde{\Gamma} \bigcap P_k$.

Для иллюстрации предложенных методов рассмотрим задачу вычисления экстремальных длин семейств замкнутых гомотопных кривых на компактных римановых поверхностях специального вида.

3. Пусть $\mathfrak{T}_\omega$ — отмеченный тор с образующими a, b, которым в параллелограмме $_\omega$ отвечают стороны 1 и ω соответственно. Рассмотрим задачу о вычислении экстремальной длины $\lambda(a^m b^n)$ семейства $\Gamma(a^m b^n)$ невырожденных замкнутых кривых, совершающих m оборотов по ручке тора $\mathfrak{T}_\omega$ и n оборотов — под ручкой. В параллелограмме $_\omega$ на плоскости $\mathbb{C}$ семействам кривых $\Gamma(ab^0)$ и $\Gamma(a^0 b)$ отвечают семейства возможно разрывных кривых, начальные и конечные точки которых отличаются на вектора 1 и ω соответственно, а семейству $\Gamma(a^m b^n)$ кривых индекса $I = |m| + |n| > 1$ — семейство разрывных кривых, непрерывности которых можно добиться после применения описанной выше процедуры "разворачивания"параллелограмма $_\omega$. Справедлива

Теорема 1 [4]. *Экстремальная длина $\lambda(a^m b^n)$ семейства $\Gamma(a^m b^n)$, $m^2 + n^2 > 0$, гомотопных кривых на торе $\mathfrak{T}_\omega$, совершающих m оборотов* *вдоль и n поперек ручки, имеет вид*

$$\lambda(a^m b^n) = \frac{|m+n\omega|^2}{|\omega|\sin\alpha}.$$

В частности,

$$\lambda(ab^0) = \frac{1}{|\omega|\sin\alpha}, \quad \lambda(a^0 b) = \frac{|\omega|}{\sin\alpha},$$

так что

$$\lambda(a^m b^n) = m^2\lambda(ab^0) + n^2\lambda(a^0 b) + 2mn\operatorname{ctg}\alpha. \tag{4}$$

Доказательство. а) Пусть ρ —произвольная допустимая метрика на торе $\mathfrak{T}_\omega$. В плоскости $\mathbb{C}$ ей соответствует двоякопериодическая метрика $\hat\rho$ с периодами 1 и ω. Пусть γ — произвольная кривая из семейства $\Gamma(a^m b^n)$, $m^2+n^2>0$. Символом $L_\gamma(\rho)$ обозначим длину кривой γ в метрике ρ, а символом $L(\rho)$ — инфимум таких длин по всем кривым семейства $\Gamma(a^m b^n)$. Предположим сначала, что $|m|\neq|n|$, $\beta = \arg(m+n\omega)$. Тогда, в силу периодичности функции $\hat\rho$,

$$L(\rho) \le \int_0^1 \hat\rho\big(x + y(m+n\omega)\big)|m+n\omega|dy,$$

$$\frac{1}{|n|}L(\rho) \le \int_0^{\frac{1}{|n|}}\int_0^1 \hat\rho\big(x + y(m+n\omega)\big)|m+n\omega|dy\,dx,$$

$$\frac{1}{n^2}L^2(\rho) \le \frac{|m+n\omega|}{|n\sin\beta|}\int_0^{\frac{1}{|n|}}\!\!\int_0^1 \hat\rho^2\big(x + y(m+n\omega)\big)|m+n\omega|\cdot|\sin\beta|\,dy\,dx =$$
$$= A_\rho(\mathfrak{T}_\omega)\cdot\frac{|m+n\omega|^2}{|\omega|\sin\alpha},$$

где $A_\rho(\mathfrak{T}_\omega)$ — площадь тора $\mathfrak{T}_\omega$ в метрике ρ. Отсюда получаем оценку

$$\lambda(a^m b^n) \le \frac{|m+n\omega|^2}{|\omega|\sin\alpha}.$$

Если $|m|=|n|$, то аналогично

$$L(\rho) \le |m|\int_0^1 \hat\rho\big(x + y(1+\omega)\big)|1+\omega|dy,$$

$$L(\rho) \le |m|\int_0^1\int_0^1 \hat\rho\big(x + y(1+\omega)\big)|1+\omega|dy\,dx,$$

$$L^2(\rho) \le A_\rho(\mathfrak{T}_\omega) \cdot \frac{m^2|1+\omega|^2}{|\omega|\sin\alpha}$$

и, как и ранее,

$$\lambda(a^m b^n) \le \frac{|m+n\omega|^2}{|\omega|\sin\alpha}.$$

б) Противоположная оценка экстремальной длины семейства $\Gamma(a^m b^n)$ может быть получена, если в качестве метрики на торе $\mathfrak{T}_\omega$ взять функцию ρ_0, тождественно равную единице. Справедливость соотношения (4) следует непосредственно из доказанного результата. Теорема доказана. $\square$

В известной автору литературе нет результатов, касающихся экстремальных длин семейств кривых на торе. Л. Альфорсом [3] решена задача о вычислении экстремальных длин семейств замкнутых кривых на плоскости с проколами, родственная рассматриваемой.

4. Перейдем к рассмотрению экстремальных длин на поверхностях более высокого рода. Компактную риманову поверхность $\mathfrak{R}$ рода $g \ge 2$ назовем симметричной и будем обозначать символом $\mathfrak{R}_g^0$, если ее фундаментальный многоугольник в единичном круге $\mathcal{U}$ представляет собой правильный неевклидов $4g$-угольник P_g^0 с углами величиной $\frac{\pi}{2g}$.

Теорема 2 [5]. *Пусть Γ_m — семейство замкнутых гомотопных кривых на $\mathfrak{R}_g^0$, совершающих m оборотов по некоторой произвольной ручке этой поверхности. Тогда*

$$\lambda(\Gamma_m) = 2m^2 \frac{\operatorname{sn}^{-1}(\frac{\pi}{2}, k)}{\operatorname{sn}^{-1}(\frac{\pi}{2}, k')} = 2m^2 \frac{K(k)}{K'(k)}, \tag{5}$$

где

$$k = -\frac{1-e^{i\frac{\pi}{4g}}}{1+e^{i\frac{\pi}{4g}}} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{g}} + e^{i\frac{\pi}{4g}}}{e^{i\frac{\pi}{g}} - e^{i\frac{\pi}{4g}}} = \frac{(1-\cos\frac{\pi}{4g})(1+\cos\frac{3\pi}{4g})}{\sin\frac{\pi}{4g}\sin\frac{3\pi}{4g}}, \quad k' = \sqrt{1-k^2},$$

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}; \;\; K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \tag{6}$$

Экстремальная длина семейства кривых, совершающих m оборотов под некоторой ручкой поверхности $\mathfrak{R}_g^0$, имеет такой же вид.

Доказательство. Для простоты проведчм доказательство в случае $g = 2$, т.е. для симметричной римановой поверхности рода 2. Фундаментальный многоугольник P_2^0 симметричной поверхности $\mathfrak{R}_2^0$ представляет собой правильный неевклидов восьмиугольник в единичном круге с углами величиной $\frac{\pi}{4}$, длина стороны которого равна $\ln \frac{\sqrt{3}/2+(2-\sqrt{2})/\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{3}/2-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2\sqrt{2}}}$. Если центр восьмиугольника P_2^0 совпадает с началом координат, то радиус r описанной вокруг него окружности равен $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

Рассмотрим сначала семейство Γ, состоящее из замкнутых гомотопных кривых, совершающих один оборот по некоторой ручке поверхности $\mathfrak{R}_2^0$. Пусть для определенности семейство Γ выбрано таким образом, что его поднятие в фундаментальный восьмиугольник P_2^0 с центром в начале координат и одной из вершин в точке r представляет собой совокупность кривых, соединяющих сторону, смежную с вершинами $r\,e^{i\frac{\pi}{2}}$, $r\,e^{i\frac{\pi}{4}}$, со стороной, смежной с вершинами $r\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$, r. Таким образом, область P_2^0 с выделенной парой указанных сторон представляет собой четырехугольник.

Известно [6], что функция

$$f(\zeta) = \zeta \cdot \frac{\int_0^1 \frac{\tau^{-\frac{1}{4}}\,d\tau}{\left((1-\tau)(1-\zeta^8\tau)\right)^{\frac{5}{8}}}}{\int_0^1 \frac{\tau^{-\frac{1}{2}}\,d\tau}{\left((1-\tau)(1-\zeta^8\tau)\right)^{\frac{5}{8}}}}$$

осуществляет конформное отображение единичного круга на правильный круговой восьмиугольник с углами раствора $\frac{\pi}{4}$, вписанный в единичный круг. При этом точки $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 1, $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ остаются неподвижными, а соединяющие их дуги единичной окружности переходят в соответствующие стороны восьмиугольника. Тогда конформное отображение четырехугольника P_2^0 на прямоугольник с соблюдением соответствия вершин можно построить в виде

$$\Phi(z) = h \circ g \circ f^{-1}\Big(\frac{z}{r}\Big),$$

где

$$g(\zeta) = -\frac{1+e^{i\frac{\pi}{8}}}{1-e^{i\frac{\pi}{8}}} \cdot \frac{\zeta - e^{i\frac{\pi}{8}}}{\zeta + e^{i\frac{\pi}{8}}}$$

— конформное отображение единичного круга на верхнюю полуплоскость, переводящее точки $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 1, $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ в точки $\frac{1}{k}$, 1, -1, $-\frac{1}{k}$ соответственно,

$$k = \frac{(1-\cos\frac{\pi}{8})(1+\sin\frac{\pi}{8})}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}},$$

а

$$h(\omega) = \int_0^\omega \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

— конформное отображение верхней полуплоскости на прямоугольник, для которого точки $-\frac{1}{k}$, -1, 1, $\frac{1}{k}$ являются прообразами вершин $-K(k)+iK'(k)$, $-K(k)$, $K(k)$, $K(k)+iK'(k)$.

В силу свойства конформной инвариантности экстремальная длина семейства Γ равна отношению сторон полученного прямоугольника, т.е.

$$\lambda(\Gamma) = 2\frac{K(k)}{K'(k)} = 2\frac{\mathrm{sn}^{-1}(\frac{\pi}{2},k)}{\mathrm{sn}^{-1}(\frac{\pi}{2},k')}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}.$$

В случае, если Γ_m, $m>1$, — семейство гомотопных кривых, совершающих m оборотов по ручке поверхности $\mathfrak{R}_2^0$, продолжим построенное отображение по принципу симметрии до конформного отображения описанного в пункте 1 "развернутого"четырехугольника P_Γ на прямоугольник со сторонами $m\cdot 2K(k)$, $K'(k)$ и воспользуемся равенством (3). Таким образом,

$$\lambda(\Gamma_m) = 2m^2\frac{K(k)}{K'(k)}.$$

Доказательство утверждения теоремы для семейств замкнутых кривых, совершающих обходы под ручками поверхности $\mathfrak{R}_2^0$, а также для симметричных римановых поверхностей произвольного рода $g>2$ аналогично. $\Box$

Применение леммы 1 и очевидного обобщения принципа симметрии для экстремальных длин позволяет также получить выражения и оценки для некоторых классов замкнутых гомотопных кривых на симметричных римановых поверхностях. Следующий результат, ввиду сходства методов и техники его получения с приведенными выше, сформулируем без доказательства.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{R}_2^0$ — симметричная компактная риманова поверхность рода 2 с выделенной канонической системой образующих*

a_1, b_1, a_2, b_2.

1) Пусть $\Gamma = \Gamma(a_1a_2a_1a_2\cdots a_1a_2) = \Gamma\big((a_1a_2)^m\big)$ *— семейство замкнутых гомотопных кривых, совершающих* m *оборотов по обеим ручкам поверхности* $\mathfrak{R}_2^0$. *Тогда*

$$\lambda(\Gamma) = 4m^2\frac{K(k)}{K'(k)}, \tag{7}$$

где $k = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$, *а величины* $K(k)$, $K'(k)$ *вычисляются по формулам (6). Аналогичный результат справедлив для семейств* $\Gamma\big((b_1b_2)^m\big)$.

2) Пусть $\Gamma = \Gamma(a_1b_2a_1b_2\cdots a_1b_2) = \Gamma\big((a_1b_2)^m\big)$ *— семейство замкнутых гомотопных кривых, совершающих* m *оборотов под первой и под второй ручками поверхности* $\mathfrak{R}_2^0$. *Тогда*

$$\lambda(\Gamma) \geq 4m^2\frac{K(k)}{K'(k)}, \tag{8}$$

где

$$k = \sqrt{2}-1.$$

Аналогичный результат справедлив для семейств $\Gamma\big((b_1a_2)^m\big)$.

3) Пусть $\Gamma = \Gamma(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})$ *— семейство замкнутых кривых, гомотопных коммутатору первой ручки поверхности* $\mathfrak{R}_2^0$. *Тогда*

$$\lambda(\Gamma) \geq 8\frac{K(k)}{K'(k)}, \tag{9}$$

где

$$k = \sqrt{2}-1.$$

Аналогичная оценка справедлива для экстремальной длины семейства кривых, гомотопных коммутатору второй ручки поверхности $\mathfrak{R}_2^0$.

Оценки, аналогичные (7) – (9), могут быть получены также для экстремальных длин семейств кривых на симметричных поверхностях более высокого рода, а с учетом свойства квазиинвариантности экстремальной длины — и для произвольных компактных римановых поверхностей.

5. Совокупность экстремальных длин семейств $\Gamma(S)$ замкнутых кривых, отвечающих всевозможным словам S на поверхности $\mathfrak{R}$, образует множество $\Lambda = \Lambda(\mathfrak{R})$. Множество Λ может быть представлено в виде объединения непересекающихся подмножеств Λ_I, $I = 0, 1, 2, \ldots$, состоящих из экстремальных длин семейств кривых индекса I. Множество Λ_1, например, состоит из экстремальных длин семейств кривых, гомотопных тем или иным каноническим сечениям поверхности $\mathfrak{R}$.

Исследование структуры пространства $\Lambda(\mathfrak{R})$ и его размерности может дать новые подходы к решению проблемы модулей отмеченных римановых поверхностей и исследованию геометрии пространств Тейхмюллера. В самом деле, из теоремы 1 следует, что пространство экстремальных длин на торе двумерно и пара экстремальных длин, соответствующих образующим, определяет тор с точностью до конформного или антиконформного отображения и может служить координатами данного тора (модулями тора) в пространстве Тейхмюллера.

Теорема 4. *Отмеченные торы $\mathfrak{T}_\omega$ и $\mathfrak{ESCT}_{\omega'}$ конформно или антиконформно эквивалентны в том и только том случае, когда экстремальные длины $\lambda(ab^0)$ и $\lambda(a^0b)$ на торе $\mathfrak{T}_\omega$ соответственно равны экстремальным длинам $\lambda(a'b'^0)$ и $\lambda(a'^0b')$ на $\mathfrak{T}_{\omega'}$.*

Если род поверхности $\mathfrak{R}$ больше двух, то, как следует из [2], с каждым гомотопическим классом Γ простых замкнутых кривых на $\mathfrak{R}$ связана экстремальная метрика ρ_Γ, для которой супремум в (1) достигается. При этом $\rho_\Gamma(z)|dz| = \sqrt{|Q(z)|}|dz|$, где $Q(z)$ — голоморфный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$. Систему λ_1, $\lambda_2, \ldots$, λ_n экстремальных длин гомотопических классов простых кривых назовем Q-зависимой, если соответствующая им система квадратичных дифференциалов Q_1, $Q_2, \ldots$, Q_n линейно зависима. Таким образом, пространство Λ содержит отвечающее семействам простых кривых подмножество Λ^*, Q-размерность которого не превосходит $6g-6$. Аналогичный результат представляется вероятным для всего пространства Λ. Особый интерес представляет собой изучение экстремальных длин семейств кривых, гомотопных каким-либо кривым модулярного семейства $M = (a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g,\ b_g,\ \gamma_1, \ldots, \gamma_g,\ \delta_1, \ldots,\ \delta_{g-3})$, поскольку, как известно из [7], следы гиперболических образующих, отвечающих модулярной системе кривых, вместе с коэффициентами «склейки» соответствующих им фуксовых групп определяют данную риманову поверхность с точностью до конформного отображения.

Résumé

The problem of the calculation of the extremal lengths of the homotopic classes of the closed curves on the compact Riemann surfaces is considered. The expressions and estimates for the extremal lengths on the torus and on the compact Riemann surfaces of the special kind are adduced. The connection of this extremal lengths with the problem of the modules of Riemann surfaces is analysed.

Список литературы

[1] Дженкинс Дж. *Однолистные функции и конформные отображения.* М., 1962.

[2] Jenkins J.A. *On the existence of certain general extremal metrics*// Ann. of Math. 1957. V. 66. N. 3. P. 440–453.

[3] Альфорс Л. *Лекции по квазиконформным отображениям.* М., 1969.

[4] Граф С. Ю. *Экстремальные длины семейств кривых на торе и проблема модулей* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2000. С. 50–53.

[5] Граф С. Ю. *Экстремальные длины семейств замкнутых кривых на компактных римановых поверхностях* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2001. С. 32–40.

[6] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М., 1952.

[7] Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д. *Поверхности и разрывные группы.* М., 1988.

Тверской государственный университет,
математический факультет,
170002, Тверь, Садовый пер., 35
E-mail: a000110@tversu.ru