Trudy Petrozavodskogo Gosudarstvennogo Universiteta
Seria “Matematika” Vipusk 12, 2005

УДК 517.54

О СВЯЗИ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ БЛОХА

А. В. Шишкина

В статье устанавливается связь между полианалитическими функциями, имеющими ограниченность порядка p, $p < 0$, и аналитическими функциями из класса Блоха B. Это позволяет перенести ряд известных свойств функций Блоха на полианалитические функции.

В [1] Е. П. Долженко ввел понятие ограниченных порядка p функций ($p \in \mathbb{R}$).

Определение 1. *При $p < 0$ назовем локально ограниченную в области G функцию f ограниченной порядка p, если $|f(z)| = O(\rho^p)$ при $\rho = \rho(z, \partial G) \to 0$. Ограниченной порядка 0 в области G назовем функцию, ограниченную в этой области.*

Класс функций, имеющих ограниченность порядка p в области G, обозначается $\mathfrak{M}^p(G)$ [1]. Класс $\mathfrak{M}^p(\Delta)$, где $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, обозначим $\mathfrak{M}^p$.

Функция $f(z) = f(x, y)$, имеющая в области $G \subset \mathbb{C}$ непрерывные частные производные по x и y до порядка $n \in \mathbb{N}$, называется полианалитической порядка n (или n-аналитической) в G, если она удовлетворяет обобщенному уравнению Коши – Римана $\dfrac{\partial^n f}{\partial \bar{z}^n} = 0$. Класс всех таких функций обозначается через $A_n(G)$. n-аналитические в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функции будем обозначать через A_n.

Работа выполнена при финансовой поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания (грант А04-2.8-719)

Всякую n-аналитическую функцию $f(z)$ можно единственным образом представить в виде

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) + \ldots + \bar{z}^{n-1}\varphi_{n-1}(z), \tag{1}$$

где функции $\varphi_k(z)$, $k = 0, \ldots, n-1$, аналитические в G (см., например, [2]). Эти функции $\varphi_k(z)$ называются аналитическими компонентами $f(z)$. Легко установить связь между классом $\mathfrak{M}^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, и классом аналитических функций Блоха.

Определение 2. *Аналитическая в круге Δ функция f называется функцией Блоха, если*

$$\sup_{z\in\Delta} |f'(z)|(1 - |z|^2) < \infty.$$

Класс таких функций обозначается B. Исследованию класса Блоха посвящены сотни статей. Для функций Блоха известна

Лемма ([3]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $f \in B$;
2) $\sup\limits_{z\in\Delta} |f^{(n)}(z)|(1 - |z|^2)^n < \infty$ *для некоторого натурального* n;
3) $\sup\limits_{z\in\Delta} |f^{(n)}(z)|(1 - |z|^2)^n < \infty$ *для любого натурального* n.

В единичном круге Δ представление (1) функции $f \in A_n$ приводится к следующему виду:

$$\begin{gathered} f(z) = P(z,\bar{z}) + g_0(z) + (1 - |z|^2)g_1(z) + \ldots + (1 - |z|^2)^{n-1}g_{n-1}(z), \\ P(z,\bar{z}) = \bar{z}P_1(z) + \ldots + \bar{z}^{n-1}P_{n-1}(z),\ z \in \Delta, \end{gathered} \tag{2}$$

где P_k при $k \geq 1$ — полином от z степени $\leq k-1$, g_k голоморфны в Δ (см., например, [1]). В [1] доказано, в частности, что

$$f \in \mathfrak{M}^{-p},\ p \geq 0 \Longleftrightarrow g_k \in \mathfrak{M}^{-(p+k)},\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Из определения класса $\mathfrak{M}^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, и леммы следует, что n-аналитическая функция

$$f \in \mathfrak{M}^{-m},\ m \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow g_k = h_k^{(m+k)},\ h_k \in B,\ k = 0, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Цель этой статьи — перенесение известных свойств функций класса B на полианалитические функции из $\mathfrak{M}^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Введем некоторые обозначения. Для $\lambda \in \Delta$ обозначим

$$\psi_\lambda(z) = \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda} z}, \quad z \in \Delta,$$

конформный автоморфизм единичного круга, $\Delta(\lambda, r) = \psi_\lambda(r\Delta)$, $0 < r < 1$. Пусть μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^2$, тогда площадь круга $\Delta(\lambda, r)$ обозначим

$$|\Delta(\lambda, r)| = \mu(\Delta(\lambda, r)) = \pi \frac{(1 - |\lambda|^2)^2}{(1 - r^2|\lambda|^2)^2} r^2.$$

Легко видеть, что если функции $\varphi_k \in \mathfrak{M}^{-m_k}$, $m_k \in \mathbb{N}$, $k = 0, \dots, n-1$, то $f \in \mathfrak{M}^{-s}$, где $s = \max\limits_{0 \le k \le n-1} m_k$, в связи с этим представляет интерес следующая теорема (переформулируем результат, полученный в [4] для аналитических функций Блоха).

Теорема 1. *Пусть φ_k — аналитические компоненты функции $f(z)$ в записи (1), $k = 0, \dots, n-1$, тогда для любых $0 < p < \infty$, $0 < r < 1$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $m_k \in \mathbb{N}$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\varphi_k \in \mathfrak{M}^{-m_k}(\Delta)$;

2) $$\sup_{\lambda \in \Delta} \left(\frac{1}{|\Delta(\lambda, r)|^{1 - \frac{(l+m_k)p}{2}}} \int\limits_{\Delta(\lambda, r)} |\varphi_k^{(l)}(z)|^p d\mu \right) < \infty;$$

3) $$\sup_{\lambda \in \Delta} \left(\int\limits_{\Delta(\lambda, r)} |\varphi_k^{(l)}(z)|^p (1 - |z|^2)^{(l+m_k)p-2} d\mu \right) < \infty;$$

4) $$\sup_{\lambda \in \Delta} \left(\int\limits_{\Delta} |\varphi_k^{(l)}(z)|^p (1 - |z|^2)^{(l+m_k)p-2} (1 - |\psi_\lambda(z)|^2)^2 d\mu \right) < \infty.$$

Из результата, полученного в [1], следует, в частности, что для любого натурального l

$$f \in \mathfrak{M}^{-p},\ p > 0 \iff \frac{\partial^l f}{\partial z^l} \in \mathfrak{M}^{-p-l},$$

отсюда следует, что если $f \in A_n \cap \mathfrak{M}^{-s}$, $s \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то для любых $0 < r < 1$, $l = 1, 2, \dots$, $p \ge \dfrac{2}{n}$

1) $$\int\limits_{\Delta(\lambda,r)} \left|\frac{\partial^l f(z)}{\partial z^l}\right|^p (1-|z|^2)^{(l+n+s)p-2} d\mu \to 0,\ |\lambda| \to 1-;$$

2) $$\int\limits_{\Delta} \left|\frac{\partial^l f(z)}{\partial z^l}\right|^p (1-|z|^2)^{(l+n+s)p-2} (1-|\psi_\lambda(z)|^2)^2 d\mu \to 0,\ |\lambda| \to 1-.$$

В действительности последние два утверждения имеют место для всех $p > 0$, а именно, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $f \in A_n \cap \mathfrak{M}^{-s}$, $s \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *тогда для любых* $0 < p < \dfrac{2}{n}$, $0 < r < 1$, $l = 0, 1, \ldots$ ($l \neq 0$, *в случае, когда* $s = 0$, $n = 1$ *одновременно):*

1) $$\int\limits_{\Delta(\lambda,r)} \left|\frac{\partial^l f(z)}{\partial z^l}\right|^p (1-|z|^2)^{(l+n+s)p-2} d\mu \to 0,\ |\lambda| \to 1-;$$

2) $$\int\limits_{\Delta} \left|\frac{\partial^l f(z)}{\partial z^l}\right|^p (1-|z|^2)^{(l+n+s)p-2} (1-|\psi_\lambda(z)|^2)^2 d\mu \to 0,\ |\lambda| \to 1-.$$

Доказательство. Имеем при $p > 0$

$$\left|\frac{\partial^l f(z)}{\partial z^l}\right|^p = |\varphi_0^{(l)}(z) + \bar{z}\varphi_1^{(l)}(z) + \ldots + \bar{z}^{n-1}\varphi_{n-1}^{(l)}(z)|^p \leq$$
$$\leq (|\varphi_0^{(l)}(z)| + |z||\varphi_1^{(l)}(z)| + \ldots + |z|^{n-1}|\varphi_{n-1}^{(l)}(z)|)^p \leq$$
$$\leq n^p(|\varphi_0^{(l)}(z)|^p + |z|^p|\varphi_1^{(l)}(z)|^p + \ldots + |z|^{p(n-1)}|\varphi_{n-1}^{(l)}(z)|^p).$$

Отсюда

$$\int\limits_{\Delta(\lambda,r)} \left|\frac{\partial^l f(z)}{\partial z^l}\right|^p (1-|z|^2)^{(l+n+s)p-2} d\mu \leq$$
$$\leq n^p \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{\Delta(\lambda,r)} |z^k|^p |\varphi_k^{(l)}(z)|^p (1-|z|^2)^{(l+n+s)p-2} d\mu.$$

Применяя неравенство Гельдера при $q > 1$, имеем

$$\int\limits_{\Delta(\lambda,r)} |z^k|^p |\varphi_k^{(l)}(z)|^p (1-|z|^2)^{(l+n+s)p-2} d\mu \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\Delta(\lambda,r)} |\varphi_k^{(l)}(z)|^{pq} (1-|z|^2)^{(l+n+s-1)pq-2} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Delta(\lambda,r)} |z^k|^{\frac{pq}{q-1}} (1-|z|^2)^{\frac{pq}{q-1}} - 2 d\mu \right)^{\frac{q-1}{q}}.$$

Покажем, что последнее произведение стремится к нулю при $|\lambda| \to 1-$. Пусть $0 < p < \dfrac{2}{n}$, $0 < r < 1$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ($l \neq 0$, в случае, когда $s = 0$, $n = 1$ одновременно). В [1] доказано, что если n-аналитическая функция $f \in \mathfrak{M}^p$, то ее аналитические компоненты $\varphi_k \in \mathfrak{M}^{p-(n-1)}$, и это утверждение нельзя усилить ни при каком наборе чисел $n \geq 1$, $p \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Отсюда и из теоремы 1 следует, что выражение

$$\int\limits_{\Delta(\lambda,r)} |\varphi_k^{(l)}(z)|^{pq} (1-|z|^2)^{(l+s+n-1)pq-2} d\mu$$

ограничено для любого $\lambda \in \Delta$. Интеграл

$$\int\limits_{\Delta(\lambda,r)} |z^k|^{\frac{pq}{q-1}} (1-|z|^2)^{\frac{pq}{q-1}} - 2 d\mu$$

стремится к нулю при $|\lambda| \to 1-$. Таким образом, доказано, что для любых $0 < p < \dfrac{2}{n}$, $0 < r < 1$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ($l \neq 0$, в случае, когда $s = 0$, $n = 1$ одновременно)

$$\int\limits_{\Delta(\lambda,r)} \left| \frac{\partial^l f(z)}{\partial z^l} \right|^p (1-|z|^2)^{(l+n+s)p-2} d\mu \to 0, \quad |\lambda| \to 1- .$$

Утверждение (2) доказывается аналогично. Пусть $0 < p < \dfrac{2}{n}$, $0 < r < 1$,

$l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ($l \neq 0$, в случае, когда $s = 0$, $n = 1$ одновременно), имеем

$$\int\limits_{\Delta} \left| \frac{\partial^l f(z)}{\partial z^l} \right|^p (1 - |z|^2)^{(l+n+s)p-2} (1 - |\psi_\lambda(z)|^2)^2 d\mu \leq$$
$$\leq n^p \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{\Delta} |z^k|^p |\varphi_k^{(l)}(z)|^p (1 - |z|^2)^{(l+n+s)p-2} (1 - |\psi_\lambda(z)|^2)^2 d\mu.$$

Применяя неравенство Гельдера при $q > 1$, получаем, что

$$\int\limits_{\Delta} |z^k|^p |\varphi_k^{(l)}(z)|^p (1 - |z|^2)^{(l+n+s)p-2} (1 - |\psi_\lambda(z)|^2)^2 d\mu \leq$$
$$\leq \left(\int\limits_{\Delta} |\varphi_k^{(l)}(z)|^{pq} (1 - |z|^2)^{(l+s+n-1)pq-2} (1 - |\psi_\lambda(z)|^2)^2 d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\Delta} |z^k|^{\frac{pq}{q-1}} (1 - |z|^2)^{\frac{pq}{q-1}-2} (1 - |\psi_\lambda(z)|^2)^2 d\mu \right)^{\frac{q-1}{q}} \to 0$$

при $|\lambda| \to 1-$, так как первый множитель ограничен для любого $\lambda \in \Delta$ по теореме 1, а второй множитель стремится к нулю при $|\lambda| \to 1-$. А тогда для любых $0 < p < \dfrac{2}{n}$, $0 < r < 1$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ($l \neq 0$, в случае, когда $s = 0$, $n = 1$ одновременно)

$$\int\limits_{\Delta} \left| \frac{\partial^l f(z)}{\partial z^l} \right|^p (1 - |z|^2)^{(l+n+s)p-2} (1 - |\psi_\lambda(z)|^2)^2 d\mu \to 0, \quad |\lambda| \to 1-.$$

□

Теорема 3. *Пусть функция $f \in A_n \cap \mathfrak{M}^{-p}$, $p > 0$, представлена в виде (2), обозначим*

$$M_{g_k} = \sup_{z \in \Delta} \left(|g_k(z)| (1 - |z|^2)^{p+k} \right) < \infty,$$
$$C_k = \frac{(2(p+k)+1)^{p+k+\frac{1}{2}}}{(2(p+k))^{p+k}} (1 - y^2 + 2(p+k)y(|z| - y))(1 - y^2)^{p+k},$$

где y — решение уравнения

$$|z|(p+k) - y(3(p+k)+1) - y^2|z|(p+k)(2(p+k)+1) +$$
$$+ y^3(p+k+1)(2(p+k)+1) = 0$$

из интервала $[0,(2(p+k)+1)^{-\frac{1}{2}})$, $k=0,\dots,n-1$, *тогда*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial P(z,\bar z)}{\partial z}\right|\le$$
$$\le\frac{1}{(1-|z|^2)^{p+1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}M_{g_k}C_k+|z|\sum_{k=0}^{n-1}kM_{g_k}\right).$$

Доказательство. Так как $f(z)\in\mathfrak{M}^{-p}$, то $g_k\in\mathfrak{M}^{-(p+k)}$, $0\le k\le$ $\le n-1$ (см. [1]), то есть

$$|g_k(z)|\le\frac{M_{g_k}}{(1-|z|^2)^{p+k}},\ z\in\Delta,\ k=0,\dots,n-1.$$

В [5] для аналитических в Δ функций $h(z)$, удовлетворяющих условию $|h(z)|\le\dfrac{1}{(1-|z|^2)^c}$, $c>0$, $z\in\Delta$, доказано, что

$$|h'(z)|(1-|z|^2)^{c+1}\le\frac{(2c+1)^{c+\frac{1}{2}}}{(2c)^c}(1-y^2+2cy(|z|-y))(1-y^2)^c,$$

где y — решение уравнения

$$|z|c-y(3c+1)-y^2|z|c(2c+1)+y^3(c+1)(2c+1)=0$$

из интервала $[0,(2c+1)^{-\frac{1}{2}})$. Отсюда получаем, что

$$|g_k'(z)|(1-|z|^2)^{p+k+1}\le M_{g_k}C_k,\ k=0,\dots,n-1.$$

Имеем

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z}=\frac{\partial P(z,\bar z)}{\partial z}+g_0'(z)+\ldots+(1-|z|^2)^{n-1}g_{n-1}'(z)-$$
$$-\bar z[g_1(z)+2(1-|z|^2)g_2(z)+\ldots+(n-1)(1-|z|^2)^{n-2}g_{n-1}(z)];$$

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z}-\frac{\partial P(z,\bar z)}{\partial z}\right|\le|g_0'(z)|+\ldots+(1-|z|^2)^{n-1}|g_{n-1}'(z)|+$$
$$+|z|\left[|g_1(z)|+\ldots+(n-1)(1-|z|^2)^{n-2}|g_{n-1}(z)|\right]\le$$
$$\le\frac{M_{g_0}C_0}{(1-|z|^2)^{p+1}}+\frac{M_{g_1}C_1}{(1-|z|^2)^{p+1}}+\ldots+\frac{M_{g_{n-1}}C_{n-1}}{(1-|z|^2)^{p+1}}+$$
$$+|z|\left(\frac{M_{g_1}}{(1-|z|^2)^{p+1}}+\frac{2M_{g_2}}{(1-|z|^2)^{p+1}}+\ldots+\frac{(n-1)M_{g_{n-1}}}{(1-|z|^2)^{p+1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{(1-|z|^2)^{p+1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}M_{g_k}C_k+|z|\sum_{k=0}^{n-1}kM_{g_k}\right),$$

что и составляет утверждение теоремы. □

В [5] также доказано, что $C_k \leq 2(p+k+1)$, отсюда получаем простое следствие из теоремы 3.

Следствие 1. *Пусть функция $f \in A_n \cap \mathfrak{M}^{-p}$, $p > 0$, представлена в виде (2), обозначим*

$$P = \sup_{z\in\Delta}\left|\frac{\partial P(z,\bar z)}{\partial z}\right| < \infty, \quad M_{g_k} = \sup_{z\in\Delta}\left(|g_k(z)|(1-|z|^2)^{p+k}\right) < \infty.$$

Тогда

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right| \leq P + \frac{1}{(1-|z|^2)^{p+1}}\sum_{k=0}^{n-1} M_{g_k}(2p+3k+2).$$

Пусть аналитические компоненты $g_k(z)$ n-аналитической функции (2) представлены в Δ рядами:

$$g_k(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^{(k)} z^l,\ k = 0,\ldots,n-1,$$

тогда

$$\begin{gathered} f(z) = P(z,\bar z) + \sum_{l=0}^{\infty} b_l(|z|) z^l, \\ b_l(|z|) = a_l^{(0)} + a_l^{(1)}(1-|z|^2) + \ldots + a_l^{(n-1)}(1-|z|^2)^{n-1},\ z \in \Delta. \end{gathered} \tag{4}$$

Теорема 4. *Пусть функция $f \in A_n \cap \mathfrak{M}^{-p}$, $p > 0$, записана в виде (2),*

$$M_{g_k} = \sup_{z\in\Delta}\left(|g_k(z)|(1-|z|^2)^{p+k}\right),\ k = 0,\ldots,n-1,$$

тогда для любых $z \in \Delta$, $l \in \mathbb{N}$ справедлива точная оценка

$$|b_l(|z|)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_{g_k}(1-|z|^2)^k \left(\frac{l+2(p+k)}{2(p+k)}\right)^{p+k}\left(\frac{l+2(p+k)}{l}\right)^{\frac{l}{2}}. \tag{5}$$

Доказательство. Так как $f \in \mathfrak{M}^{-p}$, $p > 0$, то $g_k \in \mathfrak{M}^{-(p+k)}$ для любого $k = 0,\ldots,n-1$ ([1]). В [5] для аналитической в Δ функции

$h(z)=\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_l z^l$, удовлетворяющей условию

$$|h(z)|\le \frac{1}{(1-|z|^2)^c},\ c>0,\ z\in\Delta,$$

для любого $l\in\mathbb{N}$ доказана точная оценка

$$|a_l|\le\left(\frac{l+2c}{2c}\right)^c\left(\frac{l+2c}{l}\right)^{\frac{l}{2}}.$$

Используя последнюю оценку и то, что $g_k\in\mathfrak{M}^{-(p+k)}$, $k=0,\ldots,n-1$, получаем, что для любого $l\in\mathbb{N}$

$$|a_l^{(k)}|\le M_{g_k}\left(\frac{l+2(p+k)}{2(p+k)}\right)^{p+k}\left(\frac{l+2(p+k)}{l}\right)^{\frac{l}{2}},\ k=0,1,\ldots,n-1.$$

Отсюда для любого $l\in\mathbb{N}$ и для любого $z\in\Delta$

$$\begin{aligned}|b_l(|z|)|&\le |a_l^{(0)}|+|a_l^{(1)}|(1-|z|^2)+\ldots+|a_l^{(n-1)}|(1-|z|^2)^{n-1}\le\\ &\le\sum_{k=0}^{n-1}M_{g_k}(1-|z|^2)^k\left(\frac{l+2(p+k)}{2(p+k)}\right)^{p+k}\left(\frac{l+2(p+k)}{l}\right)^{\frac{l}{2}}.\end{aligned}$$

Покажем, что оценка (5) точная. Рассмотрим функцию

$$\begin{gathered}f^*(z)=(1-|z|^2)^{n-1}g^*_{n-1}(z)=\\ =(1-|z|^2)^{n-1}z^{n-1}\left(\frac{n-1+2(n-1+p)}{2(n-1+p)}\right)^{n-1+p}\times\\ \times\left(\frac{n-1+2(n-1+p)}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}=A_{n-1}z^{n-1}(1-|z|^2)^{n-1},\ p>0,\end{gathered}$$

(см. [5]). Функция $g^*_{n-1}\in\mathfrak{M}^{-(n-1+p)}$, причем

$$M_{g^*_{n-1}}=\sup_{z\in\Delta}\left(|g^*_{n-1}(z)|(1-|z|^2)^{n-1+p}\right)=1,$$

действительно,

$$\begin{aligned}M_{g^*_{n-1}}&=A_{n-1}\sup_{z\in\Delta}(|z|^{n-1}(1-|z|^2)^{n-1+p})=\\ &=A_{n-1}\sup_{r\in(0,1)}(r^{n-1}(1-r^2)^{n-1+p}).\end{aligned}$$

Максимум функции $r^{n-1}(1-r^2)^{n-1+p}$ при $r\in(0,1)$ достигается в точке $r_0=\sqrt{\dfrac{n-1}{n-1+2(n-1+p)}}<1$ и равен

$$\left(\frac{n-1}{n-1+2(n-1+p)}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2(n-1+p)}{n-1+2(n-1+p)}\right)^{n-1+p},$$

поэтому $M_{g^*_{n-1}}=1$. Заметим, что $f(z)\in\mathfrak{M}^{-p}$.

Так как $b_{n-1}(|z|)=A_{n-1}(1-|z|^2)^{n-1}$, то для любого $z\in\Delta$ имеем

$$|b_{n-1}(|z|)|=$$
$$=(1-|z|^2)^{n-1}\left(\frac{n-1+2(n-1+p)}{2(n-1+p)}\right)^{n-1+p}\left(\frac{n-1+2(n-1+p)}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

последнее равенство и показывает точность оценки (5). □

Пусть функция $f\in A_n$ представлена в виде следующего ряда:

$$f(z)=P_0(\bar z)+z^{m_1}P_1(z,\bar z)+z^{m_2}P_2(z,\bar z)+\ldots+z^{m_j}P_j(z,\bar z)+\ldots,\quad(6)$$

где P_j — многочлен степени $\le n-1$ по $\bar z$ и степени l_j $(l_0=0)$ по z, имеющий слагаемые степени 0 по z, $j=0,1,2,\ldots$, и пусть выполнены условия:

$$\frac{m_{j+1}}{m_j}\to\infty\quad j\to+\infty,\ \frac{l_j}{m_j}\quad j\to+\infty,\qquad(7)$$

тогда при $0\le r\le l_j$, $0\le k\le l_{j+1}$ имеем

$$\frac{m_{j+1}+k}{m_j+r}=\frac{m_{j+1}}{m_j}\,\frac{1+\dfrac{k}{m_{j+1}}}{1+\dfrac{r}{m_j}}\to+\infty,\ j\to+\infty.$$

При сделанных предположениях аналитические компоненты функции (1)

$$f(z)=\varphi_0(z)+\bar z\varphi_1(z)+\ldots+\bar z^{n-1}\varphi_{n-1}(z)$$

раскладываются в лакунарные ряды вида

$$\varphi_k(z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j^{(k)}z^{n_j^{(k)}},\ \lim_{j\to\infty}\frac{n_{j+1}^{(k)}}{n_j^{(k)}}=+\infty,\ k=0,\ldots,n-1\qquad(8)$$

и удовлетворяют известным теоремам о лакунарных рядах аналитических функций, основываясь на которых можно получить нижеследующие утверждения.

Теорема 5. *Пусть функция $f \in A_n$ представима в виде ряда (6) и выполнены условия (7), тогда для аналитических компонент функции $f(z)$ имеем:*

1) если $\varphi_k \in \mathfrak{M}^{-1}$, то

$$\overline{\lim_{r\to 1-}} \left(\log\frac{1}{1-r} - T(r,\varphi_k)\right) = +\infty,$$

где $T(r,\varphi_k)$ — характеристика Неванлинны функции φ_k:

$$T(r,\varphi_k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log^+ |\varphi_k(re^{it})|dt,\ 0 \le r < 1;$$

2) если $\varphi_k \in \mathfrak{M}^{-1}$ и $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \dfrac{|c_j^{(k)}|}{n_j^{(k)}} > 0$, то

$$\underline{\lim_{r\to 1-}} \left(\log\frac{1}{1-r} - T(r,\varphi_k)\right) < \infty.$$

Доказательство. Если функция $\varphi_k \in \mathfrak{M}^{-1}$, то она является производной первого порядка некоторой функции $g(z)$ из класса B. В [6] для функций $g \in B$, имеющих разложение в лакунарный ряд вида

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j z^{m_j},\ \ \frac{m_{j+1}}{m_j} \to +\infty,\ j \to +\infty,$$

доказано, что

1) $\overline{\lim\limits_{r\to 1-}} (\log\dfrac{1}{1-r} - T(r,g')) = +\infty$;

2) если $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} |g_j| > 0$, то $\underline{\lim\limits_{r\to 1-}} \left(\log\dfrac{1}{1-r} - T(r,g')\right) < +\infty$.

Поэтому для функции $\varphi_k(z)$ имеем

1) $\overline{\lim\limits_{r\to 1-}} \left(\log\dfrac{1}{1-r} - T(r,\varphi_k)\right) = +\infty$,

$$2) \text{ если } \varlimsup_{j\to\infty} \frac{|c_j^{(k)}|}{n_j^{(k)}} > 0, \text{ то } \varliminf_{r\to 1-} \left(\log\frac{1}{1-r} - T(r, \varphi_k) \right) < +\infty. \ \square$$

Заметим, что для того, чтобы аналитические компоненты φ_k функции (1) раскладывались в лакунарные ряды, условие (7) для ряда (6) можно ослабить:

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{l_j}{m_j} = M < +\infty,\ M > 0,\ \varliminf_{j\to\infty} \frac{m_{j+1}}{m_j} > M + 1, \tag{9}$$

тогда при $0 \le r \le l_j$, $0 \le k \le l_{j+1}$ имеем

$$\varliminf_{j\to\infty} \frac{m_{j+1}+k}{m_j + r} = \varliminf_{j\to\infty} \frac{m_{j+1}}{m_j} \frac{1 + \dfrac{k}{m_{j+1}}}{1 + \dfrac{r}{m_j}} > (M+1)\frac{1}{M+1} = 1,$$

отсюда следует, что если для ряда (6) выполнены условия (9), то

$$\varphi_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(k)} z^{n_j^{(k)}},\ \varliminf_{j\to\infty} \frac{n_{j+1}^{(k)}}{n_j^{(k)}} > 1,\ k = 0, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Допустим теперь, что для ряда (6) выполнены следующие условия:

$$\varlimsup_{j\to+\infty} \frac{l_j}{m_j} = N < \infty,\ N > 0,\ \frac{m_{j+1}}{m_j} \ge q(N+1) > 1,\ q > 1,\ j \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

тогда при $0 \le r \le l_j$, $0 \le k \le l_{j+1}$ имеем

$$\frac{m_{j+1}+k}{m_j + r} = \frac{m_{j+1}}{m_j} \frac{1 + \dfrac{k}{m_{j+1}}}{1 + \dfrac{r}{m_j}} \ge q > 1.$$

Отсюда следует, что если для ряда (6) выполнены условия (11), то функции φ_k из представления (1) раскладываются в лакунарные ряды вида $(k = 0, \ldots, n-1)$

$$\varphi_k(z) = c_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(k)} z^{n_j^{(k)}},\ \frac{n_{j+1}^{(k)}}{n_j^{(k)}} \ge q > 1,\ j \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Теорема 6. *Пусть функция $f \in A_n$ удовлетворяет (6) и (11) и представлена в виде (1), тогда функция $\varphi_k(z) \in \mathfrak{M}^{-s_k}$, $s_k \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \dfrac{|c_j^{(k)}|}{(n_j^{(k)})^{s_k}} < +\infty$.

Доказательство. Так как $f(z)$ удовлетворяет (6) и (11), то φ_k представимы лакунарными рядами вида (12), $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Функция $\varphi_k \in \mathfrak{M}^{-s_k}$ тогда и только тогда, когда она является производной порядка s_k некоторой функции $h_k \in B$, причем, так как φ_k удовлетворяет (12) и для $q > 1$ можем записать, что $q = q_0(1+\varepsilon)$, $q_0 > 1$, $\varepsilon > 0$, то для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$

$$h_k = h_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} h_j^{(k)} z^{r_j^{(k)}}, \quad \frac{r_{j+1}^{(k)}}{r_j^{(k)}} \geq q_0 > 1, \quad j \geq j_0.$$

В [7] для функций $g(z)$, представимых в виде лакунарного ряда

$$g(z) = g_0 + \sum_{j=1}^{\infty} g_j z^{n_j}, \ \frac{n_{j+1}}{n_j} \geq q_0 > 1, \ j \in \mathbb{N},$$

доказано, что

$$g \in B \Longleftrightarrow \sup_{j\in\mathbb{N}} |g_j| < +\infty.$$

Применяя это утверждение к функциям $h_k(z) \in B$ и учитывая то, что любой многочлен принадлежит классу B, получаем, что

$$h_k(z) \in B \Longleftrightarrow \sup_{j\in\mathbb{N}} |h_j^{(k)}| < +\infty,$$

то есть

$$\varphi_k \in \mathfrak{M}^{-s_k}(\Delta) \Longleftrightarrow \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|c_j^{(k)}|}{(n_j^{(k)})^{s_k}} < +\infty.$$

□

Замечание. *Легко видеть, что результат теоремы 7 остается справедливым, если условие (11) заменить условием (7), так как результат Поммеренке из [7] верен, если условие* $\dfrac{n_{j+1}}{n_j} \geq q > 1$, $j \in \mathbb{N}$, *заменить условием* $\dfrac{n_{j+1}}{n_j} \to +\infty$, $j \to +\infty$. *Это следует из того, что любой многочлен принадлежит классу* B.

Из теоремы 6 и определения класса $\mathfrak{M}^{-s}$, $s>0$, получаем

Следствие 2. *Пусть функция $f \in A_n$ удовлетворяет (6) и (11), представлена в виде (1), и для всех функций $\varphi_k(z)$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \dfrac{|c_j^{(k)}|}{(n_j^{(k)})^{s_k}} < +\infty$, $s_k \in \mathbb{N}$, тогда $f \in \mathfrak{M}^{-s}$, где $s = \max\limits_{0\le k\le n-1} s_k$.*

Теорема 7. *Пусть $f \in A_n \cap \mathfrak{M}^{-p}, p>0$, тогда для аналитических компонент φ_k функции $f(z)$, представленной (1), справедливо неравенство*

$$T(r,\varphi_k) \le (p+n-1)\log\frac{1}{1-r} + O(1) \quad r\to 1-,\ k=0,\ldots,n-1.$$

Доказательство. Так как $f \in \mathfrak{M}^{-p}, p>0$, то $\varphi_k \in \mathfrak{M}^{-p-(n-1)}$, $k=0,\ldots,n-1$ ([1]). В [6] для таких функций доказано, что тогда

$$T(r,\varphi_k) \le (p+n-1)\log\frac{1}{1-r} + O(1) \quad r\to 1-\,.$$

$\square$

Замечание. *Если $\varphi_k(z) = o\left(\dfrac{1}{(1-r)^s}\right)$ при $r\to 1-$, $s>0$, то из результатов, полученных в [6], следует, что*

$$s\log\frac{1}{1-r} - T(r,\varphi_k) \to 0, \quad r\to 1-\,.$$

Résumé

It is studies the properties of polyanalytic functions which follow by properties of Bloch functions in this paper.

Список литературы

[1] Долженко Е. П. *О граничном поведении компонент полианалитической функции* / Е. П. Долженко // Матем. заметки. 1998. Т. 63(6). С. 821–834.

[2] Балк М. Б. *О полианалитических функциях* / М. Б. Балк, М. Ф. Зуев // Успехи мат. наук. 1970. Т. XXV. Вып. 5(155). С. 203–226.

[3] Duren P. L. *Theory of H^p Spaces.* / P. L. Duren. N. Y.: Academic Press, 1970.

[4] Stroethoff K. *Besov-Type Characterisations for the Bloch Space* / K. Stroethoff // Bull. Austral. Math. Soc. V. 39. 1989. P. 405–420.

[5] Wirths K. Y. *Über holomorphe Functionen, die einer Wachstumsbeschränkung unterliegen* / K. Y. Wirths // Arch. Math. 1978. V. 30. P. 606–612.

[6] Girela D. *On Bloch Functions and Gap Series* / D. Girela // Publicacions Matemàtiques. 1991. V. 35. P. 403–427.

[7] Pommerenke Ch. *Boundary Behaviour of Conformal Maps* / Ch. Pommerenke. Berlin: Springer-Verlag. 1991.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33