Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 10, 2003

УДК 517.54+517.55

ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СЕМЕЙСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ШАРА, ПЕРЕХОД К ВЫСШИМ РАЗМЕРНОСТЯМ

П. Личберский, В. В. Старков

В предлагаемой статье доказывается теорема, ранее сформулированная в [1] и снабженная ошибочным доказательством.

Обозначим $\mathbb{B}^n$ евклидов шар в $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbb{B}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : ||z|| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} < 1\},$$

а $\mathcal{A}^n$ — множество всех биголоморфных автоморфизмов шара $\mathbb{B}^n$. Далее, пусть $D^k f(z)$ обозначает k-й дифференциал Фреше отображения f в точке z, тогда якобиан отображения $J_f(z) = \det Df(z)$, а $D^2 f(z)(w, \cdot)$ — линейный ограниченный оператор из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, который является сужением симметричного билинейного оператора $D^2 f(z)$ на $w \times \mathbb{C}^n$. Обозначим $\mathcal{LS}^n$ множество всех локально биголоморфных отображений $f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ ($J_f(z) \neq 0$ для $z \in \mathbb{B}^n$), нормированных условием $Df(0) = I$, где I — единичная матрица, $f(0) = 0$.

Понятие линейно-инвариантного семейства (л.-и.с.) голоморфных в круге $\mathbb{B} = \mathbb{B}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций впервые было введено Поммеренке в [2]. Линейная инвариантность семейства $\mathfrak{M}$ локально однолистных в $\mathbb{B}$ функций $f(z) = z + \dots$. означает, что наряду с каждой функцией $f \in \mathfrak{M}$ этому семейству принадлежит и функция

$$\frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))}{f'(\varphi(0))\varphi'(0)} = z + \cdots \tag{1}$$

при любом конформном автоморфизме $\varphi(z)$ круга $\mathbb{B}$. Многие известные классы конформных отображений круга $\mathbb{B}$ являются л.-и.с.

В 1997 г. в [3] понятие л.-и.с. было перенесено на локально биголоморфные отображения шара $\mathbb{B}^n$, $n > 1$; в [3] изучались л.-и.с. таких отображений.

По аналогии с (1) для каждого $\varphi \in \mathcal{A}^n$ на множестве $\mathcal{LS}^n$ в [3] вводится оператор Λ_φ:

$$\Lambda_\varphi[f](z) = (D\varphi(0))^{-1}(Df(\varphi(0)))^{-1}(f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))), \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

Дадим необходимые определения.

Определение 1. [3]. *Семейство $\mathfrak{M} \subset \mathcal{LS}^n$ называется линейно-инвариантным семейством (л.-и.с.), если для любого $f \in \mathfrak{M}$ и любого $\varphi \in \mathcal{A}^n$ отображение $\Lambda_\varphi[f]$ также принадлежит семейству $\mathfrak{M}$.*

Определение 2. [3]. *Порядком л.-и.с. $\mathfrak{M}$ называется число*

$$\operatorname{ord} \mathfrak{M} = \sup_{g \in \mathfrak{M}} \sup_{\|w\|=1} \left| \operatorname{tr}\{\frac{1}{2} D^2 g(0)(w, \cdot)\} \right|.$$

Порядком отображения $f \in \mathcal{LS}^n$ называется порядок л.-и.с. $\Lambda[f] = \{\Lambda_\varphi[f] : \varphi \in \mathcal{A}^n\}$, порожденного отображением f. Обозначается порядок отображения f символом $\operatorname{ord} f$.

Символ tr, как обычно, обозначает след матрицы. Порядок л.-и.с. является очень важной числовой характеристикой семейства. И в случае $n = 1$ и при $n > 1$ многие свойства л.-и.с. оказываются зависящими только от порядка семейства. В случае $n = 1$ определение 2 представляет собой классическое определение порядка л.-и.с. $\mathfrak{M}$ (см. [2]): $\operatorname{ord} \mathfrak{M} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \left| \frac{f''(0)}{2} \right|$.

Определение 3. *Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое множество из $\mathcal{LS}^n$, линейно-инвариантной оболочкой множества $\mathcal{F}$ называется наименьшее л.-и.с., содержащее $\mathcal{F}$; оно обозначается*

$$\Lambda[\mathcal{F}] = \{\Lambda_\varphi[f] : f \in \mathcal{F}, \varphi \in \mathcal{A}^n\}.$$

В [3] показано, что для любого л.-и.с. $\mathfrak{M} \subset \mathcal{LS}^n$ справедливо неравенство $\operatorname{ord} \mathfrak{M} \geq \frac{n+1}{2}$. Обозначим $\mathfrak{M}(n)$ л.-и.с. из $\mathcal{LS}^n$. В [4] был доказан следующий результат.

Пусть $\mathfrak{M}(1)$ — *л.-и.с. функций порядка* α. *Обозначим*

$$(\mathfrak{M}(1))_n = \{F(z) = (p(z_1), z_2\sqrt{p'(z_1)}, \dots, z_n\sqrt{p'(z_1)} : p \in \mathfrak{M}(1)\} \subset \mathcal{LS}^n.$$

Тогда

$$\operatorname{ord} \Lambda[(\mathfrak{M}(1))_n] = \alpha\frac{n+1}{2}. \tag{2}$$

В [1] дана формулировка существенно более общего результата, дающего информацию о порядке вновь сконструированного л.-и.с. $\mathcal{F}_{n+1}$ из $\mathcal{LS}^{n+1}$, причем построение этого семейства $\mathcal{F}_{n+1}$ происходит на основе л.-и.с. $\mathfrak{M}(\mathfrak{n})$ порядка α. Именно в [1] рассматриваются отображения $\hat{f} : \mathbb{B}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, определяемые следующим образом. Пусть $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\quad Z = (z, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$, тогда

$$\hat{f}(Z) = (f(z), z_{n+1}(J_f(z))^{1/(n+1)}),$$

где $f \in \mathfrak{M}(\mathfrak{n})$ — л.-и.с. порядка α. Множество таких отображений $\hat{f}$ обозначается $\hat{\mathcal{F}}$. Линейно-инвариантную оболочку множества $\hat{\mathcal{F}}$ обозначим $\mathcal{F}_{n+1} = \Lambda[\hat{\mathcal{F}}]$. В [1] сформулирована

Теорема. $\operatorname{ord}\Lambda[\hat{\mathcal{F}}] = \alpha\dfrac{n+2}{n+1}$.

Теорема снабжена ошибочным доказательством, поскольку оно опирается на неверное равенство (5.3) из [3] (по этому поводу см., например, [4]). Здесь мы доказываем это утверждение, опираясь на наш метод понижения размерности из [5]. Нам понадобится следующий результат (см. [5, следствие 1]):

если л.-и.с. $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{LS}^{n+1}$, $\operatorname{ord} \mathcal{F}_{n+1} = \alpha_1$, 0 — *нуль в* $\mathbb{C}^n$ *и*

$$\{\mathcal{F}_{n+1}\}^* = \{p(z_1) \in \mathcal{LS}^1 : |J_p(z_1)| = |J_G(z_1, 0)|^{2/(n+2)}, G \in \mathcal{F}_{n+1}\},$$

то $\{\mathcal{F}_{n+1}\}^*$ *является л.-и.с. и*

$$\operatorname{ord}\ \{\mathcal{F}_{n+1}\}^* = \alpha_1\frac{2}{n+2}. \tag{3}$$

Кроме того, нам понадобится следующее эквивалентное определение порядка из [6].

Если $\mathfrak{M}(n)$ — *л.-и.с., то*

$$\operatorname{ord} \mathfrak{M}(n) = \inf\{\alpha > 0 : |J_g(z)| \le \frac{(1+||z||)^{\alpha-(n+1)/2}}{(1-||z||)^{\alpha+(n+1)/2}} \quad \forall g \in \mathfrak{M}(n)\}, \tag{4}$$

причем (4) *достаточно проверить для z из сколь угодно малой окрестности нуля.*

Последний результат позволяет свести анализ необходимых для доказательства теоремы условий к анализу бесконечно малых, что в конечном итоге является решающим для доказательства.

Начнем с леммы, имеющей самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть $f \in \mathcal{LS}^n, \operatorname{ord} f = \alpha$. Для фиксированного $r \in (0,1)$ обозначим $f_r(z) = \dfrac{1}{r} f(rz)$. Тогда* $\operatorname{ord} f_r \le \alpha$.

Последнее неравенство не является точным. В случае $n = 1$ результат леммы следует из доказанного в [7] неравенства $\operatorname{ord} f_r \le (\alpha-1)r+1$ (тоже неточного), точная верхняя оценка для $\operatorname{ord} f_r$ была получена в [8].

Доказательство. Обозначим $g(z) = \Lambda_\varphi[f_r](z), \varphi \in \mathcal{A}^n$, по определению 2

$$\operatorname{ord} f_r = \sup_{\varphi\in\mathcal{A}^n, \gamma\in\partial\mathbb{B}^n} \left| \operatorname{tr}\{\frac{1}{2} D^2 g(0)(\gamma,\cdot)\} \right|, \tag{5}$$

причем в действительности в (5) достаточно брать супремум по

$$\varphi = \varphi_a(z) = \frac{a - sz - \dfrac{\langle z,a\rangle}{1+s} a}{1-\langle z,a\rangle}, \quad a \in \mathbb{B}^n, \quad s = \sqrt{1-||a||^2},$$

(см. [3]), где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение. Обозначим $g_a(z) = \Lambda\varphi_a[f_r](z)$, в [4] получена формула

$$\operatorname{tr}\{D^2 g_a(0)(\gamma,\cdot)\} = (n+1)(a^*\gamma) +$$

$$+\operatorname{tr}\{(Df_r(a))^{-1} D^2 f_r(a)(\frac{s(1-s)}{||a||^2}(a^*\gamma)a - s\gamma,\cdot)\}; \tag{6}$$

здесь a^* — вектор-строка с координатами, сопряженными координатам вектора a. Отсюда получаем:

$$\operatorname{tr}\{D^2 g_a(0)(\gamma,\cdot)\} = (n+1)(a^*\gamma) +$$

$$+\operatorname{tr}\{(Df(ra))^{-1} D^2 f(ra)(\frac{s(a^*\gamma)}{1+s}(ar) - sr\gamma,\cdot)\}. \tag{7}$$

Обозначим $S_0 = \sqrt{1 - r^2||a||^2}$ и обозначим $\gamma_0 \in \partial\mathbb{B}^n$ вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{s(a^*\gamma)}{1+s}(ar) - sr\gamma = H\gamma_0\lambda S_0,$$

где $H = \dfrac{r^2}{1+S_0}(aa^*) - I$, λ — некоторое положительное число. Оператор $H^{-1} = \left(-I - \dfrac{r^2 aa^*}{1 + S_0 - r^2||a||^2}\right)$ является обратным к H. Поэтому

$$\gamma_0 = \frac{sr}{\lambda S_0} H^{-1}\left(\frac{aa^*}{1+s} - I\right)\gamma =$$

$$= \frac{sr}{\lambda S_0}\left(-\frac{aa^*}{1+s} - \frac{r^2 aa^*||a||^2}{(1+s)(1+S_0-r^2||a||^2)} + I + \frac{r^2 aa^*}{1+S_0-r^2||a||^2}\right)\gamma =$$

$$= \frac{sr}{\lambda S_0}\left(I - aa^*\frac{1+S_0-r^2(1+s)}{(1+s)(1+S_0-r^2||a||^2)}\right)\gamma, \tag{8}$$

здесь λ надо выбрать так, чтобы $||\gamma_0|| = 1$. Тогда (7) запишется в виде

$$\mathrm{tr}\{D^2 g_a(0)(\gamma,\cdot)\} = (n+1)(a^*\gamma) +$$

$$+\mathrm{tr}\{(Df(ra))^{-1}D^2 f(ra)(\frac{S_0(a^* r\gamma_0\lambda)}{1+S_0}(ar) - S_0\gamma_0\lambda,\cdot)\} =$$

$$= [(n+1)(a^* r\gamma_0)\lambda + \lambda\mathrm{tr}\{(Df(ra))^{-1}D^2 f(ra)(\frac{S_0(a^* r\gamma_0)}{1+S_0}(ar) - S_0\gamma_0,\cdot)\}] +$$

$$+[(n+1)\langle\gamma - \lambda r\gamma_0, a\rangle]. \tag{9}$$

Из определения 2, равенства $\mathrm{ord}\, f = \alpha$ и формулы (6), записанной для отображения f, следует, что модуль первой квадратной скобки в (9) не превосходит $2\alpha\lambda$. Оценим вторую скобку

$$\gamma - \lambda r\gamma_0 = \left(1 - \frac{sr^2}{S_0}\right)\gamma + \frac{sr^2}{S_0}\frac{1+S_0-r^2(1+s)}{(1+s)(1+S_0-r^2||a||^2)}\langle\gamma, a\rangle a.$$

Следовательно,

$$[(n+1)\langle\gamma - \lambda r\gamma_0, a\rangle] = (n+1)[(1 - \frac{sr^2}{S_0})\langle\gamma, a\rangle +$$

$$+\frac{sr^2}{S_0}\frac{(1+S_0-r^2(1+s))(1-s)}{1+S_0-r^2||a||^2}\langle\gamma,a\rangle] =$$

$$=(n+1)\langle\gamma,a\rangle\left(1-\frac{sr^2}{S_0}\frac{1+S_0-(1+S_0)(1-s)}{1+S_0-r^2||a||^2}\right)=(n+1)(1-B)\langle\gamma,a\rangle,$$

где

$$B=\frac{sr^2}{S_0}\frac{(1+S_0)s}{1+S_0-r^2||a||^2}.$$

Поскольку $||\gamma_0||=1$, то из (8) имеем: $\lambda=\dfrac{sr}{S_0}||\gamma-A\langle\gamma,a\rangle a||$, где

$$A=\frac{1+S_0-r^2(1+s)}{(1+s)(1+S_0)S_0}=\frac{S_0-s}{(1-s^2)S_0}\Longrightarrow B=\frac{s^2r^2}{S_0^2}=\frac{sr^2}{S_0}(1-A||a||^2); \tag{10}$$

заметим, что $0<B<1$. Следовательно,

$$1-A||a||^2=\frac{s}{S_0}. \tag{11}$$

Таким образом,

$$\lambda=\frac{sr}{S_0}\sqrt{\langle\gamma-A\langle\gamma,a\rangle a,\gamma-A\langle\gamma,a\rangle a\rangle}=$$

$$=\frac{sr}{S_0}\sqrt{1-2A|\langle\gamma,a\rangle|^2+A^2|\langle\gamma,a\rangle|^2||a||^2}.$$

Обозначим

$$M=\max_{\gamma\in\partial\mathbb{B}^n}[|(n+1)\langle\gamma-\lambda r\gamma_0,a\rangle|+2\alpha\lambda],$$

из (5), (6) и (9) будет следовать утверждение леммы, если покажем, что $M\le 2\alpha$.

Обозначим $t=|\langle\gamma,a\rangle|\in[0,||a||]$,

$$\psi(t)=(n+1)(1-B)t+\frac{2\alpha sr}{S_0}\sqrt{1-t^2A(2-A||a||^2)},$$

тогда $M=\max\limits_{t\in[0,||a||]}\psi(t)$. Рассмотрим

$$\psi'(t)=(n+1)(1-B)+\frac{2\alpha sr}{S_0}\cdot\frac{-A(2-A||a||^2)}{\sqrt{1-t^2A(2-A||a||^2)}}t.$$

Обозначим

$$B_0 = (n+1)(1-B), C_0 = \frac{2\alpha sr}{S_0}, A_0 = A(2 - A||a||^2);$$

$A_0 > 0$, поскольку $A > 0$, $1 > A||a||^2$ (см. (11)). Тогда уравнение

$$\psi'(t) = 0 \Longleftrightarrow B_0 - C_0 \frac{A_0 t}{\sqrt{1 - t^2 A_0}} = 0$$

приводит к решению

$$t_0 = \frac{B_0}{\sqrt{B_0^2 A_0 + C_0^2 A_0^2}},$$

которое является точкой локального максимума функции $\psi(t)$. Возможны 2 случая.

1) $t_0 \le ||a|| \Longleftrightarrow B_0^2 \le (B_0^2 A_0 + C_0^2 A_0^2)||a||^2 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow B_0^2(1 - A_0||a||^2) \le C_0^2 A_0^2 ||a||^2; \tag{12}$$

заметим, что (см. (11))

$$1 - A_0||a||^2 = 1 - A||a||^2(2 - A||a||^2) = (1 - A||a||^2)^2 > 0.$$

Условие (12) перепишем в виде

$$\frac{B_0^2}{A_0} \le \frac{C_0^2 A_0 ||a||^2}{1 - A_0||a||^2} \Longleftrightarrow \frac{B_0^2}{A_0} + C_0^2 \le \frac{C_0^2}{(1 - A||a||^2)^2}. \tag{13}$$

Нужно проверить, что $\psi(t_0) \le 2\alpha$, т. е.

$$\psi(t_0) = \frac{B_0^2}{\sqrt{C_0^2 A_0^2 + B_0^2 A_0}} + C_0 \sqrt{1 - A_0 \frac{B_0^2}{C_0^2 A_0^2 + B_0^2 A_0}} =$$

$$= \sqrt{C_0^2 + \frac{B_0^2}{A_0}} \le 2\alpha.$$

Из (13) вытекает, что достаточно проверить неравенство $\dfrac{C_0}{1 - A||a||^2} \le 2\alpha$, что равносильно (см. (11)) очевидному неравенству $\dfrac{2\alpha sr}{S_0} \le 2\alpha \dfrac{s}{S_0}$.

2) $t_0 > ||a||$. Тогда $M = \psi(||a||)$ и, учитывая (10) и (11), имеем

$$M = (n+1)(1-B)||a|| + \frac{2\alpha s r}{S_0}\sqrt{1 - A||a||^2(2 - A||a||^2)} =$$

$$= (n+1)\left(1 - \frac{s^2 r^2}{S_0^2}\right)||a|| + \frac{2\alpha s^2 r}{S_0^2}.$$

Покажем, что $M \le 2\alpha$. Поскольку $\alpha \ge \dfrac{n+1}{2}$, то достаточно доказать неравенство

$$\left(1 - \frac{s^2 r^2}{S_0^2}\right)||a|| + \frac{s^2 r}{S_0^2} \le 1, \qquad (14)$$

(14) равносильно неравенству

$$\frac{s^2 r}{S_0^2}(1 - r||a||) \le 1 - ||a|| \iff (1 + ||a||)(1 - r||a||)r \le 1 - r^2||a||^2 \iff$$

$$\iff (1 + ||a|| - r||a|| - r||a||^2)r \le 1 - r^2||a||^2 \iff ||a||r(1-r) \le 1 - r,$$

последнее очевидно. Лемма доказана.

□

Доказательство теоремы. Пусть $G \in \mathcal{F}_{n+1}$, следовательно $G(Z) = \Lambda_\varphi[\hat{f}](Z)$, где $\hat{f} \in \hat{\mathcal{F}}$, $\varphi(Z) = \Phi_A(UZ)$, $A = (a, \bar{a}_{n+1}) \in \mathbb{B}^{n+1}$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}^n$,

$$\Phi_A(Z) = \frac{A - ZS - \frac{\langle Z, A\rangle}{1+S}A}{1 - \langle Z, A\rangle}, \quad S = \sqrt{1 - ||A||^2};$$

здесь U — унитарная матрица $(n+1)$-го порядка. Обозначим $\mathcal{U}_1$ первый столбец матрицы U. Если ord $\mathcal{F}_{n+1} = \alpha_1$, то (см. (3)) ord $\{\mathcal{F}_{n+1}\}^*$ $= \alpha_1 \dfrac{2}{n+2}$. Из (4) следует, что

$$\alpha_1 \frac{2}{n+2} = \inf\{\delta > 0 : |J_G(z_1, 0)|^{\frac{2}{n+2}} \le \frac{(1+|z_1|)^{\delta-1}}{(1-|z_1|)^{\delta+1}} \quad \forall G \in \mathcal{F}_{n+1}\}, \qquad (15)$$

z_1— из сколь угодно малой окрестности нуля в $\mathbb{B}$ (здесь и далее 0 означает нуль в пространстве, размерность которого каждый раз ясна из контекста). Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что правая часть в (15) равна $\alpha\dfrac{2}{n+1}$. Из определения $\hat{f}$ вытекает, что $J_{\hat{f}}(Z) = J_f^{(n+2)/(n+1)}(z)$. Заметим, что

$$|J_G(z_1,0)|^{\frac{2}{n+2}} = \left|\frac{J_{\hat{f}}(\Phi_A(U(z_1,0)))}{J_{\hat{f}}(\Phi_A(0))}\frac{J_{\Phi_A}(U(z_1,0))}{J_{\Phi_A}(0)}\right|^{\frac{2}{n+2}} =$$

$$= \left|\frac{J_f(\Psi_A(z_1))}{J_f(a)}\frac{1}{(1-z_1\langle\mathcal{U}_1,A\rangle)^{n+1}}\right|^{\frac{2}{n+1}}, \quad f\in\mathfrak{M}(n), \tag{16}$$

где $\Psi_A(z_1)$ — вектор из первых n координат $(n+1)$-мерного вектора $\Phi_A(U(z_1,0))$. Поскольку для $f\in\mathfrak{M}(n)$ отображение $U_n^{-1}f(U_nz)\in\mathfrak{M}(n)$ для любой унитарной матрицы U_n n-го порядка, то (16) можно переписать в виде

$$J_G(z_1,0)|^{\frac{2}{n+2}} = \left|\frac{J_{f_*}(U_n\Psi_A(z_1))}{J_{f_*}(U_na)}\frac{1}{(1-z_1\langle\mathcal{U}_1,A\rangle)^{n+1}}\right|^{\frac{2}{n+1}} =$$

$$= \left|\frac{J_{\hat{f}_*}(U_{n+1}\Phi_A(U(z_1,0)))}{J_{\hat{f}_*}(U_{n+1}\Phi_A(0))}\frac{J_{\Phi_A}(U(z_1,0))}{J_{\Phi_A}(0)}\right|^{\frac{2}{n+2}}, \tag{17}$$

где f_* — некоторая функция из $\mathfrak{M}(n)$, $\hat{f}_*(Z) =$
$= (f_*(z), z_{n+1}(J_{f_*}(z))^{1/(n+1)})$, U_n — произвольно выбираемая унитарная матрица (какой ее взять — укажем позже), U_{n+1} — унитарная матрица, в левом верхнем углу которой находится матрица U_n, последние строка и столбец матрицы U_{n+1} составлены из нулей, за исключением последнего их элемента, равного $e^{-it}, t\in\mathbb{R}$. Для любого $\xi\in[0,2\pi)$ подберем U_n так, чтобы $U_na = (||a||e^{-i\xi},0) = a'$. Тогда $U_{n+1}A = (U_na, \bar{a}_{n+1}e^{-it})$. Обозначим U^{n+1} унитарную матрицу $U_{n+1}U$, обозначим $\mathcal{U}^1 = (u', u_{n+1}),\ u' = (u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{C}^n$, 1-й столбец матрицы U^{n+1}. В этих обозначениях (17) примет вид:

$$J_G(z_1,0)|^{\frac{2}{n+2}} = \left|\frac{J_{\hat{f}_*}(\Phi_{U_{n+1}A}(U^{n+1}(z_1,0))J_{\Phi_{U_{n+1}A}}(U^{n+1}(z_1,0))}{J_{\hat{f}_*}(\Phi_{U_{n+1}A}(0)) \qquad J_{\Phi_{U_{n+1}A}(0)}}\right|^{\frac{2}{n+2}}_{.} \tag{18}$$

Обозначим $\psi_a(z_1)$ вектор из первых n координат $(n+1)$-мерного вектора $\Phi_{U_{n+1}A}(U^{n+1}(z_1,0)) = \Phi_{(a',\bar{a}_{n+1}e^{-it})}(z_1\mathcal{U}^1)$,

$$\psi_{a'}(z_1) = \frac{a' - Sz_1u' - z_1\dfrac{||a||e^{i\xi}u_1 + a_{n+1}e^{it}u_{n+1}}{1+S}a'}{1 - z_1(||a||e^{i\xi}u_1 + a_{n+1}e^{it}u_{n+1})};$$

здесь $S = \sqrt{1-||A||^2} = \sqrt{1-||a||^2-|a_{n+1}|^2}$. Обозначим $x = ||a||e^{i\xi}u_1$, $y = a_{n+1}e^{it}u_{n+1}$. Тогда

$$\langle\mathcal{U}_1, A\rangle = \langle U_{n+1}\mathcal{U}_1, U_{n+1}A\rangle = \langle\mathcal{U}^1, U_{n+1}A\rangle = \langle u', a\rangle + u_{n+1}a_{n+1}e^{it} =$$

$$= x + y.$$

При малых $\rho = |z_1|$ имеем:

$$\psi_{a'}(z_1) = \frac{a' - Sz_1u' - a'\dfrac{z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}{1+S}}{1 - z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle} =$$

$$= \left(a'\left(1 - \frac{z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}{1+S}\right) - Sz_1u'\right)(1 + z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle + o(\rho)) =$$

$$= a'\left(1 - \frac{z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}{1+S}\right) - Sz_1u' + z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle a' + o(\rho)).$$

Рассмотрим автоморфизм шара $\mathbb{B}^n$

$$\varphi_{a'}(z) = \frac{a' - sz - \dfrac{\langle z, a'\rangle}{1+s}a'}{1 - \langle z, a'\rangle}, \quad z \in \mathbb{B}^n, \quad s = \sqrt{1-||a'||^2} = \sqrt{1-||a||^2}.$$

При малых ρ найдем вектор $\hat{z}$, являющийся решением уравнения $\psi_{a'}(z_1) = \varphi_{a'}(\hat{z})$. Поскольку $\varphi_{a'}(\hat{z}) = a' + D\varphi_{a'}(0)\hat{z} + o(\rho)$, то

$$D\varphi_{a'}(0)\hat{z} = a'\left(z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle - \frac{z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}{1+S}\right) - Sz_1u' + o(\rho) =$$

$$= a'z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle\frac{S}{1+S} - Sz_1u' + o(\rho) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \hat{z} = (D\varphi_{a'}(0))^{-1}\left[a'z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle\frac{S}{1+S} - Sz_1u'\right] + o(\rho).$$

Но $(D\varphi_{a'}(0))^{-1} = -\frac{1}{s}\left(I + \frac{a'a'^*}{s(1+s)}\right)$ (см. [8, теорема 2.2.2]), следовательно,

$$\hat{z} = -\frac{1}{s}[a'\frac{S}{1+S}\langle\mathcal{U}_1, A\rangle z_1 - Sz_1u' +$$

$$+\frac{1}{s(1+s)}(\frac{S}{1+S}\langle\mathcal{U}_1, A\rangle z_1||a||^2a' - Sz_1\langle u', a'\rangle a')] + o(\rho) =$$

$$= -\frac{S}{s}z_1\left[a'\frac{\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}{s(1+S)} - a'\frac{\langle u', a'\rangle}{s(1+s)} - u'\right] + o(\rho);$$

$$||\hat{z}||^2 = \left(\frac{S}{s}|z_1|\right)^2 [||a'||^2\left|\frac{\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}{s(1+S)} - \frac{\langle u', a'\rangle}{s(1+s)}\right|^2 + ||u'||^2 -$$

$$-2\,\mathrm{Re}\{(\frac{\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}{s(1+S)} - \frac{\langle u', a'\rangle}{s(1+s)})\langle a', u'\rangle\}] + o(\rho).$$

Следовательно,

$$||\hat{z}|| = \frac{S}{s}|z_1|[||a||^2\left|\frac{\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}{s(1+S)} - \frac{\langle u', a'\rangle}{s(1+s)}\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\{\frac{\langle\mathcal{U}_1, A\rangle\langle a', u'\rangle}{s(1+S)}\} +$$

$$+2\frac{|\langle u', a'\rangle|^2}{s(1+s)} + ||u'||^2]^{\frac{1}{2}} + o(\rho),$$

$$\langle\hat{z}, a'\rangle = -\frac{S}{s}z_1\left[||a'||^2\frac{\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}{s(1+S)} - \frac{||a'||^2\langle u', a'\rangle}{s(1+s)} - \langle u', a'\rangle\right] + o(\rho) =$$

$$= \frac{S}{s}z_1\left[-||a||^2\frac{\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}{s(1+S)} + \frac{\langle u', a'\rangle}{s}\right] + o(\rho).$$

Из (17) и (18) получаем:

$$J_G(z_1, 0)|^{\frac{2}{n+2}} = \left|\frac{J_{f_*}(\psi_{a'}(z_1))}{J_{f_*}(a')}\frac{1}{(1 - z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle)^{n+1}}\right|^{\frac{2}{n+1}} =$$

$$= \left|\frac{J_{f_*}(\varphi_{a'}(\hat{z}))}{J_{f_*}(\varphi_{a'}(0))}\frac{1}{(1 - \langle\hat{z}, a'\rangle)^{n+1}}\right|^{\frac{2}{n+1}}\left|\frac{1 - \langle\hat{z}, a'\rangle}{1 - z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}\right|^2 =$$

$$= |J_g(\hat{z})|^{\frac{2}{n+1}}\left|\frac{1 - \langle\hat{z}, a'\rangle}{1 - z_1\langle\mathcal{U}_1, A\rangle}\right|^2,$$

где $g \in \Lambda[f_*]$. Из (4) и инвариантности $\mathfrak{M}(n)$ относительно преобразования вращения $U_n^{-1} f(U_n z)$ (U_n — унитарная) следует, что для любой последовательности $\{\hat{z}^m\}_{m=1}^{\infty} : \ ||\hat{z}^m|| = R_m \to 0$ точек из $\mathbb{B}^n$ существует последовательность таких положительных чисел β_m, что при $m \to \infty \qquad \beta_m \to \beta = \alpha \dfrac{2}{n+1} \geq 1$, а

$$\sup_{g \in \mathfrak{M}(n)} |J_g(\hat{z}^m)|^{\frac{2}{n+1}} = \frac{(1+R_m)^{\beta_m - 1}}{(1-R_m)^{\beta_m+1}}.$$

Поэтому существует последовательность $\{\hat{z}^m\}_{m=1}^{\infty}$ точек из $\mathbb{B}^n$ и соответствующая ей последовательность $\{\hat{z}_1^m\}_{m=1}^{\infty}$, $\hat{z}_1^m = \rho_m e^{i\theta_m}$, составленная из первых координат точек $\hat{z}^m$, такая, что при $m \to \infty$ $\rho_m = |\hat{z}_1^m| \to 0$ и

$$\overline{\lim}_{z_1 \to 0} \sup_{G \in \mathcal{F}_{n+1}} |J_G(z_1, 0)|^{\frac{2}{n+2}} = \lim_{m \to \infty} \sup_{G \in \mathcal{F}_{n+1}} |J_G(\hat{z}_1^m, 0)|^{\frac{2}{n+2}} =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \left[\frac{(1+R_m)^{\beta - 1 + o(1)}}{(1-R_m)^{\beta+1+o(1)}} \left| \frac{1 - \langle \hat{z}^m, a' \rangle}{1 - \hat{z}_1^m \langle \mathcal{U}_1, A \rangle} \right|^2 \right].$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно проверить, что при $m \to \infty$

$$\inf_{\delta > 0} \left\{ \frac{(1+R_m)^{\beta - 1 + o(1)}}{(1-R_m)^{\beta+1+o(1)}} \left| \frac{1 - \langle \hat{z}^m, a' \rangle}{1 - \hat{z}_1^m \langle \mathcal{U}_1, A \rangle} \right|^2 \leq \frac{(1+\rho_m)^{\delta-1}}{(1-\rho_m)^{\delta+1}} \right\} \to \beta. \qquad (19)$$

Но

$$\left| \frac{1 - \langle \hat{z}^m, a' \rangle}{1 - \hat{z}_1^m \langle \mathcal{U}_1, A \rangle} \right|^2 = |1 - \langle \hat{z}^m, a' \rangle + \hat{z}_1^m \langle \mathcal{U}_1, A \rangle + o(\rho_m)|^2 =$$

$$= 1 + 2\,\mathrm{Re}\{-\langle \hat{z}^m, a' \rangle + \hat{z}_1^m \langle \mathcal{U}_1, A \rangle\} + o(\rho_m).$$

Поэтому проверка (19) сводится к проверке при $m \to \infty$ условия

$$\sup_{A \in \mathbb{B}^{n+1}, \mathcal{U}_1 \in \partial \mathbb{B}^{n+1}} [1 + 2(\beta + o(1)) R_m + 2\,\mathrm{Re}\{\hat{z}_1^m \langle \mathcal{U}_1, A \rangle - \langle \hat{z}^m, a' \rangle\}] =$$

$$= 1 + 2\rho_m(\beta + o(1)) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sup_{A \in \mathbb{B}^{n+1}, \mathcal{U}_1 \in \partial \mathbb{B}^{n+1}} [\beta \frac{R_m}{\rho_m} + \mathrm{Re}\{\frac{\hat{z}_1^m}{\rho_m} \langle \mathcal{U}_1, A \rangle - \langle \frac{\hat{z}^m}{\rho_m}, a' \rangle\}] = \beta + o(1),$$

$o(1) \to 0$ при $m \to \infty$. В силу произвольности $G \in \mathcal{F}_{n+1}$, число θ_m может принимать любые значения. Поэтому проверка последнего условия сводится к проверке неравенства

$$\sup_{A\in\mathbb{B}^{n+1},\mathcal{U}_1\in\partial\mathbb{B}^{n+1}}\{\beta\frac{S}{s}[(1-s^2)\left|\frac{\langle\mathcal{U}_1,A\rangle}{s(1+S)}-\frac{\langle u',a'\rangle}{s(1+s)}\right|^2-$$

$$-2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\langle\mathcal{U}_1,A\rangle\langle a',u'\rangle}{s(1+S)}\right\}+2\frac{|\langle u',a'\rangle|^2}{s(1+s)}+||u'||^2]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\left|\langle\mathcal{U}_1,A\rangle-\frac{S}{s^2}\langle u',a'\rangle+\frac{S\langle\mathcal{U}_1,A\rangle(1-s^2)}{s^2(1+S)}\right|\}=\beta.$$

Так как $||u'||^2 = 1-|u_{n+1}|^2 = 1-\dfrac{|y|^2}{|a_{n+1}|^2} = 1-\dfrac{|y|^2}{s^2-S^2}$, то последнее выражение под знаком супремума может быть записано в виде

$$\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}\left|\frac{x+y}{1+S}-\frac{x}{1+s}\right|^2-2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{(x+y)x}{s(1+S)}\right\}+2\frac{|x|^2}{s(1+s)}+1-\frac{|y|^2}{s^2-S^2}}$$

$$\times\beta\frac{S}{s}+\left|x+y-\frac{S}{s^2}x+\frac{S(1-s^2)(x+y)}{(1+S)s^2}\right|.$$

Обозначим $\hat{x}=\dfrac{x}{||a||}=\dfrac{x}{\sqrt{1-s^2}}$, $\hat{y}=\dfrac{y}{\sqrt{s^2-S^2}}$, тогда $|\hat{x}|=|u_1|\le 1$, $|\hat{y}|=|u_{n+1}|$. Следовательно, $|\hat{x}|^2+|\hat{y}|^2\le||\mathcal{U}^1||^2=1$. Таким образом, для доказательства теоремы осталось установить, что

$$\sup_{|\hat{x}|^2+|\hat{y}|^2\le1,0<S\le s\le1}\{\beta\frac{S}{s}[\frac{1-s^2}{s^2}\left|\frac{\hat{x}\sqrt{1-s^2}(s-S)}{(1+S)(1+s)}+\frac{\hat{y}\sqrt{s^2-S^2}}{1+S}\right|^2-$$

$$-2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\hat{y}\hat{x}\sqrt{(s^2-S^2)(1-s^2)}}{s(1+S)}\right\}-\frac{2|\hat{x}|^2(1-s^2)}{s}\left(\frac{1}{1+S}-\frac{1}{1+s}\right)+$$

$$+1-|\hat{y}|^2]^{\frac{1}{2}}+\left|\hat{x}\sqrt{1-s^2}+\hat{y}\sqrt{s^2-S^2}-\frac{S}{s^2}\sqrt{1-s^2}\hat{x}+\right.$$

$$\left.+\frac{S(1-s^2)}{(1+S)s^2}(\hat{x}\sqrt{1-s^2}+\hat{y}\sqrt{s^2-S^2})\right|\}=\beta. \qquad (20)$$

Обозначим $\Omega(\hat{x}, \hat{y}, s, S)$ выражение под знаком супремума в (20). Для доказательства теоремы осталось показать, что

$$\sup_{|\hat{x}|^2+|\hat{y}|^2\le 1, 0<S\le s\le 1} \Omega(\hat{x}, \hat{y}, s, S) = \beta. \tag{21}$$

Дадим простое доказательство (21).

Заметим, что в случае $n = 1$ теорема наша известна, ее справедливость вытекает из применения к $\mathfrak{M}(1)$ конструкции Roper'a-Suffridge (см., например, [4, следствие 5.2]). При $n = 1$ выражение $\Omega(\hat{x}, \hat{y}, s, S)$ будет иметь тот же вид, что и в (20), но в случае $n = 1$ в (21) супремум берется по множеству $\{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{C}^2 : \quad |\hat{x}|^2 + |\hat{y}|^2 = 1\}$. Однако по лемме ord $f_r \le$ ord f для $r \in (0,1)$. Поэтому для $G \in \mathcal{F}_2$ получаем: ord $G_r \le$ ord G. Значит, если в выражении для J_G в (16) вместо унитарной матрицы U писать (rU), то инфимум в (15) не увеличится. Следовательно, $\sup\limits_{|\hat{x}|^2+|\hat{y}|^2=1, 0<S\le s\le 1} \Omega(\hat{x}, \hat{y}, s, S)$ не увеличится после замены в нем условия $|\hat{x}|^2 + |\hat{y}|^2 = 1$ условием $|\hat{x}|^2 + |\hat{y}|^2 \le 1$. Таким образом, в случае $n = 1$ (21) имеет место, но (21) от n не зависит. Это доказывает теорему. □

Résumé

In the paper there has been given the complete proof of an extension theorem from [1], which concerns the changes of the order of linearly invariant families (LIF) during passage from arbitrarily fixed LIF in $\mathbb{C}^n$ to a LIF in $\mathbb{C}^{n+1}$.

Литература

[1] Pfaltzgraff J. A. *An extension theorem and linear invariant families generated by starlike maps*/ J. A. Pfaltzgraff, T. J. Suffridge//Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A. 1999. V. 53. P. 193–203.

[2] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktinen. I*/Ch. Pommerenke //Math. Ann. 1964. Hf. 155. P. 108–154.

[3] Pfaltzgraff J. A. *Distortion of locally biholomorphic maps of the n-ball*/J. A. Pfaltzgraff // Complex Variables. 1997. V. 33. P. 239–253.

[4] Pfaltzgraff J. A. *Erratum "Distortion of locally biholomorphic maps of the n-ball"* /J. A. Pfaltzgraff // Complex Variables. 2001. V. 45. P. 197–200.

[5] Личберский П. *Линейно-инвариантные семейства голоморфных отображений шара, метод понижения размерности*/ П. Личберский, В. В. Старков// Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. С. 849–867.

[6] Godula J. *Order of linearly invariant family of mappings in* $\mathbb{C}^n$ /J. Godula, P. Liczberski, V. V. Starkov// Complex Variables. 2000. V. 42. P. 89–96.

[7] Campbell D. M. *Locally univalent functions with locally univalent derivatives* /D. M. Campbell // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 162. P. 395–409.

[8] Годуля Я. *О точности некоторых неравенств Д. М. Кэмпбэлла и Х. Поммеренке* / Я. Годуля, В. В. Старков // Мат. заметки. 1998. Т. 63. Вып. 5. С. 665–672.

[9] Рудин В. *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$ /В. Рудин. М.: Мир, 1984.

Institute of Mathematics
Technical University of Lodz,
ul. Zwirki 36, 90-924 Lodz, Poland,
E-mail: piliczb@p.lodz.pl

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail:Vstar@psu.karelia.ru
Institute of Mathematics
Technical University of Lodz,
ul. Zwirki 36, 90-924 Lodz, Poland,
E-mail: Vstar@im0.p.lodz.pl