Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 10, 2003

УДК 517.5

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА, НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

С. С. Платонов

Для функций на плоскости Лобачевского доказан аналог классической теоремы Е. Титчмарша об описании образа при преобразовании Фурье множества функций, удовлетворяющих условию Липшица в L^2.

§ 1. Формулировка основного результата

Плоскость Лобачевского является очень богатым объектом, на котором существует не только геометрия, но и хорошо развитый анализ (см., например, [1–4]). В частности, для функций на плоскости Лобачевского определено преобразование Фурье и для многих классических задач гармонического анализа существуют их естественные неевклидовы аналоги для плоскости Лобачевского. В настоящей работе получен аналог одной классической теоремы Е. Титчмарша об описании образа при преобразовании Фурье множества функций, удовлетворяющих условию Липшица в L^2. Приведем точную формулировку этой теоремы. Пусть $f(x)$ — функция из пространства $L^2(\mathbb{R})$ (все рассматриваемые функции комплекснозначные), $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$ — норма в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, α — произвольное число из интервала $(0, 1)$.

Определение 1. *Функция $f(x)$ принадлежит классу Липшица* $\mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, *если*

$$\|f(x+t) - f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(t^\alpha)$$

при $t \to 0$.

Теорема 1. [5, теор. 85]. *Если $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, а $\widehat{f}(\lambda)$ — ее преобразование Фурье, то условия*

$$\|f(x+t) - f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(t^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.1}$$

при $t \to 0$ и

$$\int\limits_{|\lambda| \geq X} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda = O(X^{-2\alpha}) \tag{1.2}$$

при $X \to +\infty$ эквивалентны.

Пусть H^2 — плоскость Лобачевского (гиперболическая плоскость). Мы будем использовать модель Пуанкаре плоскости Лобачевского, т. е. считать, что

$$H^2 = D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}. \tag{1.3}$$

Точки из H^2 отождествляются с комплексными числами $z = x + iy$ из открытого круга D. Геометрия в D определяется римановой метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \tag{1.4}$$

При помощи римановой метрики определяется расстояние $\rho(z_1, z_2)$ между точками из D. В явном виде это расстояние задается формулой

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}, \quad z_1, z_2 \in D. \tag{1.5}$$

В частности, $\rho(o, z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$, где o — центр круга D.

Инвариантная мера на H^2 (т. е. инвариантная относительно изометрий) имеет вид

$$dz = (1 - x^2 - y^2)^{-2} \, dx \, dy. \tag{1.6}$$

Пусть

$$L^2(H^2) := L^2(D, dz). \tag{1.7}$$

Норму в гильбертовом пространстве $L^2(H^2)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_2$.

Приведем необходимые сведения о преобразовании Фурье на H^2 по книге С. Хелгасона [2]. Обозначим через $C_0(H^2)$ множество всех непрерывных функций на H^2 с компактными носителями. Пусть $B = \partial D = \{z : |z| = 1\}$ — граничная окружность круга D. Орициклом называется любая евклидова окружность в D, касательная к границе B. Для любых точек $z \in D$ и $b \in B$ существует единственный орицикл ξ, проходящий через точки z и b. По определению, $\langle z, b\rangle$ равно расстоянию от точки o до орицикла ξ, взятому со знаком плюс, если o лежит вне ξ, и со знаком минус, если o лежит внутри ξ.

Для любой функции $f(z) \in C_0(H^2)$ ее гиперболическое преобразование Фурье определяется формулой

$$\widehat{f}(\lambda, b) = \int_D f(z)\, e^{(-i\lambda+1)\langle z,b\rangle}\, dz, \tag{1.8}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, $b \in B$. Для гиперболического преобразования Фурье выполняется равенство Парсеваля:

$$\int_D |f(z)|^2\, dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_B |\widehat{f}(\lambda, b)|^2\, \lambda\, \mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2})\, d\lambda\, db, \tag{1.9}$$

где $b = e^{i\varphi} \in B$, $db = \frac{1}{2\pi}d\varphi$ — нормированная мера на B (т. е. $\int_B db = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\varphi = 1$).

Отображение $f(z) \mapsto \widehat{f}(\lambda, b)$ продолжается по непрерывности с $C_0(H^2)$ до изометрического отображения пространства $L^2(H^2)$ на пространство $L^2(\mathbb{R}_+ \times B, d\mu)$, где $d\mu(\lambda, b) = \frac{1}{2\pi}\lambda\, \mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2})\, d\lambda\, db$ — мера на $\mathbb{R}_+ \times B$. Продолженное отображение будем также называть гиперболическим преобразованием Фурье и обозначать $\widehat{f}(\lambda, b)$.

Введем оператор сдвига на плоскости Лобачевского. Пусть $z \in H^2 = D$, $t > 0$,

$$\sigma(z; t) = \{w \in H^2 : \rho(z, w) = t\}$$

— окружность на плоскости Лобачевского радиусом t с центром в точке z. Известно, что длина окружности $\sigma(z; t)$ равна $2\pi\, \mathrm{sh}\, t$.

Для любой функции $f(z) \in C_0(H^2)$ оператор сдвига S^t определим по формуле

$$(S^t f)(z) := \frac{1}{2\pi\, \mathrm{sh}\, t}\int_{\sigma(z;t)} f(w)\, dl, \tag{1.10}$$

где dl — элемент длины дуги (т. е. $(S^t f)(z)$ — усреднение функции f по окружности $\sigma(z; t)$). Можно показать (см. следующий параграф), что $||S^t f||_2 \le ||f||_2$, поэтому оператор S^t продолжается по непрерывности на все пространство $L^2(H^2)$.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит классу Липшица* $\mathrm{Lip}_{H^2}(\alpha, 2)$, *если* $f(z) \in L^2(H^2)$ *и*

$$\|S^t f - f\|_2 = O(t^\alpha)$$

при $t \to 0$.

Аналогом теоремы 1 для плоскости Лобачевского является следующая

Теорема 2. *Пусть* $f(z) \in L^2(H^2)$. *Тогда условия*

$$\|S^t f - f\|_2 = O(t^\alpha) \tag{1.11}$$

при $t \to 0$, $0 < \alpha < 1$, *и*

$$\int_X^\infty \int_B |\widehat{f}(\lambda, b)|^2 \, \lambda \, d\lambda \, db = O(X^{-2\alpha}) \tag{1.12}$$

при $X \to \infty$ *эквивалентны.*

Доказательство теоремы 2 приводится в следующем параграфе. Отметим, что другой вариант перенесения теоремы 1 на плоскость Лобачевского предложен в работе [7], но там используется другой оператор сдвига, который зависит от модели плоскости Лобачевского, в то время как сдвиг S^t имеет чисто геометрическое происхождение.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Плоскость Лобачевского H^2 является представителем широкого класса римановых многообразий — римановых симметрических пространств некомпактного типа ранга 1. Гармонический анализ на таких многообразиях активно изучается в современной литературе (см., например, [1–3]). Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, которые следуют из более общих результатов для произвольных римановых симметрических пространств некомпактного типа ранга 1, полученных в [8].

Для модели Пуанкаре D плоскости Лобачевского H^2 группой изометрий является группа $G = SU(1,1)$, состоящая из матриц

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix},$$

где $a, b \in \mathbb{C}$ и $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Группа $SU(1,1)$ действует на D посредством отображений

$$g : z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \quad z \in D.$$

Это действие транзитивно, в частности, любую точку $z \in D$ можно представить в виде $z = go$, $g \in G$. Стационарной подгруппой точки o является группа $K = SO(2)$, состоящая из матриц

$$k = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Пусть $dk = \frac{1}{2\pi} d\varphi$ — инвариантная мера на группе $SO(2)$.

Для любого $h \in G$ и для произвольной функции $f(z) \in C_0(H^2)$ положим

$$(T^h f)(z) := \int_K f(gkho)\, dk, \tag{2.1}$$

если $z = go$, $g \in G$. Проверим, что определение (2.1) корректно. Если z допускает другое представление $z = g_1 o$, $g_1 \in G$, то $g_1 = g\delta$ для некоторого $\delta \in K$. Пользуясь инвариантностью меры на группе K, получим, что

$$\int_K f(g_1 kho)\, dk = \int_K f(g\delta kho)\, dk = \int_K f(gkho)\, dk,$$

что доказывает корректность формулы (2.1).

Оператор T^h является другой формой оператора сдвига S^t. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть h — такой элемент из группы G, что $\rho(ho, o) = t$. Тогда*

$$(T^h f)(z) = (S^t f)(z), \quad z \in D. \tag{2.2}$$

Доказательство. См. [8, лемма 2.1]. □

Лемма 2. *Для любой функции $f(z) \in C_0(H^2)$ справедливо неравенство*

$$\|S^t f\|_2 \le \|f\|_2. \tag{2.3}$$

Доказательство. См. [8, лемма 2.2]. □

Из неравенства (2.3) следует, что оператор S^t (а также оператор T^h) продолжается по непрерывности с плотного подпространства $C_0(H^2)$ на все пространство $L^2(H^2)$, причем для продолженного оператора также справедливо неравенство (2.3).

В гармоническом анализе на симметрических пространствах важную роль играют сферические функции (см., например, [2]). На плоскости Лобачевского сферическая функция $\varphi_\lambda(z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, может быть задана формулой

$$\varphi_\lambda(z) = \int_K e^{(i\lambda+1)\langle z, kb\rangle}\, dk. \tag{2.4}$$

Лемма 3. (Преобразование Фурье оператора сдвига). *Если $\Phi(f)(\lambda, b) := \widehat{f}(\lambda, b)$ — гиперболическое преобразование Фурье, то*

$$\Phi(T^h f)(\lambda, b) = \varphi_\lambda(ho) \cdot \widehat{f}(\lambda, b), \quad h \in G. \tag{2.5}$$

Доказательство. См. [8, лемма 2.3]. □

Сферическая функция $\varphi_\lambda(z)$ удовлетворяет условию

$$\varphi_\lambda(kz) = \varphi_\lambda(z) \quad \forall k \in K,$$

поэтому $\varphi_\lambda(z)$ зависит только от расстояния $t = \rho(z, o)$ и мы будем часто писать $\varphi_\lambda(t)$ вместо $\varphi_\lambda(z)$ при $t = \rho(z, o)$. С учетом леммы 1, формулу (2.5) можно переписать в виде

$$\Phi(S^t f)(\lambda, b) = \varphi_\lambda(t) \cdot \widehat{f}(\lambda, b), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.6}$$

Отметим также, что $\varphi_\lambda(z) = \varphi_{-\lambda}(z)$, поэтому всюду будем предполагать, что $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Лемма 4. (Оценки для сферических функций). *Для сферической функции $\varphi_\lambda(t)$ справедливы следующие неравенства:*

1) $|\varphi_\lambda(t)| \le 1$, *причем равенство достигается только при* $t = 0$;
2) $|1 - \varphi_\lambda(t)| \le t^2(\lambda^2 + 1)$;
3) *существует постоянная* $c > 0$ *такая, что*

$$1 - \varphi_\lambda(t) \ge c$$

при $\lambda t \ge 1$.

Доказательство. См. [8, леммы 3.1, 3.2 и 3.3]. □

Доказательство теоремы 2.

Предположим, что для функции $f(z)$ выполняется условие (1.11), т. е.

$$||S^t f - f||_2 = O(t^\alpha) \tag{2.7}$$

при $t \to 0$. Из равенства Парсеваля и формулы (2.6) вытекает, что

$$||S^t f - f||_2^2 = \int_D |S^t f(z) - f(z)|^2 \, dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_B |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 |\widehat{f}(\lambda, b)|^2 \lambda \operatorname{th}(\frac{\pi\lambda}{2}) \, d\lambda \, db. \tag{2.8}$$

Поэтому условие (2.7) можно переписать в виде

$$\int_0^\infty \int_B |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 |\widehat{f}(\lambda, b)|^2 \lambda \operatorname{th}(\frac{\pi\lambda}{2}) \, d\lambda \, db = O(t^{2\alpha}). \tag{2.9}$$

Если $\lambda \in [1/t, 2/t]$, то $\lambda t \geq 1$ и из неравенства (3) из леммы 4 следует, что

$$1 \leq \frac{1}{c^2} |1 - \varphi_\lambda(t)|^2. \tag{2.10}$$

Тогда

$$\int_{1/t}^{2/t} \int_B |\widehat{f}(\lambda, b)|^2 \lambda \operatorname{th}(\frac{\pi\lambda}{2}) \, d\lambda \, db \leq$$
$$\leq \frac{1}{c^2} \int_{1/t}^{2/t} \int_B |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 |\widehat{f}(\lambda, b)|^2 \lambda \operatorname{th}(\frac{\pi\lambda}{2}) \, d\lambda \, db \leq$$
$$\leq \frac{1}{c^2} \int_0^\infty \int_B |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 |\widehat{f}(\lambda, b)|^2 \lambda \operatorname{th}(\frac{\pi\lambda}{2}) \, d\lambda \, db = O(t^{2\alpha}). \tag{2.11}$$

Так как $\operatorname{th}(\frac{\pi\lambda}{2}) \to 1$ при $\lambda \to \infty$, то и

$$\int_{1/t}^{2/t} \int_B |\widehat{f}(\lambda, b)|^2 \lambda \, d\lambda \, db = O(t^{2\alpha}). \tag{2.12}$$

Следовательно,

$$\int_X^{2X} \int_B |\widehat{f}(\lambda, b)|^2 \lambda \, d\lambda \, db \leq C_1 \, X^{-2\alpha}, \tag{2.13}$$

где $C_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Используя (2.13), получаем, что

$$\int_X^\infty \int_B |\widehat{f}(\lambda, b)|^2 \lambda \, d\lambda \, db =$$

$$= \int_X^{2X} \int_B |\widehat{f}|^2 \lambda \, d\lambda \, db + \int_{2X}^{4X} \int_B |\widehat{f}|^2 \lambda \, d\lambda \, db + \int_{4X}^{8X} \int_B |\widehat{f}|^2 \lambda \, d\lambda \, db + \ldots \leq$$
$$\leq C_1 \, X^{-2\alpha} + C_1 (2X)^{-2\alpha} + C_1 (4X)^{-2\alpha} + \ldots \leq C_2 \, X^{-2\alpha},$$

что доказывает (1.12). Поэтому из (1.11) следует (1.12).

Теперь предположим, что для функции $f(z)$ справедливо условие (1.12), т. е.

$$\int_X^\infty \int_B |\widehat{f}(\lambda, b)|^2 \lambda \, d\lambda \, db = O(X^{-2\alpha}) \tag{2.14}$$

при $X \to \infty$. Перепишем формулу (2.8) в виде

$$2\pi ||S^t f - f||_2^2 = I_1 + I_2, \tag{2.15}$$

где

$$I_1 = \int_0^{1/t} \int_B |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 |\widehat{f}|^2 \lambda \, \mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2}) \, d\lambda \, db, \tag{2.16}$$

$$I_2 = \int_{1/t}^\infty \int_B |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 |\widehat{f}|^2 \lambda \, \mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2}) \, d\lambda \, db. \tag{2.17}$$

Оценим сверху слагаемые I_1 и I_2.

$$I_2 = \int_{1/t}^\infty \int_B |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 |\widehat{f}|^2 \lambda \, \mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2}) \, d\lambda \, db \leq$$
$$\leq 4 \int_{1/t}^\infty \int_B |\widehat{f}|^2 \lambda \, d\lambda \, db = O(t^{2\alpha}). \tag{2.18}$$

При этом использовано неравенство (1) из леммы 4 и то, что $\mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2}) \leq 1$.

Для оценки I_1 используем неравенство (2) из леммы 4:

$$I_1 = \int_0^{1/t} \int_B |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 |\widehat{f}|^2 \lambda \, \mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2}) \, d\lambda \, db \leq$$

$$\leq \int_0^{1/t}\int_B (\lambda^2+1)|\widehat{f}|^2\lambda\,\mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2})\,d\lambda\,db = I_3 + I_4, \tag{2.19}$$

где

$$I_3 = t^2\int_0^{1/t}\int_B |\widehat{f}|^2\lambda\,\mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2})\,d\lambda\,db,$$
$$I_4 = t^2\int_0^{1/t}\int_B \lambda^2|\widehat{f}|^2\lambda\,\mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2})\,d\lambda\,db.$$

Заметим, что

$$I_3 \leq t^2\int_0^{\infty}\int_B |\widehat{f}|^2\lambda\,\mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2})\,d\lambda\,db = 2\pi t^2\|f\|_2^2 = O(t^{2\alpha}), \tag{2.20}$$

так как $2\alpha < 2$.

Временно обозначим

$$\psi(X) = \int_X^{\infty}\int_B |\widehat{f}|^2\lambda\,\mathrm{th}(\frac{\pi\lambda}{2})\,d\lambda\,db.$$

Тогда, используя интегрирование по частям, получим, что

$$I_4 = t^2\int_0^{1/t}\left(-X^2\psi'(x)\right)\,dX =$$
$$= t^2\left[-\frac{1}{t^2}\psi(\frac{1}{t}) + 2\int_0^{1/t} X\,\psi(X)\,dX\right] =$$
$$= -\psi(\frac{1}{t}) + 2t^2\int_0^{1/t} X\,\psi(X)\,dX$$

Так как $\psi(\frac{1}{t}) = O(t^{2\alpha})$, то $X\,\psi(X) = O(X^{1-2\alpha})$ и

$$\int_0^{1/t} X\,\psi(X)\,dX = O(\int_0^{1/t} X^{1-2\alpha}\,dX) = O(t^{2\alpha-2}).$$

Следовательно

$$I_4 = O(t^{2\alpha}). \tag{2.21}$$

Окончательно, из (2.15), (2.18), (2.19), (2.20) и (2.21) вытекает, что

$$\|S^t f - f\|_2^2 = O(t^{2\alpha})$$

при $t \to 0$, т. е. из (1.12) следует (1.11), что завершает доказательство теоремы 2.

Résumé

We prove the non-Euclidean analogue of the theorem of E. Titchmarsh about the description of image under Fourier transform of functions satisfying certain Lipschitz conditions.

Литература

[1] Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*/С. Хелгасон. М.: Мир, 1964.

[2] Хелгасон С. *Группы и геометрический анализ*/С. Хелгасон. М.: Мир, 1987.

[3] Helgason S. *Geometric analysis on symmetric spaces*/S. Helgason. Providence: American Mathematical Society, 1991.

[4] Альфорс Л. *Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве*/Л. Альфорс. М.: Мир, 1986.

[5] Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье*/Е. Титчмарш. М.: Гостехиздат, 1948.

[6] Бердон А. *Геометрия дискретных групп*/А. Бердон. М.: Наука, 1986.

[7] Younis M. S. *Fourier transforms of Lipschitz functions on the hyperbolic plane*/M. S. Younis//Internat. J. Math. & Math. Sci. V. 21. № 2 (1998). P. 397–401.

[8] Платонов С. С. *Приближение функций в метрике L_2 на некомпактных симметрических пространствах ранга 1*/ С. С. Платонов//Алгебра и анализ. Т. 11. Вып. 1 (1999). P. 244–270.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33