Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 9, 2002

УДК 51(07.07)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА КАК ОДНО ИЗ СРЕДСТВ РАЗВИТИЯ ПОТРЕБНОСТИ В ЛОГИЧЕСКОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ

Л. А. Громаковская

В статье показано, как, используя задачи экспериментальной математики, можно стимулировать самостоятельную работу и систематически побуждать учащихся к открытию собственных доказательств.

§ 1

Большое количество математических результатов было обнаружено с помощью доказательства, причем неожиданно для их авторов, — достаточно вспомнить открытие Кантором равномощности множеств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$. Г. Фройденталь даже говорит [2, с. 11], что ¡¡теорему, которая отнюдь не очевидна, можно открыть только путем доказательства¿¿.

И все же преподавание математики, при котором теоремы появляются в результате доказательств, цель и смысл которых остаются неизвестными до их окончания, вряд ли лучше преподавания по традиционной схеме ¡¡теорема плюс доказательство¿¿.

Пойа [1, с. 105] на примерах ярко иллюстрирует, что существует другой путь, лучший, чем эти крайности: ¡¡Убедившись в том, что теорема верна (с помощью эксперимента — *Л.Г.*) в нескольких частных случаях, мы приобрели сильные индуктивные доводы в ее пользу. Индуктивная фаза преодолела первоначальное сомнение и дала нам сильную уверенность в теореме. Без такой уверенности мы едва ли нашли бы мужество предпринять доказательство, которое вовсе не выглядело привычным делом. "Когда вы убедитесь, что теорема верна, вы начинаете ее доказывать" — традиционный профессор математики совершенно прав¿¿. И если до сих пор не удавалось построить обучение математике в школе в соответствии с этим путем, то не потому, что не было желающих, — эксперименты, с помощью которых ¡¡усматривались¿¿ результаты, вдохновляющие на поиски доказательств, были чересчур трудоемки для реализации их в практике преподавания математики. Возросшая производительность и доступность компьютеров изменили положение дел. Появилась возможность с их помощью ставить вычислительные и графические эксперименты не только без большого труда, но и с интересом для учащихся. Так родилась ¡¡экспериментальная математика¿¿, в которой результат сначала ¡¡усматривается¿¿ с помощью специально организованных компьютерных экспериментов и лишь затем доказывается.

§ 2

Что именно подразумевается, проиллюстрируем на простых примерах.

Задача. *Лестница, стоявшая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз. По какой линии движется котенок, сидящий на середине лестницы?*

Решение. Представим пол и стену сторонами прямого угла, лестницу — отрезком AB с концами на сторонах угла, котенка — точкой M, серединой отрезка AB. Введем систему координат с осями, направленными по сторонам угла (см. рис. 1).

В качестве параметра t выберем меру угла ABO. Наибольшее значение t равно $\frac{\pi}{2}$ — лестница стоит вертикально, наименьшее равно 0 — лестница лежит. Каждому значению t из указанных пределов отвечает определенное положение точки M, координаты которой находятся из уравнений:

$$\begin{cases} x = \dfrac{AB}{2}\cos t, \\ y = \dfrac{AB}{2}\sin t. \end{cases}$$

Обозначим длину отрезка AB через $2a$ $(a > 0)$. Тогда окажется, что точка M движется по линии, которая задается параметрически

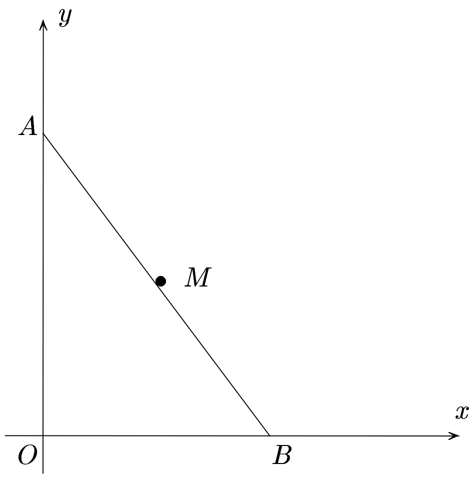

Рис. 1

уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \tag{$*$}$$

где $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Обсуждение. Итак, мы получили уравнения кривой. Но возникает вопрос: узнаваема ли она? Другими словами, известна ли эта кривая нам при каком-либо другом ее описании или по профилю[1].

Именно по профилю и может помочь нам узнать кривую компьютер. Если она окажется похожей на известную кривую, у нас появится *гипотеза* относительно того, что представляет собой кривая, описываемая найденными параметрическими уравнениями. Это даст нам *предложение, которое нужно будет доказать.*

Итак, перед нами новая

[1]Разумеется, по этим уравнениям трудно не узнать окружность. На деле на этом месте будут другие уравнения и может статься, что учащийся не сможет по уравнениям увидеть кривую. Здесь же приводится лишь иллюстрация метода преподавания.

Задача. *Какая из известных нам кривых, если такая вообще есть, описывается полученными параметрическими уравнениями?*

Чтобы приблизиться к решению этой задачи, напишем программу, которая нарисует нам кривую.

Описание программы. Пусть параметр t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$ включительно. Будем рисовать кривую в виде ломаной из n звеньев. Разобьем отрезок $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ на n равных частей длиной $dt = \frac{\pi}{2}n$. Присвоив величине t значение 0, вычислим $x(0)$ и $y(0)$. Будем рисовать ломаную, начиная от точки $(x(0),\ y(0))$ и кончая точкой $\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right),\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. От вершины к вершине будем перемещаться с помощью команды ¡¡сместиться в точку¿¿. При рисовании очередного звена ломаной будем величину t увеличивать на dt и пересчитывать $x(t)$ и $y(t)$.

Программа.

```
 алг Кривая
 нач вещ x,y,t,dt,pi,цел n
|  n:= 100; pi:=3.1415
|  t:=0;dt:=\frac{\pi}{2n}
|  задать поле (-0.5,4,-0.5,3)
|  x:= 2*cost
|  y:= 2*sint
|  сместиться в точку(x,y)
|  опустить перо
| нц n раз
| | t:=t+dt
| | x:=2*cos t
| | y:=2*sin t
| | сместиться в точку(x,y)
| кц
| поднять перо
 кон
```

Используя эту программу, получим то, что изображено на рисунке 2 (отрезки и точки мы добавили ¡¡от себя¿¿). Глядя на рисунок, можно предположить, что искомая линия — дуга окружности радиусом a с центром в точке O.

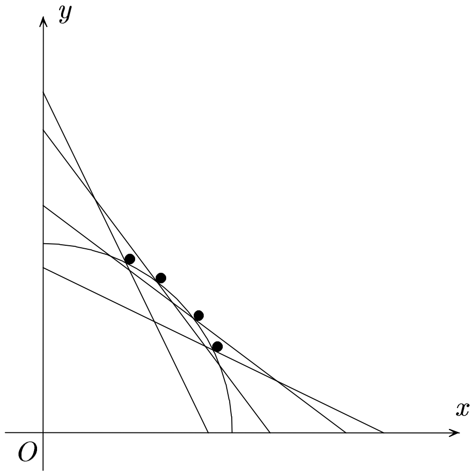

Рис. 2

Теперь у нас есть

Гипотеза. *Кривая, описываемая полученными выше параметрическими уравнениями, есть четверть окружности радиусом a с центром в начале координат.*

Эксперимент сыграл свою роль: мы подметили закономерность и уже трудно остановиться на полдороги. Появилась потребность проверить, а правильно ли мы рассуждаем. Теперь настала очередь доказательства.

Доказательство гипотезы. Пусть координаты x, y точки удовлетворяют уравнениям $(*)$ с $t \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$. Тогда $x^2 + y^2 = a^2(\cos t)^2 + a^2(\sin t)^2 = a^2$. Значит, точка лежит на окружности радиусом a с центром в начале координат, причем в первой четверти.

Обратно, пусть точка $(x,\ y)$ лежит на указанной окружности в первой четверти. Проведем радиус в эту точку и обозначим через t угол между осью абсцисс и этим радиусом. Тогда окажется, что $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, причем $t \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$. Значит, координаты точки удовлетворяют уравнениям $(*)$ с указанными ограничениями на t.

Гипотеза доказана.

Второй пример мы опишем менее подробно.

Задача. *Окружность радиусом r катится без скольжения по внутренней стороне неподвижной окружности радиусом $2r$. Какую траекторию описывает произвольно взятая точка катящейся окружности?*

Решение. Выберем в качестве начала координат центр O неподвижной окружности, а ось абсцисс проведем через то положение выбранной нами точки подвижной окружности, в котором подвижная окружность касается неподвижной. Обозначим через C центр катящейся окружности. В качестве параметра t выберем меру угла между радиусом CM, проведенным в интересующую нас точку M, и радиусом CB, проведенным в ту точку B, которая является точкой касания при рассматриваемом положении катящейся окружности.

Рассуждая как в [3, с. 509–510], установим, что интересующая нас линия описывается параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = 2r(-\cos 2t + 2\cos t), \\ y = 2r(\sin 2t - 2\sin t). \end{cases}$$

Опять по полученным уравнениям очень трудно понять, что́ представляет собой интересующая нас линия. Обратимся за помощью к компьютеру.

Используем приведенную выше программу с этими уравнениями и получим кривую, которую они описывают. Результат получится неожиданным: компьютер нарисует отрезок, длина которого есть диаметр неподвижной окружности. Оказывается, в описанных условиях произвольно взятая точка катящейся окружности пробегает этот отрезок. Это и явится гипотезой, которую нужно будет доказать.

В данном случае доказательство окажется значительно более трудным, чем в первом примере, но не это здесь главное. Главное — в том, что, написав программу и получив с помощью компьютера искомую линию, ученик с полным основанием будет считать, что он *сам* подметил закономерность. Закономерность его очень удивит, и это явится достаточно сильным мотивационным импульсом к поиску доказательства. Психологическая ситуация, в которой он таким образом окажется, весьма существенно отличается от той, которая возникает, когда учитель просто объявляет готовый результат.

§ 3

На протяжении нескольких лет мы разрабатывали для старшеклассников курс экспериментальной математики. Для курса были подобраны задачи исследовательского характера, предполагающие проведение компьютерного эксперимента, находящиеся на стыках различных разделов математики, расширяющие и углубляющие важные темы школьного курса математики.

Отобранные задачи мы объединили в циклы по следующим темам:

- Последовательности и итерации.
- Прямые и кривые.
- Дифференциальные уравнения и фазовые портреты.

Первый цикл включает в себя задачи на переливания и перемешивания; задачи, в которых изучается поведение последовательности и можно пронаблюдать, как из порядка рождается хаос; задачи на изучение итерационных последовательностей, порожденных линейным преобразованием на комплексной плоскости; задачи, которые знакомят школьников с весьма популярными в настоящее время фрактальными объектами — множествами Мандельброта и Жюлиа.

Во втором цикле собраны задачи, в которых изучаются параметрические кривые, кривые, заданные уравнениями в полярных координатах, семейства кривых и их огибающие, геометрические места точек.

Наконец, в третьем цикле представлены задачи, в которых строятся поля направлений и исследуется поведение интегральных кривых, изучаются различные положения равновесия и предельные циклы фазовых портретов.

Задачи курса были предложены для аппробации учащимся лицея № 1 г. Петрозаводска, гимназии № 17 и студентам физико-математического факультета КГПУ. Мы не ограничивали учащихся в выборе языка и среды при написании программ, необходимых для проведения исследования. Но в целях повышения методической эффективности курса мы предлагали использовать для проведения эксперимента, в качестве инструмента построения знаний, систему программирования КуМир.

Указанная система обладает большим набором встроенных исполнителей: Чертежник, Гратекс, Комплексные числа и т. д. Под конкретные области для решения цикла задач учащиеся программировали исполнителей сами, используя возможности КуМир'а. Циклы задач средствами той же среды были сведены в электронные учебники.

Разработанный курс может быть предложен в качестве специального курса, дополнительно к основным занятиям по математике и информатике, а отдельные темы данного курса могут быть использованы и на основных занятиях по математике.

В заключение считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность кандидату физико-математических наук доценту С. И. Соболеву за то, что он привлек мое внимание к экспериментальной математике.

Résumé

The article is devoted to the course of Experimental Mathematics for students aged from 15 to 18. Course is founded on research problems different domains of mathematics.

Библиографический список

[1] Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения.* М.: Наука, 1975.

[2] Фройденталь Г. *Математика как педагогическая задача.* Ч. I. М.: Просвещение, 1982.

[3] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. I. М.: Наука, 1970.

Петрозаводск, ул. Пушкинская, 17,
Карельский гос. педагогический университет.