Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 9, 2002

УДК 517.54

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ШАРЕ

А. В. Шишкина

В статье изучается граничное поведение голоморфных функций, определенных в единичном шаре.

Пусть $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство векторов $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, где $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Единичным шаром B^n в пространстве $\mathbb{C}^n$ назовем множество всех $z \in \mathbb{C}^n$ таких, что $||z|| = (\langle z, z\rangle)^{1/2} < 1$, где $\langle z, z\rangle = z_1\overline{z}_1 + \ldots + z_n\overline{z}_n$. Если $\varepsilon > 0$, то $B^n_\varepsilon = \varepsilon B^n$.

Пусть $\alpha > 1,\ e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$, тогда область Кораньи — Стейна $\Omega_\alpha = \Omega_\alpha^{e_1}$ с вершиной e_1 есть множество всех $z \in B^n$ таких, что

$$|1 - z_1| < \frac{\alpha}{2}(1 - ||z||^2). \tag{1}$$

. В. Старковым и Я. Годуля в [1] рассматривались вопросы граничного поведения функций, аналитических в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, в угле Штольца, авторами была доказана следующая

Теорема А. *Пусть $f(z)$ — аналитическая в $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функция, $\eta \in (0, \pi/2)$, $c \in \mathbb{C}$, W_η — угол Штольца величиной 2η с вершиной в точке $z = 1$ и существует конечный предел*

$$\lim_{W_\eta \ni z \to 1} f(z)(1 - z)^c = A,$$

тогда для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$ существует предел

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon} \ni z \to 1} f'(z)(1 - z)^{c+1} = Ac.$$

Работа в этом направлении была продолжена в [2], результат обобщался на случай n-мерного комплексного пространства, в частности, была доказана

Теорема B. *Пусть $f(z)$ — голоморфная в B^n функция, $c \in \mathbb{C}$, Ω_α — область Кораньи — Стейна с вершиной в точке e_1 и существует*

$$\lim_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} f(z)(1 - z_1^2 - z_2^2 - ... - z_n^2)^c = A \neq \infty,$$

тогда

1) *для каждого $k = 2, ..., n$ существует $\alpha_1 < \alpha$ такое, что выражение $\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_k}\left(1 - z_1^2 - z_2^2 - ... - z_n^2\right)^{c+\frac{1}{2}}$ ограничено в Ω_{α_1} при $z \to e_1$, но ни для какого α_1 не существует предел*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_k}(1 - z_1^2 - z_2^2 - ... - z_n^2)^{c+\frac{1}{2}}$$

при $c \neq 0$;

2) *существует $\alpha_1 < \alpha$ такое, что*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_1}(1 - z_1^2 - z_2^2 - ... - z_n^2)^{c+1} = 2cA.$$

Справедливо более общее, чем теорема B, утверждение, для доказательства которого нам нужна будет лемма A из [2]. Обозначим $\varphi_a(z), a = (r, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n, r \in (0, 1)$ — автоморфизм шара B^n. Тогда (см. [3])

$$\varphi_a(z) = \left(\varphi_a^{(1)}(z), \ldots, \varphi_a^{(n)}(z)\right),$$

где

$$\varphi_a^{(1)}(z) = \frac{r - z_1}{1 - rz_1}, \quad \varphi_a^{(k)}(z) = -\frac{z_k\sqrt{1 - r^2}}{1 - rz_1}, \; 2 \leq k \leq n,$$

и пусть $\Phi_\varepsilon = \bigcap\limits_{r \in (0,1)} \varphi_a\left(B_\varepsilon^n\right)$.

Лемма A.

1) *Пусть $\alpha > 1$ и $0 < \varepsilon < 1$. Если $\left(\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 < \alpha$, тогда $\Phi_\varepsilon \subset \Omega_\alpha$ в малой окрестности точки e_1.*

2) *Пусть* $\alpha > 1$ *и* $0 < \varepsilon < 1$. *Если*

$$\min\left\{1+\varepsilon^2, \sqrt{1+\frac{4\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2}}\right\} > \alpha,$$

тогда $\Omega_\alpha \subset \Phi_\varepsilon$ *в малой окрестности точки* e_1.

Теорема 1. *Пусть* $f(z)$ — *голоморфная в* B^n *функция,* $a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$, $k = 2, ..., n, c \in \mathbb{C}$ — *фиксированные числа и существует*

$$\lim_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} f(z)(1 - z_1^2 - a_2 z_2^2 - ... - a_n z_n^2)^c = A \neq \infty, \tag{2}$$

тогда

1) *для каждого* $k = 2, ..., n$ *существует* $\alpha_1 < \alpha$ *такое, что функция* $\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_k}\left(1 - z_1^2 - a_2 z_2^2 - ... - a_n z_n^2\right)^{c+\frac{1}{2}}$ *ограничена в* Ω_{α_1} *при* $z \to e_1$, *но ни для какого* α_1 *не существует предел*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_k}(1 - z_1^2 - a_2 z_2^2 - ... - a_n z_n^2)^{c+\frac{1}{2}}$$

при $c \neq 0$, *если c=0, то существует* $\alpha_1 < \alpha$ *такое, что*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_k}(1 - z_1^2 - a_2 z_2^2 - ... - a_n z_n^2)^{c+\frac{1}{2}} = 0;$$

2) *существует* $\alpha_1 < \alpha$ *такое, что*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_1}(1 - z_1^2 - a_2 z_2^2 - ... - a_n z_n^2)^{c+1} = 2cA.$$

Доказательство. Рассмотрим автоморфизм $\varphi_a(z), a = (r, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n, r \in (0, 1)$. Если α и ε такие, как в лемме А, пункт 1), то $\Phi_\varepsilon \subset \Omega_\alpha$ в малой окрестности точки e_1. Очевидно, что $\varphi_a(z) \to e_1$ при $r \to 1-$ равномерно в B^n_ε. Отсюда и из условия (2) теоремы следует, что

$$f(\varphi_a)(1 - (\varphi_a^{(1)})^2 - a_2(\varphi_a^{(2)})^2 - ... - a_n(\varphi_a^{(n)})^2)^c \to A \tag{3}$$

равномерно в B^n_ε при $r \to 1-$.

Докажем утверждение пункта 1) теоремы. Дифференцируя (3) по z_k, $k=2,...,n$, получаем, что

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}\frac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial z_k}\Big(1-(\varphi_a^{(1)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\Big)^c- \\
-2ca_k\varphi_a^{(k)}f(\varphi_a)\frac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial z_k}\Big(1-(\varphi_a^{(1)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\Big)^{c-1}\to 0
\end{gathered}
\tag{4}
$$

равномерно в B_ε^n при $r\to 1-$.

Заметим, что $\dfrac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial z_k}=-\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1}$ и

$$
\begin{gathered}
\Big(1-(\varphi_a^{(1)})^2-a_2(\varphi_a^{(2)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\Big)= \\
=\frac{1-r^2}{(1-rz_1)^2}(1-z_1^2-a_2z_2^2-...-a_nz_n^2).
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Отсюда получаем, что (4) равносильно

$$
\begin{aligned}
&\Big[-\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}\Big(1-(\varphi_a^{(1)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)}\Big)^2)^c+ \\
&+2ca_k\varphi_a^{(k)}f(\varphi_a)\Big(1-(\varphi_a^{(1)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\Big)^{c-1}\Big]\frac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1}= \\
&=\Big[-\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}\Big(1-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\Big)^{c+1}- \\
&-2ca_kf(\varphi_a)\Big(1-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\Big)^c\frac{\sqrt{1-r^2}z_k}{1-rz_1}\Big]\frac{1-rz_1}{\sqrt{1-r^2}}\frac{1}{1-...-a_nz_n^2}= \\
&=-\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}\Big(1-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\Big)^{c+\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-...-a_nz_n^2}}- \\
&-2cf(\varphi_a)\Big(1-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\Big)^c\frac{a_kz_k}{1-...-a_nz_n^2}= \\
&=\Big[-\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}\Big(1-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\Big)^{c+\frac{1}{2}}- \\
&-2cf(\varphi_a)\Big(1-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\Big)^c\frac{a_kz_k}{\sqrt{1-...-a_nz_n^2}}\Big]\frac{1}{\sqrt{1-...-a_nz_n^2}}\to 0
\end{aligned}
$$

равномерно в B_ε^n при $r\to 1-$.

Так как функция $\dfrac{1}{\sqrt{1-z_1^2-a_2z_2^2-...-a_nz_n^2}}$ ограничена в B_ε^n, то

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(k)}}\left(1-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^{c+\frac{1}{2}}+\\&+2cf(\varphi_a)\left(1-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^{c}\frac{a_kz_k}{\sqrt{1-z_1^2-...-a_nz_n^2}}\to 0\end{aligned}\qquad(6)$$

равномерно в B_ε^n при $r\to 1-$.

Из (2) и того, что функция $\dfrac{a_kz_k}{\sqrt{1-z_1^2-a_2z_2^2-...-a_nz_n^2}}$ ограничена в B_ε^n при $r\to 1-$, получаем, что функция

$$\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(k)}}\left(1-(\varphi_a^{(1)})^2-a_2(\varphi_a^{(2)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^{c+\frac{1}{2}}$$

ограничена в B_ε^n при $r\to 1-$. Следовательно, функция

$$\frac{\partial f(w)}{\partial w_k}\left(1-w_1^2-a_2w_2^2-...-a_nw_n^2\right)^{c+\frac{1}{2}}$$

ограничена в Φ_ε при $w\to e_1$. Из леммы А, пункт 2) следует, что если $\alpha_1>1$, $0<\varepsilon<1$ и $min\left\{1+\varepsilon^2,\sqrt{1+\dfrac{4\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2}}\right\}>\alpha_1$, то $\Omega_{\alpha_1}\subset\Phi_\varepsilon$ в малой окрестности точки e_1, тогда функция

$$\frac{\partial f(w)}{\partial w_k}\left(1-w_1^2-a_2w_2^2-...-a_nw_n^2\right)^{c+\frac{1}{2}}$$

ограничена в Ω_{α_1} при $w\to e_1$.

Допустим, что для некоторого $\alpha_1>1$ и некоторого $k=2,...,n$ существует предел

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1}\ni w\to e_1}\frac{\partial f(w)}{\partial w_k}\left(1-w_1^2-a_2w_2^2-...-a_nw_n^2\right)^{c+\frac{1}{2}}.\qquad(7)$$

Из (2) и (6) следует, что не существует предел

$$\lim_{r\to 1-}\frac{\partial f(w)}{\partial w_k}\left(1-w_1^2-a_2w_2^2-...-a_nw_n^2\right)^{c+\frac{1}{2}},$$

поэтому не существует предел (7). Если c=0, то из (2), (6) и леммы А получаем, что найдется $\alpha_1 > \alpha$ такое, что предел (7) равен нулю.

Первая часть теоремы 1 доказана.

Докажем утверждение пункта 2) теоремы. Продифференцируем (3) по z_1. Тогда

$$\left[\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(1)}}\left(1-(\varphi_a^{(1)})^2-\ldots-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^c-\right.$$
$$\left.-2c\varphi_a^{(1)}f(\varphi_a)\left(1-(\varphi_a^{(1)})^2-\ldots-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^{c-1}\right]\frac{r^2-1}{(1-rz_1)^2}+$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\left[\left(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}\left(1-(\varphi_a^{(1)})^2-\ldots-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^c-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2ca_k\varphi_a^{(k)}f(\varphi_a)\left(1-(\varphi_a^{(1)})^2-\ldots-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^{c-1}\right)\frac{rz_k\sqrt{1-r^2}}{(1-rz_1)^2}\right]\to 0$$

равномерно в B_ε^n при $r\to 1-$.

Преобразуем выражение, стоящее под знаком последней суммы, используя (5).

$$\left(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}\left(1-(\varphi_a^{(1)})^2-\ldots-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^c-\right.$$
$$\left.-2ca_k\varphi_a^{(k)}f(\varphi_a)\left(1-(\varphi_a^{(1)})^2-\ldots-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^{c-1}\right)\frac{rz_k\sqrt{1-r^2}}{(1-rz_1)^2}=$$
$$=\left(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}\left(1-\ldots-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^{c+\frac{1}{2}}\frac{1-rz_1}{\sqrt{1-r^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\ldots-a_nz_n^2}}+\right.$$
$$\left.+2ca_kf(\varphi_a)\left(1-\ldots-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^c\frac{z_k(1-rz_1)}{\sqrt{1-r^2}}\frac{1}{1-\ldots-a_nz_n^2}\right)\frac{rz_k\sqrt{1-r^2}}{(1-rz_1)^2}=$$
$$=\left(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}\left(1-\ldots-a_n(\varphi_a^{(n)})^2\right)^{c+\frac{1}{2}}+2c\varphi_a^{(k)}f(\varphi_a)(1-\ldots-\right.$$
$$\left.-a_n(\varphi_a^{(n)})^2)^c\frac{a_kz_k}{\sqrt{1-\ldots-a_nz_n^2}}\right)\frac{rz_k}{(1-rz_1)\sqrt{1-\ldots-a_nz_n^2}}.$$

Из ограниченности выражения $\dfrac{rz_k}{(1-rz_1)\sqrt{1-z_1^2-\ldots-a_nz_n^2}}$ в B_ε^n при $r\to 1-$ и из (6) следует, что

$$\sum_{k=2}^{n}\Bigg[\Bigg(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(k)}}(1-(\varphi_a^{(1)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2)^{c+\frac{1}{2}}+2c\varphi_a^{(k)}f(\varphi_a)(1-...-$$
$$-a_n(\varphi_a^{(n)})^2)^c\frac{a_kz_k}{\sqrt{1-...-a_nz_n^2}}\Bigg)\frac{rz_k}{(1-rz_1)\sqrt{1-...-a_nz_n^2}}\Bigg]\to 0$$

равномерно в B_ε^n при $r\to 1-$. Тогда

$$\Bigg(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(1)}}(1-(\varphi_a^{(1)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2)^c-$$
$$-2c\varphi_a^{(1)}f(\varphi_a)(1-(\varphi_a^{(1)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2)^{c-1}\Bigg)\frac{r^2-1}{(1-rz_1)^2}\to 0$$

равномерно в B_ε^n при $r\to 1-$. Последнее равносильно тому, что

$$\Bigg(2cf(\varphi_a)(1-(\varphi_a^{(1)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2)^c\frac{r-z_1}{1-rz_1}-$$
$$-\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(1)}}(1-(\varphi_a^{(1)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2)^{c+1}\Bigg)\frac{1}{(1-...-a_nz_n^2)}\to 0$$

равномерно в B_ε^n при $r\to 1-$.

Из условия (2) и того, что $\dfrac{r-z_1}{1-rz_1}\to 1$, а выражение $\dfrac{1}{(1-...-a_nz_n^2)}$ ограничено в B_ε^n при $r\to 1-$, получаем, что

$$\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(1)}}(1-(\varphi_a^{(1)})^2-a_2(\varphi_a^{(2)})^2-...-a_n(\varphi_a^{(n)})^2)^{c+1}\to 2cA$$

равномерно в B_ε^n при $r\to 1^-$. Следовательно,

$$\frac{\partial f(w)}{\partial w_1}(1-w_1^2-a_2w_2^2-...-a_nw_n^2)^{c+1}\to 2cA$$

в множестве Φ_ε при $w\to e_1$. По лемме А существует $\alpha_1<\alpha$ такое, что $\Omega_{\alpha_1}\subset\Phi_\varepsilon$ в малой окрестности точки e_1, тогда

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1}\ni w\to e_1}\frac{\partial f(z)}{\partial w_1}(1-w_1^2-a_2w_2^2-...-a_nw_n^2)^{c+1}=2cA.$$

Теорема доказана. □

Следующая теорема является обобщением теоремы А на многомерный случай.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — голоморфная в B^n функция, $c \in \mathbb{C}$ и существует*

$$\lim_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} f(z)(1-z_1)^c = A \neq \infty, \tag{8}$$

тогда существует $\alpha_1 < \alpha$ такое, что

1) *для любого $k = 2, 3, ..., n$*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_k}(1-z_1)^{c+\frac{1}{2}} = 0;$$

2)

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_1}(1-z_1)^{c+1} = 2cA.$$

Доказательство. Как и в теореме 1, получаем (обозначения те же, что и в теореме 1), что

$$f(\varphi_a)(1-(\varphi_a^{(1)}))^c \to A \tag{9}$$

равномерно в B^n_ε при $r \to 1-$, здесь ε и α связаны неравенством из пункта 1) леммы А. Докажем утверждение 1) теоремы. Дифференцируем (9) по z_k, $k = 2, ..., n$, тогда

$$\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}} \frac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial z_k}(1-\varphi_a^{(1)})^c \to 0 \tag{10}$$

равномерно в B^n_ε при $r \to 1-$.

Так как $\dfrac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial z_k} = -\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1}$ и

$$1-\varphi_a^{(1)} = 1 - \frac{r-z_1}{1-rz_1} = \frac{(1-r)(1+z_1)}{1-rz_1}, \tag{11}$$

то

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}} \frac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial z_k}(1-\varphi_a^{(1)})^c = \\
&= -\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}(1-\varphi_a^{(1)})^{c+\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1} \frac{\sqrt{1-rz_1}}{\sqrt{1-r}\sqrt{1+z_1}} = \\
&= -\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}(1-\varphi_a^{(1)})^{c+\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+r}}{\sqrt{(1-rz_1)(1+z_1)}}.
\end{aligned}$$

Функция $-\dfrac{\sqrt{1+r}}{\sqrt{(1-rz_1)(1+z_1)}}$ ограничена в B_ε^n при $r\to 1-$. Тогда

$$\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(k)}}(1-\varphi_a^{(1)})^{c+\frac{1}{2}}\to 0 \tag{12}$$

равномерно в B_ε^n при $r\to 1-$. Следовательно,

$$\frac{\partial f(w)}{\partial w_k}(1-w_1)^{c+\frac{1}{2}}\to 0$$

при $w\to e_1$ в Φ_ε. Из леммы A следует, что если $\alpha_1>1$, $0<\varepsilon<1$, $min\left\{1+\varepsilon^2,\sqrt{1+\dfrac{4\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2}}\right\}>\alpha_1$, то $\Omega_{\alpha_1}\subset\Phi_\varepsilon$ в малой окрестности точки e_1. Тогда

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1}\ni w\to e_1}\frac{\partial f(w)}{\partial w_k}(1-w_1)^{c+\frac{1}{2}}=0,$$

$k=2,...,n$.

Докажем утверждение 2). Дифференцируя (9) по z_1, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(k)}}\frac{\partial\varphi_a^{(k)}}{\partial z_1}(1-\varphi_a^{(1)})^c\right)-cf(\varphi_a)\frac{\partial\varphi_a^{(1)}}{\partial z_1}(1-\varphi_a^{(1)})^{c-1}=$$
$$=\left(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(1)}}(1-\varphi_a^{(1)})^c-cf(\varphi_a)(1-\varphi_a^{(1)})^{c-1}\right)\frac{\partial\varphi_a^{(1)}}{\partial z_1}+$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(k)}}\frac{\partial\varphi_a^{(k)}}{\partial z_1}(1-\varphi_a^{(1)})^c\right)\to 0$$

равномерно в B_ε^n при $r\to 1-$.

Так как $\dfrac{\partial\varphi_a^{(k)}}{\partial z_1}=\dfrac{z_kr\sqrt{1-r^2}}{(1-rz_1)^2}$, то из (11) вытекает, что

$$\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(k)}}\frac{\partial\varphi_a^{(k)}}{\partial z_1}(1-\varphi_a^{(1)})^c=\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(k)}}(1-\varphi_a^{(1)})^c\frac{z_kr\sqrt{1-r^2}}{(1-rz_1)^2}=$$
$$=\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(k)}}(1-\varphi_a^{(1)})^{c+\frac{1}{2}}\frac{z_kr\sqrt{1-r^2}}{(1-rz_1)^2}\frac{\sqrt{1-rz_1}}{\sqrt{1-r}\sqrt{1+z_1}}=$$
$$=\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial\varphi_a^{(k)}}(1-\varphi_a^{(1)})^{c+\frac{1}{2}}\frac{z_kr\sqrt{1+r}}{\sqrt{(1-rz_1)^3(1+z_1)}},$$

$k = 2, ..., n$.

Из ограниченности выражения $\dfrac{z_k r\sqrt{1+r}}{\sqrt{(1-rz_1)^3(1+z_1)}}$ в B^n_ε при $r \to 1-$ и из (12) следует, что

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(k)}}\frac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial z_1}(1-\varphi_a^{(1)})^c\right) \to 0$$

равномерно в B^n_ε при $r \to 1-$. Тогда, используя (11), получаем

$$\left(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(1)}}(1-\varphi_a^{(1)})^c - cf(\varphi_a)(1-\varphi_a^{(1)})^{c-1}\right)\frac{\partial \varphi_a^{(1)}}{\partial z_1} =$$
$$= \left(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(1)}}(1-\varphi_a^{(1)})^{c+1} - cf(\varphi_a)(1-\varphi_a^{(1)})^{c}\right)\frac{1}{(1-\varphi_a^{(1)})}\frac{r^2-1}{(1-rz_1)^2} =$$
$$= -\left(\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(1)}}(1-\varphi_a^{(1)})^{c+1} - cf(\varphi_a)(1-\varphi_a^{(1)})^{c}\right)\frac{1+r}{(1-rz_1)(1+z_1)} \to 0$$

равномерно в B^n_ε при $r \to 1-$. Так как выражение $\dfrac{1+r}{(1-rz_1)(1+z_1)}$ ограничено в B^n_ε при $r \to 1-$, то

$$\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(1)}}(1-\varphi_a^{(1)})^{c+1} - cf(\varphi_a)(1-\varphi_a^{(1)})^{c} \to 0$$

равномерно в B^n_ε при $r \to 1-$. Из (9) получаем, что

$$\frac{\partial f(\varphi_a)}{\partial \varphi_a^{(1)}}(1-\varphi_a^{(1)})^{c+1} \to cA$$

равномерно в B^n_ε при $r \to 1-$. Следовательно,

$$\frac{\partial f(w)}{\partial w_1}(1-w_1)^{c+1} \to cA$$

при $w \to e_1$ в Φ_ε. Если α_1 и ε удовлетворяют условию 2) леммы A, то $\Omega_{\alpha_1} \subset \Phi_\varepsilon$ в малой окрестности точки e_1. Тогда

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni w \to e_1} \frac{\partial f(w)}{\partial w_1}(1-w_1)^{c+1} = cA.$$

Теорема доказана.

Résumé

In this paper we study the boundary behaviour of holomorphic functions defined in the unit ball.

Библиографический список

[1] Годуля Я., Старков В.В. *О граничном поведении в угле Штольца аналитических в круге функций*//Математические заметки. 2002. Вып. 5. С. 652-661.

[2] Godula J., Starkov V. V. *On the boundary behaviour*//Annales UMCS. 2002. V. 55. P. 31-45.

[3] Рудин У. *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.