Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 8, 2001

УДК 517

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СХОДИМОСТЬЮ И КОНУСОМ

В. В. Мосягин, Б. М. Широков

В линейном пространстве со сходимостью рассмотрены некоторые разновидности конусов. Их специфика используется для доказательства теорем о неподвижных точках операторов, монотонных на конусных отрезках.

1. В этом пункте приведем необходимые сведения из теории пространств со сходимостью [1, 3].

Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Сходимость G в X — это подмножество произведения $X^{\mathbb{N}} \times X$. Если $(\{x_n\}, x) \in G$ для $\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}}$ и $x \in X$, то мы говорим, что последовательность $\{x_n\}$ G-сходится к x в X и пишем $x_n \xrightarrow{G} x$.

Будем предполагать, что G-сходимость в X удовлетворяет следующим условиям:

($\mathcal{F}$) если $x_n \xrightarrow{G} x$, то $x_{p_n} \xrightarrow{G} x$ для любой подпоследовательности $\{x_{p_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$;

($\mathcal{L}$) если $x_n \xrightarrow{G} x, y_n \xrightarrow{G} y$ и $a_n \to a, b_n \to b$ в $\mathbb{R}$, то $a_n x_n + b_n y_n \xrightarrow{G} ax + by$;

($\mathcal{U}$) если x_n не сходится к x, то существует такая подпоследовательность $\{x_{p_n}\}$ последовательности x_n, что никакая ее подпоследовательность не сходится к x;

($\mathcal{S}$) если $x_n = x$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $x_n \xrightarrow{G} x$;

($\mathcal{H}$) если $x_n \xrightarrow{G} x, x_n \xrightarrow{G} y$, то $x = y$.

Сходимость последовательностей в хаусдорфовом топологическом пространстве удовлетворяет всем условиям $\mathcal{FLUSH}$.

Пара (X, G) называется *пространством со сходимостью.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1*Если $\Omega \subset X$, то замыкание $\overline{\Omega}$ определяется следующим образом:*

$$\overline{\Omega} = \{x \in X : \text{ существует } \{z_n\} \subset \Omega, z_n \xrightarrow{G} z\}.$$

Множество $\Omega \subset X$ называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2*Подмножество $B \subset X$ называется ограниченным, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset B$ и любой сходящейся к нулю числовой последовательности $\{\alpha_n\}$ последовательность $\{\alpha_n x_n\}$ G-сходится к нулевому элементу θ пространств X.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3*Последовательность $\{x_n\} \in X$ называется фундаментальной, если для любой последовательности $\{p(n)\}$ натуральных чисел $p(n) > n$ последовательность $\{x_{p(n)} - x_n\}$ G-сходится к нулевому элементу $\theta \in X$.*

Пространство (X, G) называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность G-сходится (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4*Пусть X_1, X_2 — два линейных пространства со сходимостью. Оператор A из X_1 в X_2 называется секвенциально непрерывным в точке $x \in X_1$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек X_1, сходящейся в пространстве X_1 к x, последовательность $\{Ax_n\} \subset X_2$ сходится в X_2 к элементу Ax.*

Оператор $A \colon X_1 \to X_2$ называется секвенциально непрерывным на X_1, если он секвенциально непрерывен в каждой точке пространства X_1.

2. Пусть X — вещественное линейное пространство со сходимостью G и θ — его нулевой элемент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5*Замкнутое выпуклое множество $K \subset X$ называется конусом, если из $x \in K$, $x \neq \theta$ следует, что $\alpha x \in K$ при $\alpha \geq 0$ и $-x \notin K$.*

Любой конус $K \subset X$ позволяет ввести полуупорядоченность: $x \geqslant y$ (равносильно $y \leqslant x$), если $x - y \in K$. Элементы $x \geqslant \theta$ (то есть $x \in K$) называются положительными.

Использование полуупорядоченности при изучении операторов, действующих в X опирается на знание свойств отношения $\geqslant$.

Предложение 1. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две последовательности, G-сходящиеся соответственно к точкам x_0 и y_0 в пространстве X, полуупорядоченном при помощи конуса K,*

$$x_0 = G\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n, \qquad y_0 = G\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n,$$

причем

$$x_n \leqslant y_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Тогда $x_0 \leqslant y_0$.

Доказательство. Соотношение (1) означает, что $x_n - y_n \in K$ ($n = 1, 2, \ldots$). В силу замкнутости конуса K, предел $x_0 - y_0$ последовательности $\{x_n - y_n\}$ также принадлежит K. □

Наличие полуупорядочения позволяет ввести понятия мажоранты, миноранты, супремума и инфимума.

Элемент $z \in X$ называется *мажорантой* или *верхней границей* множества $M \subset X$, если $x \leqslant z$ при всех $x \in M$.

Аналогично, если $x \geqslant s$ для всех $x \in M$, то s называется *минорантой* или *нижней границей* множества M.

Мажоранта $\tilde{z}$ называется *супремумом* или *точной верхней границей* и обозначается $\tilde{z} = \sup M$, если все другие мажоранты z удовлетворяют неравенству $\tilde{z} \leqslant z$.

Аналогично миноранту $\tilde{s}$ называют *инфимумом* или *точной нижней границей* и пишут $\tilde{s} = \inf M$, если $\tilde{s} \geqslant s$ для любой миноранты s.

Если множество M имеет мажоранту, то его называют *ограниченным сверху*; если оно имеет миноранту — *ограниченным снизу*.

В каждом конкретном случае специфика конуса, при помощи которого вводится полуупорядочение в пространстве X со сходимостью, может обеспечить наличие дополнительных свойств у отношения $\leqslant$. Как и в случае B-пространств [2], представляют интерес разновидности конусов, обеспечивающих дополнительные свойства полуупорядочения.

Ниже всюду через X будем обозначать вещественное линейное пространство со сходимостью, полуупорядоченное при помощи конуса K.

Определение 6*Конус K в X называется миниэдральным, если каждое конечное число элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ имеет точную верхнюю границу $\tilde{z} = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, и сильно миниэдральным, если точная верхняя граница существует у любого ограниченного множества.*

Определение 7*Конус K в пространстве X называется правильным, если каждая неубывающая последовательность*

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots x_n \leqslant \ldots, \tag{2}$$

ограниченная сверху некоторым элементом

$$x_n \leqslant y \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

G-сходится в X.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.14 из книги [2].

Теорема 1*Пусть в пространстве (X, G) конус K правилен и миниэдрален. Тогда каждая ограниченная сверху последовательность имеет точную верхнюю границу.*

Доказательство. Пусть

$$x_n \leqslant z \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Тогда

$$y_n = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leqslant z \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Так как последовательность $\{y_n\}$ не убывает и ограничена сверху, то она сходится к некоторому пределу $z_0 \in X$. Переходя к пределу в неравенстве $y_n \leqslant y_{n+k}$ при $k \to \infty$, получим $y_n \leqslant z_0$ для $n = 1, 2, \ldots$, откуда следует, что $x_n \leqslant z_0$ для $n = 1, 2, \ldots$

Допустим, что выполнены соотношения (4). Тогда выполнены соотношения (5). Переходя в них к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство $z_0 \leqslant z$. Значит, z_0 является точной верхней границей последовательности $\{x_n\}$. □

Определение 8*Конус K в пространстве X называется нормальным, если из соотношений $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $x_n \overset{G}{\to} u$, $z_n \overset{G}{\to} u$ следует, что $y_n \overset{G}{\to} u$.*

3. Тот факт, что пространство (X, G) полуупорядочено при помощи некоторого конуса K, может использоваться при изучении оператора A, действующего в (X, G), лишь в том случае, когда оператор A обладает свойствами, связанными с полуупорядоченностью.

Определение 9*Оператор A, действующий в пространстве X, называется*

положительным, если $A(K) \subset K$;

монотонным на множестве $D \subseteq X$, если из $x, y \in D, x \geqslant y$ следует, что $A(x) \geqslant A(y)$.

Для нелинейных операторов указанные свойства независимы. Для линейного оператора из свойства положительности следует монотонность.

Множество элементов $x \in X$, удовлетворяющих неравенствам

$$v_0 \leqslant x \leqslant y,$$

где v_0, w_0 — фиксированные элементы из X, называется конусным отрезком и обозначается через $\langle v_0, w_0 \rangle$.

В пространстве X с нормальным конусом K конусной отрезок является ограниченным множеством.

Пусть для монотонного оператора A, действующего в X, могут быть указаны такие элементы v_0 и w_0, что $v_0 \leqslant w_0$ и

$$A(v_0) \geqslant v_0, \qquad A(w_0) \leqslant w_0. \tag{6}$$

Тогда оператор A оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$. Действительно, в этом случае неравенства $v_0 \leqslant x \leqslant w_0$ влекут за собой неравенства

$$v_0 \leqslant A(v_0) \leqslant A(x) \leqslant A(w_0) \leqslant w_0. \tag{7}$$

Построим последовательности

$$v_n = A(v_{n-1}), \quad w_n = A(w_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Первая из них в силу (6) монотонно возрастает и ограничена сверху, а вторая монотонно убывает и ограничена снизу. Если конус K правильный, то эти последовательности сходятся. Если оператор A секвенциально непрерывен, то в равенствах (8) можно перейти к пределу. Значит,

$$v^* = A(v^*), \quad w^* = A(w^*), \tag{9}$$

где v^* — предел последовательности $\{v_n\}$, а w^* — предел последовательности $\{w_n\}$. При этом элементы v^* и w^* могут быть различными.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2*Пусть K — правильный конус в X и секвенциально непрерывный и монотонный на конусном отрезке $\langle v_0, w_0 \rangle$ оператор A преобразует этот отрезок в себя. Тогда оператор A имеет на $\langle v_0, w_0 \rangle$, по крайней мере, одну неподвижную точку. При этом последовательности (8) сходятся к неподвижным точкам оператора A.*

Следующая теорема гарантирует существование неподвижной точки у разрывного оператора A, действующего в пространстве X.

Теорема 3(Принцип Бирхгофа—Тарского). *Пусть конус K в пространстве X сильно миниэдрален. Тогда любой монотонный оператор A (необязательно непрерывный), оставляющий инвариантным конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$, имеет на нем, по крайней мере, одну неподвижную точку.*

Résumé

In the paper it is proved a fixed point theorems for an operators that are monotone on a cone segments.

Библиографический список

[1] Dudley R. M. *On sequential convergence*// Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 112. P. 483–507.

[2] Красносельский М. А. *Положительные решения операторных уравнений.* М.: Физматгиз, 1962.

[3] Pap E. *Functionalna analiza*/Institut of Mathematics. Novi Sad, 1982.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: shirokov@petrsu.ru