Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 8, 2001

УДК 517.5

ОБОБЩЕННЫЕ СДВИГИ БЕССЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В МЕТРИКЕ L_2. II

С. С. Платонов

В работе рассматриваются некоторые задачи теории приближений функций на промежутке $[0, +\infty)$ в метрике L_2 с некоторым весом целыми функциями экспоненциального типа. Используемые в задачах модули непрерывности строятся при помощи операторов обобщенного сдвига Бесселя. Доказаны прямые теоремы Джексоновского типа. Введены функциональные пространства типа Никольского – Бесова и получено их описание в терминах наилучших приближений. Настоящая статья представляет собой окончание статьи [17], опубликованной в предыдущем выпуске "Труды ПетрГУ. Сер. Математика". Статья содержит окончание §3, а также §4 и §5. Нумерация формул продолжает нумерацию формул статьи [17].

§ 3. Функции с ограниченным спектром и их свойства

Напомним (см. [14, гл. VIII]), что линейный оператор A в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D = D(A) \subset H$ называется в существенном самосопряженным, если его замыкание $\bar{A}$ является самосопряженным оператором. Отметим также, что для самосопряженного в существенном оператора A справедливо равенство $\bar{A} = A^*$ (т. е. замыкание оператора A совпадает с сопряженным оператором). Оператор A называется положительным, если $(A\varphi, \varphi) \geq 0$, и строго положительным, если $(A\varphi, \varphi) \geq c(\varphi, \varphi)$ для всех $\varphi \in D$ и некоторого $c > 0$.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99-01-00782

Лемма 3.2. *Оператор Бесселя $\mathcal{B} = \mathcal{B}_t$ с областью определения $D = \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ в существенном самосопряженный.*

Доказательство. Интегрированием по частям проверяется симметричность оператора $\mathcal{B}$, т. е.

$$\int (\mathcal{B}f)(t)\,g(t)\,t^{2\alpha+1}\,dt = \int f(t)\,(\mathcal{B}g)(t)\,t^{2\alpha+1}\,dt \tag{3.3}$$

для любых $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Более того, формула (3.3) справедлива для любых $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, $g \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$.

Заметим, что оператор $(-\mathcal{B})$ положительный. Это следует из соотношения

$$(\mathcal{B}\varphi, \varphi) = -\int \left|\frac{d\varphi}{dt}(t)\right|^2 t^{2\alpha+1}\,dt,$$

которое проверяется интегрированием по частям. Оператор $(-\mathcal{B}+1)$ строго положительный, так как $((-\mathcal{B}+1)\varphi, \varphi) \geq (\varphi, \varphi)$ для всякого $\varphi \in D$. Ясно, что оператор $\mathcal{B}$ самосопряжен в существенном тогда и только тогда, когда в существенном самосопряжен оператор $(-\mathcal{B}+1)$.

Для строго положительного симметричного оператора A существует следующий критерий самосопряженности в существенном (см. [15, гл.X, теор. X.26]): A самосопряжен в существенном тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A^* = \{0\}$. Чтобы доказать, что оператор $(-\mathcal{B}+1)$ самосопряжен в существенном достаточно проверить, что $\operatorname{Ker}(-\mathcal{B}^*+1) = \{0\}$.

Пусть

$$(-\mathcal{B}+1)^* u = 0, \qquad u \in D(\mathcal{B}^*). \tag{3.4}$$

В силу того, что область определения оператора $\mathcal{B}$ равна $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, равенство (3.4) эквивалентно равенству

$$(-\mathcal{B}+1)u = 0, \qquad u \in L_{2,\alpha}, \tag{3.5}$$

где производные понимаются в смысле теории обобщенных функций, т. е. для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ должно выполняться равенство

$$\int u(t)(-\mathcal{B}+1)\varphi(t)\,t^{2\alpha+1}dt = 0$$

или

$$\int u(t)(\mathcal{B}\varphi)(t)\,t^{2\alpha+1}dt. \tag{3.6}$$

Так как дифференциальный оператор $(-\mathcal{B}+1)$ эллиптический на множестве $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, то из теорем регулярности для эллиптических уравнений следует, что функция u должна быть гладкой (класса C^∞) четной функцией на множестве $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и является там решением уравнения $\mathcal{B}u = u$ в классическом смысле. На интервале $(0,+\infty)$ совокупность всех решений уравнения $\mathcal{B}u = u$ задается формулой

$$u(t) = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t),$$

где $u_1(t), u_2(t)$ — фундаментальная система решений, а c_1 и c_2 — произвольные постоянные. В качестве фундаментальной системы решений можно взять функции (см. [10])

$$u_1(t) = \frac{J_\alpha(it)}{(it)^\alpha}, \quad u_2(t) = \frac{Y_\alpha(it)}{(it)^\alpha},$$

где $i = \sqrt{-1}$, $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя первого рода, $Y_\alpha(z)$ — функция Бесселя второго рода. Заметим, что $u_1(t) = 2^{-\alpha}(\Gamma(\alpha+1))^{-1} j_\alpha(it)$, поэтому $u_1(t)$ — гладкая четная функция на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. С помощью интегрирования по частям легко проверяется, что $u_1(t)$ удовлетворяет соотношению (3.6). С другой стороны, проверим, что функция $u_2(t)$ не удовлетворяет соотношению (3.6). Возьмем любую функцию $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, такую, что $\varphi(t) = 1$ при $|t| \le 1$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ — произвольное число. Дважды проинтегрировав по частям, получаем, что

$$\int_\varepsilon^\infty u_2(t)\,(\mathcal{D})(t)\,t^{2\alpha+1}dt = \int_\varepsilon^\infty u_2(t)\,\frac{d}{dt}(t^{2\alpha+1}\frac{d\varphi}{dt})\,dt =$$

$$= \varepsilon^{2\alpha+1}\frac{du_2}{dt}(\varepsilon) + \int_\varepsilon^\infty (\mathcal{D}u_2)(t)\,\varphi(t)\,t^{2\alpha+1}dt =$$

$$= \varepsilon^{2\alpha+1}\frac{du_2}{dt}(\varepsilon) + \int_\varepsilon^\infty u_2(t)\,\varphi(t)\,t^{2\alpha+1}dt. \tag{3.7}$$

Из разложения функции Бесселя в степенной ряд следует, что при $t \to 0$

$$u_2(t) = Ct^{-2\alpha} + O(t^{-2\alpha+1}), \tag{3.8}$$

где C — некоторое ненулевое число (случай $\alpha = 0$ особый, тогда $u_2(t) = C\ln t + O(1)$). Из (3.8) следует, что

$$\varepsilon^{2\alpha+1}\frac{du_2}{dt}(\varepsilon) = C(-2\alpha) + O(\varepsilon).$$

Переходя в (3.7) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что

$$\int\limits_0^\infty u_2(t)\,(\mathcal{D}\varphi)(t)\,t^{2\alpha+1}dt = -2\alpha C + \int\limits_0^\infty u_2(t)\,\varphi(t)\,t^{2\alpha+1}dt,$$

т. е. (3.6) не выполняется при $\alpha \neq 0$. Случай $\alpha = 0$ рассматривается аналогично.

Следовательно, все функции $u(t)$, удовлетворяющие условию (3.6), задаются формулой $u(t) = c_1 u_1(t)$, где c_1 — произвольная постоянная. Из асимптотики функций Бесселя следует, что $u_1(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, поэтому функция $c_1\,u_1(t)$ может принадлежать пространству $L_{2,\alpha}$ только при $c_1 = 0$, откуда вытекает, что $u = 0$. □

Следствие 3.1. *Если функции f и $\mathcal{B}f$ принадлежат пространству $L_{2,\alpha}$ (действие оператора $\mathcal{B}$ понимается в смысле теории обобщенных функций), то найдется последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, такая, что $f_n \to f$ и $\mathcal{B}f_n \to \mathcal{B}f$ в пространстве $L_{2,\alpha}$.*

Действительно, из определения сопряженного оператора $\mathcal{B}^*$ следует, что $f \in D(\mathcal{B}^*)$ и $g = \mathcal{B}^* f$ тогда и только тогда, когда $g = \mathcal{B}f$ в смысле теории обобщенных функций. Остается воспользоваться тем, что из самосопряженности в существенном следует, что замыкание оператора $\mathcal{B}$ совпадает с $\mathcal{B}^*$.

Лемма 3.3. *Пусть функции f и $\mathcal{B}f$ принадлежат пространству $L_{2,\alpha}$, тогда*

$$(\widehat{\mathcal{B}f})(\lambda) = -\lambda^2\widehat{f}(\lambda). \tag{3.9}$$

Доказательство. По следствию 3.1 существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, для которой $f_n \to f$ и $\mathcal{B}f_n \to \mathcal{B}f$ в $L_{2,\alpha}$, поэтому (3.9) достаточно доказать для $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Используя симметричность оператора $\mathcal{B}$ (см. (3.3)), получим, что

$$(\widehat{\mathcal{B}f})(\lambda) = \int (\mathcal{B}f)(t)\,j_\alpha(\lambda t)\,t^{2\alpha+1}\,dt =$$

$$= \int f(t)\,(\mathcal{B} j_\alpha(\lambda t))\, t^{2\alpha+1} dt = -\lambda^2 \int f(t)\, j_\alpha(\lambda t)\, t^{2\alpha+1}\, dt = -\lambda^2 \widehat{f}(\lambda). \ \square$$

Лемма 3.4. (Неравенство типа Бернштейна). *Для любой функции $f \in \mathcal{I}_\nu$ справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{B} f\|_{2,\alpha} \le \nu^2 \|f\|_{2,\alpha}. \tag{3.10}$$

Доказательство. Используя лемму 3.3 и равенство Парсеваля, получим

$$\|\mathcal{B} f\|_{2,\alpha}^2 = A \int_0^\nu |\lambda|^4\, |\widehat{f}(\lambda)|\, \lambda^{2\alpha+1}\, d\lambda \le \nu^4\, \|f\|_{2,\alpha}^2,$$

откуда следует неравенство (3.10). $\square$

В следующей лемме будет получено несколько оценок для функций $j_\alpha(t)$, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 3.5. *Для $t \in \mathbb{R}$ справедливы следующие неравенства:*

1) $|j_\alpha(t)| \le 1$;
2) $1 - j_\alpha(t) \le t^2/2$;
3) $1 - j_\alpha(t) \ge c$ *при* $|t| \ge 1$, *где* $c > 0$ — *некоторая постоянная, зависящая только от* α.

Доказательство. Так как функция $j_\alpha(t)$ четная, то достаточно доказать все неравенства при $t \in \mathbb{R}_+$. Воспользуемся следующим интегральным представлением функции $j_\alpha(t)$ (см. [16, формула № 8.411]):

$$j_\alpha(t) = c_1 \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2\alpha}\, \cos(t\sin\theta)\, d\theta, \tag{3.11}$$

где

$$c_1 = \left(\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2\alpha}\, d\theta \right)^{-1} = \frac{2\,\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}.$$

Из (3.11) сразу следует, что $|j_\alpha(t)| \le 1$ и при $t > 0$ выполняется строгое неравенство $|j_\alpha(t)| < 1$.

Функция $j_\alpha(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$t^{-(2\alpha+1)}\, \frac{d}{dt} \left(t^{2\alpha+1}\, \frac{d}{dt} j_\alpha(t) \right) = -j_\alpha(t) \tag{3.12}$$

с начальными условиями $j_\alpha(0) = 1$ и $j'_\alpha(0) = 0$. Из (3.12) и начальных условий следует, что

$$1 - j_\alpha(t) = \int_0^t s^{-(2\alpha+1)} \left(\int_0^s j_\alpha(u)\, u^{2\alpha+1}\, du \right) ds =$$
$$\le \int_0^t \left(\int_0^s |j_\alpha(u)|\, (u/s)^{2\alpha+1}\, du \right) ds \le \int_0^t \left(\int_0^s du \right) ds = t^2/2,$$

что доказывает неравенство 2). При этом в оценке было использовано, что $0 \le u/s \le 1$ и $|j_\alpha(u)| \le 1$.

Из асимптотических формул для функций Бесселя следует, что $j_\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$, поэтому существует такое число $t_0 > 0$, что при $t \ge t_0$ справедливо неравенство $|j_\alpha(t)| \le 1/2$. Пусть

$$m = \min_{t\in[1,t_0]} (1 - j_\alpha(t)).$$

При $t \ge 1$ выполняется неравенство $1 - j_\alpha(t) \ge c$, если взять $c = \min\{m, 1/2\}$. □

§ 4. Прямые теоремы Джексоновского типа

В этом параграфе будет доказана теорема 1.1. Предварительно докажем частный случай этой теоремы. Необходимые определения приведены в §1.

Теорема 4.1. *При $f \in L_{2,\alpha}$ справедливо неравенство*

$$E_\nu(f)_{2,\alpha} \le c_1\, \omega_k(f, 1/\nu)_{2,\alpha}, \tag{4.1}$$

где c_1 — некоторая положительная постоянная, зависящая только от k и α.

Доказательство. Воспользуемся оператором проектирования P_ν на подпространство $\mathcal{I}_\nu$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\|f - P_\nu(f)\|^2_{2,\alpha} = A \int_\nu^\infty |\widehat{f}(\lambda)|^2\, \lambda^{2\alpha+1}\, d\lambda. \tag{4.2}$$

Из леммы 3.5 вытекает, что

$$1 - j_\alpha(\lambda/\nu) \ge c$$

при $\lambda \geq \nu$, поэтому из (4.2), используя лемму 2.1 и равенство Парсеваля, получим

$$\|f - P_\nu(f)\|_{2,\alpha}^2 \leq \frac{A}{c^{2k}} \int_\nu^\infty (1 - j_\alpha(\lambda/\nu))^{2k} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha+1} \, d\lambda \leq$$
$$\leq \frac{A}{c^{2k}} \int_0^\infty (1 - j_\alpha(\lambda/\nu))^{2k} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha+1} \, d\lambda =$$
$$= c^{-2k} \|\big(I - T^{1/\nu}\big)^k f(t)\|_{2,\alpha}^2 \leq c^{-2k} \big(\omega_k(f, 1/\nu)_2\big)^2,$$

откуда следует неравенство (4.1) с $c_1 = c^{-k}$. □

Доказательство теоремы 1.1. Из лемм 2.1, 3.5, 3.3 и равенства Парсеваля следует, что

$$\|(I - T^h) f\|_{2,\alpha}^2 = A \int_0^\infty (1 - j_\alpha(\lambda h))^2 |\widehat{f}(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha+1} d\lambda \leq$$
$$\leq A(h^4/4) \int_0^\infty \lambda^4 |\widehat{f}(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha+1} \, d\lambda = (1/4) h^4 \|\mathcal{B} f\|_{2,\alpha}^2.$$

Следовательно,

$$\|(I - T^h) f\|_{2,\alpha} \leq (1/2) h^2 \|\mathcal{B} f\|_{2,\alpha}. \tag{4.3}$$

Рассуждая как при доказательстве теоремы 4.1, получим, что

$$\|f - P_\nu(f)\|_{2,\alpha} \leq c^{-(k+s)} \, \|(I - T^{1/\nu})^{k+s} f(t)\|_{2,\alpha}. \tag{4.4}$$

Последовательно s раз применяя неравенство (4.3) к правой части неравенства (4.4), получим, что

$$\|f - P_\nu(f)\|_{2,\alpha} \leq c^{-(k+s)} 2^{-s} \nu^{-2s} \, \|(I - T^{1/\nu})^k \mathcal{B}^s f\|_{2,\alpha} \leq$$
$$\leq c_2 \, \nu^{-2s} \, \omega_k(\mathcal{B}^s f, 1/\nu)_{2,\alpha},$$

где $c_2 = c^{-(k+s)} 2^{-s}$.

§ 5. Пространства Никольского—Бесова и их аппроксимационная характеристика

Для доказательства обратных теорем теории приближений используются неравенства типа Бернштейна. Кроме неравенства из леммы 3.4 нам потребуется еще одно неравенство типа Бернштейна.

Лемма 5.1. *При $\Phi(t) \in \mathcal{I}_\nu$ и $h > 0$ справедливо неравенство*

$$||\Delta_h^k \Phi(t)||_{2,\alpha} \le (\nu h)^{2k} ||\Phi||_{2,\alpha}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Используя леммы 2.1 и 3.5 и равенство Парсеваля, получаем:

$$\begin{aligned} ||\Delta_h \Phi||_{2,\alpha} &= ||\Phi - T^h\Phi||_{2,\alpha} = A^{1/2}||\widehat{\Phi} - \widehat{T^h\Phi}||_{2,\alpha} \\ &= A^{1/2}||(1 - j_\alpha(\lambda h))\widehat{\Phi}(\lambda)||_{2,\alpha} \le A^{1/2}(h^2/2)\nu^2||\widehat{\Phi}_{2,\alpha} \\ &= (1/2)(\nu h)^2||\Phi||_{2,\alpha} \le (\nu h)^2||\Phi||_{2,\alpha}. \end{aligned}$$

При этом было использовано свойство, что $\widehat{\Phi}(\lambda) = 0$ при $\lambda > \nu$. Аналогично проверяется, что

$$||\Delta_h^k \Phi||_{2,\alpha} \le (\nu h)^{2k} ||\Phi||_{2,\alpha}. \qquad \square$$

Пространства $H^r_{2,\alpha}$ и $B^r_{2,q,\alpha}$ определены в §1. В теоремах 1.2 и 1.3 приводятся описания этих пространств через наилучшие приближения функциями из $\mathcal{I}_\nu$. Для краткости пусть $||\cdot|| := ||\cdot||_{2,\alpha}$.

Доказательство теоремы 1.2. Если $f \in H^r_{2,\alpha}$, то

$$\omega_k(\mathcal{B}^s f, \delta)_{2,\alpha} \le h^r_{2,\alpha}(f)\, \delta^{r-2s}$$

и из теоремы 4.2 следует, что

$$E_\nu(f)_{2,\alpha} \le c_1 \frac{\omega_k(\mathcal{B}^s f, 1/\nu)_{2,\alpha}}{\nu^{2s}} \le c_1 \frac{h^r_{2,\alpha}(f)}{\nu^r}.$$

Для доказательства обратного неравенства используется обычная методика, идущая от С. Н. Бернштейна (см. [10]). Пусть выполняется неравенство (1.8). Выберем последовательность функций $\psi_n \in \mathcal{I}_{2^n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ так, чтобы

$$||f - \psi_n|| \le A\, 2^{-nr}.$$

Пусть $\varphi_0 = \psi_0$ и $\varphi_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ при $n \ge 1$. Тогда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n, \tag{5.2}$$

ряд сходится в $L_{2,\alpha}$ и $\varphi_n \in \mathcal{I}_{2^n}$. Оценим сверху нормы слагаемых в (5.2):

$$\|\varphi_0\| = \|\psi_0\| \le \|\psi_0 - f\| + \|f\| \le \|f\| + A. \tag{5.3}$$

$$\|\varphi_n\| \le \|f - \psi_n\| + \|f - \psi_{n-1}\| \le A\Big(\frac{1}{2^{nr}} + \frac{1}{2^{(n-1)r}}\Big) = A\frac{(1+2^r)}{2^{nr}}. \tag{5.4}$$

Объединяя неравенства (5.3) и (5.4), можно написать, что

$$\|\varphi_n\| \le c_3 2^{-nr}(\|f\| + A), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.5}$$

Пусть l — одно из чисел $1, 2, \ldots, s$. Из леммы 3.4 получаем, что

$$\|\mathcal{B}^l \varphi_n\| \le (2^n)^{2l}\,\|\varphi_n\|. \tag{5.6}$$

Из (5.5), (5.6) и того, что $r - 2l > 0$, следует, что в $L_{2,\alpha}$ сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}^l \varphi_n,$$

а так как оператор $\mathcal{B}$ замкнутый, то

$$\mathcal{B}^l f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}^l \varphi_n \in L_{2,\alpha}.$$

В частности, функция $g = \mathcal{B}^s f$ принадлежит пространству $L_{2,\alpha}$.

Пусть $\Phi_n := \mathcal{B}^s \varphi_n$, тогда

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n, \qquad \Phi_n \in \mathcal{I}_{2^n}, \qquad \|\Phi_n\| \le \frac{c_4}{2^{n(r-2s)}}(\|f\| + A). \tag{5.7}$$

Возьмем произвольное число $h > 0$. Из непрерывности разностного оператора Δ_h^k следует, что

$$\Delta_h^k g = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_h^k \Phi_n.$$

Подберем неотрицательное целое число N так, чтобы

$$2^{-N} \le h < 2^{-(N-1)} \tag{5.8}$$

(если $h \geq 1$, то в (5.8) оставляем только левое неравенство). Тогда

$$\Delta_h^k g = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_h^k \Phi_n + \sum_{n=N}^{\infty} \Delta_h^k \Phi_n \tag{5.9}$$

(при $N = 0$ в (5.9) остается только второе слагаемое). Оценим слагаемые в (5.9). При $n \leq N - 1$, используя неравенства (5.1), (5.7) и (5.8), получим

$$\|\Delta_h^k \Phi_n\| \leq (2^n h)^{2k} \|\Phi_n\| \leq c_5(\|f\| + A)\, 2^{n(2s+2k-r)} 2^{-2(N-1)k}.$$

Тогда, используя (5.8),

$$\begin{aligned} \|\sum_{n=0}^{N-1} \Delta_h^k \Phi_n\| &\leq \frac{c_5(\|f\| + A)}{2^{2k(N-1)}} \sum_{n=0}^{N-1} 2^{(2s+2k-r)n} = \\ = \frac{c_5(\|f\| + A)}{2^{2k(N-1)}} & \frac{2^{(2s+2k-r)N} - 1}{2^{(2s+2k-r)} - 1} \leq c_6\, (\|f\| + A) h^{r-2s}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

При $n \geq N$ воспользуемся очевидным неравенством

$$\|\Delta_h^k \Phi_n\| \leq 2^k \|\Phi_n\|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\sum_{n=N}^{\infty} \Delta_h^k \Phi_n\| &\leq 2^k c_4(\|f\| + A) \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-(r-2s)n} = \\ &= 2^k c_4(\|f\| + A)\, 2^{-N(r-2s)} (1 - 2^{(2s-r)})^{-1} = \\ &\leq c_7(\|f\| + A)\, h^{r-2s}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Из (5.10) и (5.11) следует, что

$$\|\Delta_h^k g\| \leq c_8\, h^{r-2s} (\|f\| + A),$$

откуда

$$\omega_k(g, \delta)_{2,\alpha} \leq c_8(\|f\| + A) \delta^{r-2s}, \qquad \delta > 0,$$

и

$$h_{2,\alpha}^r(f) \leq c_8(\|f\| + A).$$

В результате получаем, что $f \in H^r_{2,\alpha}$ и выполняется неравенство (1.9).

Пусть
$$\widetilde{h}^r_{2,\alpha}(f) := \sup_{\nu \geq 1} \nu^r \, E_\nu(f)_{2,\alpha}.$$
Из теоремы 1.2 следует, что пространство $H^r_{2,\alpha}$ состоит из тех и только тех функций $f \in L_{2,\alpha}$ для которых $\widetilde{h}^r_{2,\alpha}(f) < \infty$. При этом норма в $H^r_{2,\alpha}$ эквивалентна норме
$$^1\|f\|_{H^r_{2,\alpha}} := \|f\|_{2,\alpha} + \widetilde{h}^r_{2,\alpha}(f).$$
В частности, при различных k, s таких, что $2k > r - 2s > 0$, пространства $H^r_{2,\alpha}$ совпадают и их нормы эквивалентны.

В следующей теореме будут получены различные эквивалентные нормировки пространств $B^r_{2,q,\alpha}$, в частности, из нее будет следовать теорема 1.3. Как и раньше, пусть $r > 0$, $a > 1$ — действительные числа, k и s — произвольные неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $2k > r - 2s > 0$. Будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит пространству ${}^jB^r_{2,q,\alpha}$, $j = 1, 2, 3$, если $f \in L_{2,\alpha}$ и конечна полунорма ${}^jb^r_{2,q,\alpha}(f)$, где:

$$
\begin{aligned}
{}^1b^r_{2,q,\alpha}(f) \quad &:= \quad b^r_{2,q,\alpha}(f) \quad (\text{полунорма } b^r_{2,q,\alpha}(f) \text{ определена в } \S 1);\\
{}^2b^r_{2,q,\alpha}(f) \quad &:= \quad \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^a \frac{(\omega_k(\mathcal{B}^s f, \delta)_{2,\alpha})^q}{\delta^{(r-2s)q}} \, \frac{d\delta}{\delta}\right)^{1/q} & \text{при} \quad q < \infty,\\ \displaystyle\sup_{0<\delta\leq a} \delta^{-(r-2s)} \, \omega_k(\mathcal{B}^s f, \delta)_{2,\alpha} & \text{при} \quad q = \infty; \end{cases}\\
{}^3b^r_{2,q,\alpha}(f) \quad &:= \quad \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq} \, (E_{a^j}(f)_{2,\alpha})^q\right)^{1/q} & \text{при} \quad q < \infty,\\ \displaystyle\sup_{j\in\mathbb{Z}_+} a^{jr} \, E_{a^j}(f)_{2,\alpha} & \text{при} \quad q = \infty; \end{cases}\\
{}^4b^r_{2,q,\alpha}(f) \quad &:= \quad \begin{cases} \inf \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq} \, \|Q_{a^j}\|^q_{2,\alpha}\right)^{1/q} & \text{при} \quad q < \infty,\\ \inf \left(\displaystyle\sup_{j\in\mathbb{Z}_+} \|Q_{a^j}\|_{2,\alpha}\right) & \text{при} \quad q = \infty, \end{cases}
\end{aligned}
$$

нижняя грань берется по всем представлениям f в виде сходящегося в $L_{2,\alpha}$ ряда из функций с ограниченным спектром

$$f(t)=\sum_{j=0}^{\infty} Q_{a^j}(t), \qquad Q_{a^j}(t)\in \mathcal{I}_{a^j}.$$

Пространства ${}^jB^r_{2,q,\alpha}$ являются банаховыми пространствами относительно норм

$$\|f\|_{{}^jB^r_{2,q,\alpha}} := \|f\|_{2,\alpha} + {}^jb^r_{2,q,\alpha}(f). \tag{5.12}$$

Теорема 5.1. *Пространства ${}^jB^r_{2,q,\alpha}$, $j=1,2,3,4$, совпадают и их нормы (5.12) эквивалентны (т. е. банаховые пространства ${}^jB^r_{2,q,\alpha}$ эквивалентны).*

Отметим, что из эквивалентности БП ${}^1B^r_{2,q,\alpha}$ и ${}^3B^r_{2,q,\alpha}$ следует теорема 1.3. Для краткости будем использовать обозначения ${}^jB := {}^jB^r_{2,q,\alpha}$, ${}^jb := {}^jb^r_{2,q,\alpha}$, $E_N(f) := E_N(f)_{2,q,\alpha}$, $\|f\| := \|f\|_{2,\alpha}$ и т. д. Выражение $V_1 \hookrightarrow V_2$ будет обозначать, что БП V_1 вложено в БП V_2.

Доказательство теоремы 5.1. Общая схема доказательства соответствует схеме доказательства аналогичных теорем в [10] для обычных модулей непрерывности. Будем всюду предполагать, что $q<\infty$. Более простой случай $q=\infty$ может быть рассмотрен аналогично.

1°. Вложение ${}^1B \hookrightarrow {}^2B$ очевидно. Докажем, что ${}^2B \hookrightarrow {}^3B$. Пусть $f\in {}^2B$, тогда

$$\begin{aligned}\left({}^2b(f)\right)^q &= \int_0^a \left(\omega_k(\mathcal{B}^s f,\delta)\right)^q\ \delta^{(2s-r)q-1}\,d\delta = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\int_{a^{-j}}^{a^{1-j}} \left(\omega_k(\mathcal{B}^s f,\delta)\right)^q\ \delta^{(2s-r)q-1}\,d\delta.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Пользуясь монотонностью модуля непрерывности $\omega_k(f,\delta)$ по δ и теоремой 1.1, получим, что

$$\begin{aligned}&\int_{a^{-j}}^{a^{1-j}} \left(\omega_k(\mathcal{B}^s f,\delta)\right)^q \delta^{(2s-r)q-1}\,d\delta \ge \\ &\ge \left(\omega_k(\mathcal{B}^s f,a^{-j})\right)^q \left(a^{1-j}\right)^{(2s-r)q-1}\left(a^{1-j}-a^{-j}\right) \ge c_1\, a^{jrq}\left(E_{a^j}(f)\right)^q_{,}\end{aligned} \tag{5.14}$$

где постоянная c_1 не зависит от f и j. Из (5.13) и (5.14) следует, что

$$\left({}^2b(f)\right)^q \geq c_1 \left({}^3b(f)\right)^q,$$

откуда вытекают неравенство ${}^3b(f) \leq c_2\, {}^2b(f)$ и вложение ${}^2B \hookrightarrow {}^3B$.

2°. Докажем, что ${}^3B \hookrightarrow {}^4B$. Пусть $f \in {}^3B$. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ возьмем функцию $g_{a^j} \in \mathcal{I}_{a^j}$, удовлетворяющую условию

$$\|f - g_{a^j}\| \leq 2\, E_{a^j}(f).$$

Пусть

$$Q_{a^0} = g_{a^0}, \quad Q_{a^j} = g_{a^j} - g_{a^{j-1}} \quad \text{при} \quad j \geq 1.$$

Тогда

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_{a^j},$$

ряд сходится в $L_{2,\alpha}$, так как $E_{a^j}(f) \to 0$ при $j \to \infty$.

Заметим, что

$$\|Q_{a^0}\|\|\|f\| + \|f - g_0\| \leq \|f\| + 2\, E_{a^0}(f) \leq \|f\|,$$
$$\|Q_{a^j}\| \leq \|g_{a^j} - f\| + \|f - g_{a^{j-1}}\| \leq 4\, E_{a^{j-1}}(f), \quad j \geq 1.$$

Используя эти неравенства, получим, что

$$\left({}^4b(f)\right)^q \leq \sum_{j=0}^{\infty} a^{jqr}\, \|Q_{a^j}\|^q \leq 3^q\, \|f\|^q + \sum_{j=1}^{\infty} 4^q\, a^{jqr}\, \left(E_{a^{j-1}}(f)\right)^q,$$

откуда следует, что

$${}^4b(f) \leq c_3 \left(\|f\| + \left(\sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq}\, \left(E_{a^j}(f)\right)^q\right)^{1/q}\right) = c_3\, \|f\|_{{}^3B}.$$

Из последнего неравенства и вытекает вложение ${}^3B \hookrightarrow {}^4B$.

3°. Докажем, что ${}^4B \hookrightarrow {}^1B$. Пусть $f \in {}^4B$, $\varepsilon > 0$, тогда f можно представить в виде суммы (j во всех суммах пробегает $\mathbb{Z}_+$)

$$f = \sum Q_{a^j}, \quad Q_{a^j} \in \mathcal{I}_{a^j},$$

причем

$$\left(\sum a^{jqr}\, \|Q_{a^j}\|^q\right)^{1/q} \leq {}^4b(f) + \varepsilon. \tag{5.15}$$

Проверим, что ряд $\sum \mathcal{B}^s Q_{a^j}$ сходится в $L_{2,\alpha}$. Для этого заметим, что

$$\|\mathcal{B}^s Q_{a^j}\| \le a^{2js}\|Q_{a^j}\| = a^{-(r-2s)j} a^{jr}\, \|Q_{a^j}\|$$

(использовано неравенство типа Бернштейна из леммы 3.4). Воспользовавшись неравенством Гельдера, получим

$$\sum \|\mathcal{B}^s Q_{a^j}\| \le \sum a^{-(r-2s)j} a^{jr} \|Q_{a^j}\| \le$$
$$\le c_4 \left(\sum a^{jrq}\, \|Q_{a^j}\|^q\right)^{1/q} \le c_4\, \left({}^4b(f) + \varepsilon\right), \tag{5.16}$$

следовательно, ряд $\sum \mathcal{B}^s Q_{a^j}$ сходится в $L_{2,\alpha}$. Из замкнутости оператора $\mathcal{B}$ вытекает, что

$$\mathcal{B}^s f = \sum \mathcal{B}^s Q_{a^j} \in L_{2,\alpha}. \tag{5.17}$$

Отметим также, что из (5.16) и (5.17) следует, что

$$\|\mathcal{B}^s f\| \le c_4\, \left({}^4b(f) + \varepsilon\right). \tag{5.18}$$

Используя (5.18) и очевидное неравенство

$$\omega_k(\mathcal{B}^s f, \delta) \le 2^k\, \|\mathcal{B}^s f\|,$$

получим, что

$$\int_1^\infty (\omega_k(\mathcal{B}^s f, \delta))^q\ \delta^{-(r-2s)q-1}\, d\delta \le$$
$$\le 2^{kq} \|\mathcal{B}^s f\|^q \int_1^\infty \delta^{-(r-2s)q-1}\, d\delta \le c_5\, \left({}^4b(f) + \varepsilon\right). \tag{5.19}$$

Для любого натурального N можно написать равенство

$$\Delta_h^k(\mathcal{B}^s f) = \sum_{j=0}^{N} \Delta_h^k(\mathcal{B}^s Q_{a^j}) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \Delta_h^k(\mathcal{B}^s Q_{a^j}).$$

Используя неравенства (5.1) и (3.10), получим, что

$$\|\Delta_h^k(\mathcal{B}^s f)\| \le h^{2k} \sum_{j=0}^{N} a^{2j(k+s)} \|Q_{a^j}\| + 2^k \sum_{j=N+1}^{\infty} a^{2js}\, \|Q_{a^j}\|.$$

Тогда

$$\omega_k(\mathcal{B}^s f, a^{-N}) = \sup_{0<h\le a^{-N}} \|\Delta_h^k(\mathcal{B}^s f)\| \le$$
$$\le a^{-2Nk} \sum_{j=0}^{N} a^{2j(k+s)} \|Q_{a^j}\| + 2^k \sum_{j=N+1}^{\infty} a^{2js} \|Q_{a^j}\|.$$

Имеем, делая замену $\delta = a^{-u}$,

$$\int_0^1 (\omega_k(\mathcal{B}^s f, \delta))^q \ \delta^{-(r-2s)q-1}\, d\delta =$$
$$= \log a \int_0^\infty \big(\omega_k(\mathcal{B}^s f, a^{-u})\big)^q \ a^{q(r-2s)u}\, du =$$
$$= \log a \sum_{N=0}^{\infty} \int_N^{N+1} a^{q(r-2s)u} \big(\omega_k(\mathcal{B}^s f, a^{-u})\big)^q \ du \le$$
$$\le \log a \sum_{N=0}^{\infty} \big(\omega_k(\mathcal{B}^s f, a^{-N})\big)^q \ a^{q(r-2s)(N+1)} \le$$
$$\le c_6\, \mathcal{J}_1 + c_7\, \mathcal{J}_2, \tag{5.20}$$

где

$$\mathcal{J}_1 = \sum_{N=0}^{\infty} a^{q(r-2s-2k)N} \left(\sum_{j=0}^{N} a^{2j(k+s)} \|Q_a^j\| \right)^q,$$
$$\mathcal{J}_2 = \sum_{N=0}^{\infty} a^{q(r-2s)N} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} a^{2js} \|Q_{a^j}\| \right)^q.$$

Для выражений $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ в книге [10] (см. [10, пункт 5.6, формулы (17) – (19)]) получены оценки

$$\mathcal{J}_1 \le c_8 \sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq} \|Q_{a^j}\|^q, \tag{5.21}$$

$$\mathcal{J}_2 \le c_9 \sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq} \|Q_{a^j}\|^q. \tag{5.22}$$

Окончательно из (5.19) — (5.22) следует, что

$$\int_0^\infty (\omega_k(\mathcal{B}^s f, \delta))^q \; \delta^{-(r-2s)q-1} \, d\delta \le c_{10} \left({}^4 b(f) + \varepsilon\right)^q ,$$

а отсюда

$${}^1 b(f) \le c_{10} {}^4 b(f),$$

что доказывает вложение ${}^4B \hookrightarrow {}^1B$.

В результате получена цепочка вложений

$${}^1B \hookrightarrow {}^2B \hookrightarrow {}^3B \hookrightarrow {}^4B \hookrightarrow {}^1B,$$

что и завершает доказательство теоремы 5.1. □

Résumé

Some problems of aproximations of functions on half-interval $[0, +\infty)$ in the L_2-metric with certain weight by entire functions of exponential growth are studied. Modules of continuity which used in problems are constructed with help of generalized translations of Bessel. Direct theorems of Jacson type are proved. Nikolskii—Besov type function spaces are defined and their description are obtained in terms of the best approximations.

Библиографический список

[1] Butzer P. L., Behrens H. *Semi-groups of operators and approximation.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967.

[2] Терехин А. П. *Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение*// Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд–во Саратовского гос. ун-та, 1975. Вып. 2. С. 3–28.

[3] Левитан Б. М. *Теория операторов обобщенного сдвига.* М.: Наука, 1973.

[4] Löfström J., Peetre J. *Approximation theorems connected with generalized translations*// Math. Ann. 1969. V. 181. P. 255–268.

[5] Butzer P. L., Stens R. L., Wehrens M. *Higher order moduli of continuity based on the Jacobi translation operator and best approximation*// C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1980. V. 11. No. 2. P. 83–88.

[6] Потапов М. К., Федоров В. М. *О теоремах Джексона для обобщенного модуля гладкости*// Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1985. Т. 182. С. 291–295.

[7] Потапов М. К. *О применении оператора обобщенного сдвига в теории приближений*// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем., механика. 1998. № 3. С. 38–48.

[8] Платонов С. С. *О пространствах Никольского—Бесова, построенных по обобщенным сдвигам Бесселя*// Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Пробл. матем. образования: Тезисы докл. междунар. конф., посвященной 75-летию чл.-корр. РАН Л. Д. Кудрявцева. М.: Изд-во РУДН, 1998. С. 50.

[9] Платонов С. С. *Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений*// Международная конф. "Теория приближений и гарм. анализ" Россия, Тула, 26–29 мая 1998 г. Тула, 1998. С. 210–211.

[10] Левитан Б. М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье*// Успехи мат. наук. 1951. Т. 6. № 2. С. 102–143.

[11] Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука, 1977.

[12] Trimeche K. *Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators*// Mathematical Reports. 1988. V. 4. Part 1. P. 1-282.

[13] Киприянов И. А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи.* М.: Наука, Физматлит, 1997.

[14] Ахиезер Н. И. *К теории спаренных интегральных уравнений*// Ученые записки Харьковского гос. ун-та. 1957. Т. 80. С. 5-21.

[15] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 2. М.: Мир, 1978.

[16] Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: Наука, 1971.

[17] Платонов С. С. *Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций в метрике L_2. I* // Труды ПетрГУ. Сер. Математика. 2000. Вып. 7. С. 70–82.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: platonov@petrsu.ru