Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 13, 2006

УДК 517.54

Е. Г. Ганенкова

ТЕОРЕМА РЕГУЛЯРНОСТИ УБЫВАНИЯ В ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ФУНКЦИЙ

В статье доказываются теорема регулярности убывания в линейно-инвариантных семействах функций и некоторые прилегающие к ней результаты.

Понятие линейно-инвариантных семейств дано Х. Поммеренке в 1964 году.

Пусть $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг. Обозначим через $\mathfrak{L}$ множество всех конформных автоморфизмов единичного круга Δ:

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\bar{a}z},\ a \in \Delta,\ \theta \in \mathrm{R}.$$

Определение 1. *([1]) Множество $\mathfrak{M}$ аналитических в круге Δ функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n(f)z^n$ называется линейно-инвариантным семейством (л.-и.с.), если для любой $f \in \mathfrak{M}$ выполнены 2 условия:*

1) $f'(z) \neq 0$ для каждого $z \in \Delta$ (локальная однолистность);

2) для любого $\varphi \in \mathfrak{L}$

$$\Lambda_\varphi[f(z)] = \frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))}{f'(\varphi(0))\varphi'(0)} = z + \ldots \in \mathfrak{M}.$$

Многие свойства л.-и.с. зависят от порядка этого семейства.

Определение 2. *([1]) Порядком л.-и.с. $\mathfrak{M}$ называется число*

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |\,a_2(f)|.$$

Определение 3. *([1]) Пусть $f(z) = z + \ldots$ локально однолистна и аналитична в Δ; порядком функции $f(z)$ называется число*

$$\mathrm{ord}\ f = \mathrm{ord}\ \mathfrak{M}\,[f],$$

где $\mathfrak{M}\,[f] = \{\Lambda_\varphi[f(z)] : \varphi \in \mathfrak{L}\}$ — л.-и.с., порожденное функцией f.

Определение 4. *([1]) Универсальным л.-и.с. порядка α называется объединение всех л.-и.с. $\mathfrak{M}$, для которых $\mathrm{ord}\,\mathfrak{M} \le \alpha$, оно обозначается $\mathcal{U}_\alpha$.*

В [1] доказано, что $\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$ при $\alpha < 1$ и $\mathcal{U}_1$ совпадает с классом выпуклых функций, то есть с классом аналитических функций, однолистно отображающих Δ на выпуклую область.

Интерес к л.-и.с. вызван тем, что многие известные классы конформных отображений являются л.-и.с. Таким образом, появляется возможность с общих позиций изучать свойства многих классов локально однолистных в Δ функций.

Самым известным примером л.-и.с. является класс S однолистных в Δ функций ($\mathrm{ord}S = 2$). В этом классе известна теорема регулярности роста функций и их производных.

Для непрерывной в Δ функции ψ обозначим

$$M(r, \psi) = \max_{|z|=r} |\,\psi(z)|,$$

$$m(r, \psi) = \min_{|z|=r} |\,\psi(z)|.$$

Теорема A *(регулярности роста в S) [2; 3, с.121–123; 4, с.104–105; 5, с.120–121]. Пусть $f \in S$. Тогда*

1) существует

$$\lim_{r\to 1-} \left[M(r,f)\frac{(1-r)^2}{r} \right] = \lim_{r\to 1-} \left[M(r,f')\frac{(1-r)^3}{1+r} \right] = \delta \in [0,1],$$

при этом $\delta = 1$ только для функции Кебе $f_\theta(z) = z(1 - ze^{-i\theta})^{-2}$, где $\theta \in \mathbb{R}$ — фиксированное число; при $\delta \ne 1$ величины, стоящие под знаком предельного перехода, строго убывают с возрастанием r, $0 < r < 1$;

2) если $\delta \ne 0$, то существует $\varphi^0 \in [0, 2\pi)$ такое, что

$$\lim_{r\to 1-} \left[|f(re^{i\varphi})|\frac{(1-r)^2}{r} \right] =$$

$$\lim_{r\to 1-}\left[|f'(re^{i\varphi})|\frac{(1-r)^3}{1+r}\right]=\begin{cases}\delta, & \varphi=\varphi^0,\\ 0, & \varphi\neq\varphi^0;\end{cases}$$

величины, стоящие здесь под знаком предела, также убывают по $r\in(0,1)$.

Кемпбеллом была высказана гипотеза о справедливости теорем регулярности в произвольных л.-и.с. конечного порядка (см. обзор [6]). Гипотеза оказалась верной. Теорема, подтверждающая эту гипотезу, была доказана в 1984 г. Фрагмент этой теоремы приводится ниже (теорема B.)

Теорема B *(регулярности роста в* $\mathcal{U}_\alpha$*) [6–9]. Пусть* $f\in\mathcal{U}_\alpha$. *Тогда*

1) при каждом $\varphi\in[0;2\pi)$ *величины* $|f'(re^{i\varphi})|\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ *и* $M(r,f')\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ *убывают по* r *на (0,1);*

2) существуют постоянные $\delta^0\in[0,1]$ *и* $\varphi^0\in[0;2\pi)$ *такие, что*

$$\delta^0=\lim_{r\to 1-}\left[M(r,f)2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha\right]=\lim_{r\to 1-}\left[M(r,f')\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right]=$$

$$=\lim_{r\to 1-}\left[|f'(re^{i\varphi^0})|\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right]=\lim_{r\to -1}\left[|f(re^{i\varphi^0})|2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha\right];$$

3) $\delta^0=1\iff f(z)=k_\theta(z)=\dfrac{e^{i\theta}}{2\alpha}\left[\left(\dfrac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\right)^\alpha-1\right]$, $\theta\in\mathbb{R}$ *фиксированно.*

В связи с теоремой B естественно поставить вопрос о регулярности убывания функций $|f'(re^{i\varphi})|$ и $m(r,f')$ при $r\to 1-$. Следующая теорема говорит о том, что в этом случае ситуация, в некотором смысле, симметрична описанной выше.

Все полученные ниже теоремы являются аналогами результатов, приведенных в [8–10].

Для доказательства следующей теоремы нам потребуется формула из [1] для вычисления порядка л.-и.с. $\mathfrak{M}$ и порядка функции:

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M}=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\sup_{z\in\Delta}\left|-\bar z+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|,\tag{1}$$

$$\operatorname{ord} f=\sup_{z\in\Delta}\left|-\bar z+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|.\tag{2}$$

Также будет нужна оценка для модуля производной функции $f \in \mathcal{U}_\alpha$ (см. [1]):

$$\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}} \le |f'(z)| \le \frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}}, \quad r=|z|. \tag{3}$$

Теорема 1 *(регулярности убывания в $\mathcal{U}_\alpha$). Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$. Тогда 1) существуют постоянные $\delta_0 \in [1,\infty]$ и $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$\delta_0 = \lim_{r\to 1-}\left[m(r,f')\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}\right] =$$

$$= \lim_{r\to 1-}\left[|f'(re^{i\varphi_0})|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}\right].$$

Выражения, стоящие под знаком предела, не убывают по $r \in (0;1)$ для любого $\varphi_0 \in \mathbb{R}$;

2) $\delta_0 = 1 \iff f(z) = k_\theta(z) = -\dfrac{e^{i\theta}}{2\alpha}\left[\left(\dfrac{1-ze^{-i\theta}}{1+ze^{-i\theta}}\right)^\alpha - 1\right]$, $\theta \in \mathbb{R}$ фиксированно.

Доказательство. 1) Докажем, что для любой функции $f \in \mathcal{U}_\alpha$ при каждом $\varphi \in [0,2\pi)$ величины

$$|f'(re^{i\varphi})|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}, \quad m(r,f')\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}$$

не убывают по r на $[0,1)$.

Действительно, неубывание функции $|f'(re^{i\varphi})|\dfrac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}$ равносильно неубыванию $\ln\left[|f'(re^{i\varphi})|\dfrac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}\right]$. То есть необходимо установить, что не убывает функция

$$\varphi(r) = \operatorname{Re}\left\{\ln f'(re^{i\varphi})\right\} + (\alpha+1)\ln(1+r) - (\alpha-1)\ln(1-r).$$

Докажем, что $\dfrac{d}{dr}\varphi(r) \ge 0$, то есть

$$\frac{d}{dr}\varphi(r) = \operatorname{Re}\left\{\frac{f''(z)}{f'(z)}e^{i\varphi}\right\} + \frac{\alpha+1}{1+r} + \frac{\alpha-1}{1-r} \ge 0.$$

Здесь $z = re^{i\varphi}$. Домножая на r последнее неравенство, получим

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(z)}{f'(z)}z\right\} + r\frac{\alpha+1}{1+r} + r\frac{\alpha-1}{1-r} \geq 0.$$

Осталось доказать неравенство:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(z)}{f'(z)}z\right\} \geq -\frac{2r(\alpha-r)}{1-r^2}. \tag{4}$$

Поскольку $f \in \mathcal{U}_\alpha$, то по равенству (2):

$$\left|-\bar{z} + \frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \alpha.$$

Домножая это неравенство на $|z|$ и учитывая, что

$$\left|\mathrm{Re}\left\{-\bar{z} + \frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}\right| \leq \left|-\bar{z} + \frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|,$$

получаем:

$$-\alpha r \leq \mathrm{Re}\left\{-|z|^2 + \frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}z\right\} \leq \alpha r$$

или

$$-\alpha r \leq -|z|^2 + \mathrm{Re}\left\{\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}z\right\} \leq \alpha r.$$

Таким образом, имеем:

$$-\alpha r + r^2 \leq \mathrm{Re}\left\{\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}z\right\},$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(z)}{f'(z)}z\right\} \geq -\frac{2r(\alpha-r)}{1-r^2}.$$

Получили требуемое неравенство (4).

Следовательно, $|f'(re^{i\varphi})|\dfrac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}$ не убывает для любого $\varphi \in \mathbb{R}$.

Теперь перейдем к рассмотрению величины $m(r,f')\dfrac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}$.

Пусть $m(r,f') = |f'(re^{i\varphi(r)})|$, то есть минимум достигается для какого-то $\varphi(r)$. Для любых $r,\ r_1,\ 0 < r < r_1 < 1$, имеем

$$m(r,f')\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}} = |f'(re^{i\varphi(r)})|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}} \leq$$

$$\leq |f'(re^{i\varphi(r_1)})|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}} \leq$$

$$\leq |f'(r_1 e^{i\varphi(r_1)})|\frac{(1+r_1)^{\alpha+1}}{(1-r_1)^{\alpha-1}} = m(r_1, f')\frac{(1+r_1)^{\alpha+1}}{(1-r_1)^{\alpha-1}}.$$

То есть выражение $m(r, f')\dfrac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}$ не убывает по r для всякой функции $f \in \mathcal{U}_\alpha$.

Неравенство (3) выполняется для любых $z = re^{i\varphi}$ из Δ. Поэтому

$$\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}} \leq m(r, f').$$

Следовательно,

$$m(r, f')\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}} \geq 1.$$

Из вышеизложенного вытекает существование предела:

$$\lim_{r\to 1-}\left[|f'(re^{i\varphi})|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}\right] = \delta_0 \in [1, \infty].$$

Докажем, что существует $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, для которого выполняется второе равенство теоремы. Как и ранее определим вещественную функцию $\varphi(r), r \in [0, 1)$, условием $m(r, f') = |f'(re^{i\varphi(r)})|$; можно считать, что значения $\varphi(r)$ лежат в $[0, 2\pi)$. Выбираем такую возрастающую последовательность $r_n \in (0, 1)$, $r_n \to 1-$, что $\varphi(r_n) \to \varphi_0$. Поскольку величина $\left[|f'(re^{i\varphi})|\dfrac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}\right]$ возрастает по $r \in (0, 1)$ при каждом $\varphi \in \mathbb{R}$, то получим:

$$m(r, f')\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}} \leq |f'(re^{i\varphi_n})|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}} \leq$$

$$\leq |f'(r_n e^{i\varphi_n})|\frac{(1+r_n)^{\alpha+1}}{(1-r_n)^{\alpha-1}} = m(r_n, f')\frac{(1+r_n)^{\alpha+1}}{(1-r_n)^{\alpha-1}}.$$

Устремляя здесь n к бесконечности, в пределе получим:

$$m(r, f')\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}} \leq |f'(re^{i\varphi_0})|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}} \leq \delta_0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $r \to 1-$, получим:

$$\lim_{r \to 1-} \left[|f'(re^{i\varphi_0})| \frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}} \right] = \delta_0.$$

2) Пусть $\delta_0 = 1$ для $f_0 \in \mathcal{U}_\alpha$. Преобразованием поворота $e^{i\varphi} f(ze^{-i\varphi})$ добьемся того, что $\varphi_0 = 0$. Так как $|f_0'(r)| \dfrac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}$ не убывает по r, то

$$|f_0'(r)| \frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}} \equiv 1, \quad r \in (0,1). \tag{5}$$

Тождеству (5) удовлетворяет функция $k_0(z)$.

Предположим, что этому тождеству удовлетворяет также какая-то другая функция $f_1 \in \mathcal{U}_\alpha$. Тогда $f_1'(z) = k_0'(z) e^{i\psi(z)}$, где $\psi(z)$ — регулярная в Δ функция, вещественная на $[0,1)$.

$$\operatorname{ord} f_1 = \sup_{z \in \Delta} \left| -\bar{z} + \frac{1-|z|^2}{2} \frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} \right| \geq$$

$$\geq \left| -\bar{z} + \frac{1-|z|^2}{2} \left(\frac{k_0''(z)}{k_0'(z)} + i\psi'(z) \right) \right| \Bigg|_{z=r} =$$

$$= \left| -r + \frac{1-r^2}{2} \left(\frac{2(-\alpha + r)}{1-r^2} + i\psi'(r) \right) \right| = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{1-r^2}{2} \psi'(r) \right)^2} \geq \alpha.$$

Но $\operatorname{ord} f_1 \leq \alpha$. Следовательно, должно быть $\psi(r) \equiv 0$. По теореме единственности $\psi(r) \equiv 0$ в Δ, и $f_1 \equiv k_0$. $\square$

Определение 5. *Число φ_0 из п.1) теоремы 1 назовем направлением максимального убывания (н.м.у) функции $f \in \mathcal{U}_\alpha$.*

Определение 6. *Направлением интенсивного убывания (н.и.у.) функции f назовем каждое $\theta \in [0, 2\pi)$, для которого*

$$\lim_{r \to 1-} |f'(re^{i\theta})| \frac{(1+r)^{(\alpha+1)}}{(1-r)^{(\alpha-1)}} = \delta_\theta \in [1; \infty).$$

Семейство $\mathcal{U}_\alpha$ можно разбить на непересекающиеся подклассы $\mathcal{U}_\alpha(\delta_0)$, $\delta_0 \in [1; \infty]$. Функциям из $\mathcal{U}_\alpha(\delta_0)$ соответствует одно и то же δ_0 — число из теоремы 1.

Поскольку объектом изучения данной работы являются л.-и.с., интересно иметь информацию о н.и.у. функции

$$f(z,a) = \frac{f\left(\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a)}{f'(a)(1-|a|^2)},$$

$a \in \Delta$ (см. определение 1).

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$, $a \in \Delta$. Для фиксированного вещественного φ обозначим*

$$R(r) = \left|\frac{re^{i\varphi}+a}{1+\bar{a}re^{i\varphi}}\right|, \ \gamma(r) = \arg\frac{re^{i\varphi}+a}{1+\bar{a}re^{i\varphi}}, \ re^{i\varphi} \neq -a.$$

1) Чтобы φ было н.и.у. для $f(z,a)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$e^{i\varphi} = \frac{e^{i\gamma}-a}{1-\bar{a}e^{i\gamma}}, \tag{6}$$

где γ — н.и.у. функции $f(z)$.

То есть при конформном автоморфизме круга Δ каждое н.и.у. функции $f(z)$ переходит в н.и.у. функции $f(z,a)$ (и наоборот) и эти числа связаны равенством (6).

2)

$$\lim_{r\to 1-}\left[|f'(re^{i\gamma})|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}\right] =$$

$$= \lim_{r\to 1-}\left[|f'(R(r)e^{i\gamma(r)})|\frac{(1+R(r))^{\alpha+1}}{(1-R(r))^{\alpha-1}}\right],$$

где $e^{i\gamma} = \dfrac{e^{i\varphi}+a}{1+\bar{a}e^{i\varphi}}$.

Доказательство. 1) Докажем необходимость.

Фиксируем φ —н.и.у. для $f(z,a)$.

Для $f = f(r)$ справедлива формула $(|f|)' = |f|\cdot\mathrm{Re}\left\{\dfrac{f}{f'}\right\}$. Следовательно,

$$R'(r) = R(r)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i\varphi}\dfrac{1-|a|^2}{(1+\bar{a}re^{i\varphi})^2}}{\dfrac{re^{i\varphi}+a}{1+\bar{a}re^{i\varphi}}}\right\}\underset{r\to 1-}{\longrightarrow}$$

$$\underset{r\to 1-}{\longrightarrow} \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{i\varphi}(1-|a|^2)}{(1+\bar{a}e^{i\varphi})(e^{i\varphi}+a)}\right\} =$$

$$= \frac{1-|a|^2}{|1+\bar{a}e^{i\varphi}|^2}\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{i\varphi}(1+ae^{-i\varphi})}{e^{i\varphi}+a}\right\} = \frac{1-|a|^2}{|1+\bar{a}e^{i\varphi}|^2}.$$

Поскольку

$$f'(z,a) = \frac{f'\left(\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)}{f'(a)(1+\bar{a}z)^2}$$

и

$$\lim_{r\to 1-}\frac{1-r}{1-R(r)} = \lim_{r\to 1-}\frac{1}{R'(r)} = \frac{|1+\bar{a}e^{i\varphi}|^2}{1-|a|^2},$$

то существует

$$\lim_{r\to 1-}\left[|f'(R(r)e^{i\gamma(r)})|\frac{(1+R(r))^{\alpha+1}}{(1-R(r))^{\alpha-1}}\right] =$$

$$= \delta'\cdot|f'(a)|\cdot|1+\bar{a}e^{i\varphi}|^2\left(\frac{|1+\bar{a}e^{i\varphi}|^2}{1-|a|^2}\right)^{\alpha-1} = \delta < \infty,$$

где

$$\delta' = \lim_{r\to 1-}\left[|f'(re^{i\varphi},a)|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}\right].$$

$R(r)$ возрастает на некотором интервале $(r_0,1)$. Поэтому при $r_0<r<r_1<1$

$$|f'(R(r_1)e^{i\gamma(r_1)})|\frac{(1+R(r_1))^{\alpha+1}}{(1-R(r_1))^{\alpha-1}} \geq |f'(R(r)e^{i\gamma(r_1)})|\frac{(1+R(r))^{\alpha+1}}{(1-R(r))^{\alpha-1}}.$$

Устремляя в последнем неравенстве r_1 к 1, получим $\forall r\in(r_0,1):$

$$\delta \geq |f'(R(r)e^{i\gamma})|\frac{(1+R(r))^{\alpha+1}}{(1-R(r))^{\alpha-1}}.$$

Следовательно,

$$\hat{\delta} = \lim_{r\to 1-}\left[|f'(R(r)e^{i\gamma})|\frac{(1+R(r))^{\alpha+1}}{(1-R(r))^{\alpha-1}}\right] \leq \delta < \infty. \tag{7}$$

Значит, γ является н.и.у. функции $f(z)$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность.

Обозначим $f_1(z) = f(z,a)$, $A = \{e^{i\gamma}\colon \gamma$— н.и.у. функции $f(z)\}$, $B = \{\dfrac{e^{i\varphi}+a}{1+\bar{a}e^{i\varphi}}\,:\,\varphi$ — н.и.у. функции $f_1(z)\}$, $C = \{e^{i\eta}\,:\,\eta$ — н.и.у. функции $f_1(z,-a)\}$.

По доказанному ранее следует, что $C\subset B\subset A$. Но $f_1(z,-a) = f(z)$. Следовательно, $A=C$. Значит, $A=B$.

Утверждение 1) теоремы доказано.

2) Возможны два случая.

а) Если γ не является н.и.у. функции f, то из первого пункта леммы следует

$$\lim_{r\to 1-}\left[|f'(re^{i\gamma})|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}\right] =$$

$$= \lim_{r\to 1-}\left[|f'(R(r)e^{i\gamma(r)})|\frac{(1+R(r))^{\alpha+1}}{(1-R(r))^{\alpha-1}}\right] = \infty.$$

б) Пусть γ является н.и.у. функции $f(z)$.

Ранее было показано (см. (7)), что $\hat{\delta}\le\delta<\infty$. Докажем, что $\hat{\delta}\ge\delta$. Обозначим $R_1(r) = \left|\dfrac{re^{i\gamma}-a}{1-\bar{a}re^{i\gamma}}\right|$. Так как $f_1(z,-a) = f(z)$, то γ является также и н.и.у. функции $f(z,-a)$. Значит, существует

$$\delta^* = \lim_{r\to 1-}\left[\left|f_1'\left(\frac{re^{i\gamma}-a}{1-\bar{a}re^{i\gamma}}\right)\right|\frac{(1+R_1(r))^{\alpha+1}}{(1-R_1(r))^{\alpha-1}}\right].$$

Так как $\dfrac{e^{i\gamma}-a}{1-\bar{a}e^{i\gamma}} = e^{i\varphi}$, то, применяя (7) к $f_1(z)$, получим

$$\lim_{r\to 1-}\left[|f_1'(re^{i\varphi})|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}\right]\le\delta^*\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{r\to 1-}\left[\frac{|f'(R(r)e^{i\gamma(r)})|}{|f'(a)||1+\bar{a}re^{i\varphi}|^2}\frac{(1+R(r))^{\alpha+1}}{(1-R(r))^{\alpha-1}}\right]\lim_{r\to 1-}\left(\frac{1-R(r)}{1-r}\right)^{\alpha-1}\le\delta^*\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\delta}{|f'(a)||1+\bar{a}e^{i\varphi}|^2}\,\frac{(1-|a|^2)^{\alpha-1}}{|1+\bar{a}e^{i\varphi}|^{2(\alpha-1)}}\le\delta*\Longleftrightarrow\delta\le\frac{\delta*|f'(a)||1+\bar{a}e^{i\varphi}|^{2\alpha}}{(1-|a|^2)^{\alpha-1}}.$$

С другой стороны,

$$f_1'\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right) = \frac{f'(z)}{f'(a)\left(1+\bar{a}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)^2},$$

поэтому

$$\delta^* = \lim_{r\to 1-}\left[\frac{|f'(re^{i\gamma})|}{|f'(a)||1+\bar a\dfrac{re^{i\gamma}-a}{1-\bar a re^{i\gamma}}|^2}\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}\right]\cdot$$

$$\cdot\lim_{r\to 1-}\left(\frac{1-r}{1-R_1(r)}\right)^{\alpha-1} =$$

$$= \frac{\hat\delta}{|f'(a)||1+\bar a e^{i\varphi}|^2}\left(\lim_{r\to 1-}\frac{1}{R_1'(r)}\right)^{\alpha-1} = \frac{\hat\delta(1-|a|^2)^{\alpha-1}}{|f'(a)||1+\bar a e^{i\varphi}|^{2\alpha}}.$$

Следовательно, $\delta\le\hat\delta$. Окончательно получаем $\delta=\hat\delta$.

Достаточность доказана. □

Следствие 1. *Если $f(z)\in\mathcal{U}_\alpha(\infty)$, то $f(z,a)\in\mathcal{U}_\alpha(\infty)$ при всех $a\in\Delta$.*

Следствие 2. *Пусть $f\in\mathcal{U}_\alpha$. Тогда для любого $\varphi\in[0;2\pi)$ существует такое $\delta(\varphi)$, что для любой окружности в широком смысле Γ, ортогональной $\partial\Delta$ в точке $e^{i\varphi}$,*

$$|f'(\xi)|\frac{(1+|\xi|)^{\alpha+1}}{(1-|\xi|)^{\alpha-1}}\longrightarrow\delta(\varphi)$$

при $\xi\longrightarrow e^{i\varphi}$ вдоль Γ, при этом $\delta(\varphi)$ не зависит от Γ.

Замечание. Следствие 1, вообще говоря, перестает быть верным, если в нем убрать требование ортогональности Γ к $\partial\Delta$.

Действительно, рассмотрим функцию

$$k_0(z) = -\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^\alpha - 1\right]\in\mathcal{U}_\alpha(1).$$

Пусть Γ_1 — отрезок из Δ, ортогональный $\partial\Delta$ в точке $z=1$. Тогда вдоль Γ_1

$$|k_0'(\xi)|\frac{(1+|\xi|)^{\alpha+1}}{(1-|\xi|)^{\alpha-1}}\underset{\xi\to 1}{\longrightarrow}1.$$

Пусть теперь Γ_2 — отрезок из Δ, оканчивающийся в точке $z=1$ и образующий с Γ_1 угол, равный $\beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Обозначим $x=|1-\xi|$.

Тогда вдоль Γ_2

$$\lim_{\Gamma_2 \ni \xi \to 1} \left[|k_0'(\xi)| \frac{(1+|\xi|)^{\alpha+1}}{(1-|\xi|)^{\alpha-1}} \right] = \left(\lim_{\Gamma_2 \ni \xi \to 1} \frac{|1-\xi|}{1-|\xi|} \right)^{\alpha-1} =$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x^2 - 2x\cos\beta + 1}} \right)^{\alpha-1} = \frac{1}{(\cos\beta)^{\alpha-1}} \neq 1.$$

То есть число $\delta(\varphi)$ будет зависеть от угла между Γ и $\partial\Delta$.

Теорема 3. *Пусть семейство функций $g_\delta(z) \in \mathcal{U}_\alpha(\delta)$ и $g_\delta(z) \underset{\delta\to 1}{\longrightarrow} g_1(z)$ равномерно внутри Δ. Тогда $g_1(z) = k_\theta(z)$ при некотором вещественном θ.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть $g_1(z) \neq k_\theta(z)$ для любого вещественного θ. Так как семейство $\mathcal{U}_\alpha$ компактно в топологии равномерной сходимости внутри Δ, то $g_1(z) \in \mathcal{U}_\alpha(\delta_0)$, и, по теореме 1, $\delta_0 > 1$.

Зафиксируем $\varepsilon \in \left(0; \dfrac{\delta_0 - 1}{4}\right)$. По теореме 1 величина

$$m(r, g_1') \frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}$$

возрастает по r. Следовательно, существует такое $r(\varepsilon) > 0$, что для любого $r \in (r(\varepsilon), 1)$

$$m(r, g_1') \frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}} > \delta_0 - \varepsilon.$$

Зафиксируем $r_0 \in (r(\varepsilon), 1)$. Из равномерной сходимости следует, что для всех $\left(1, \dfrac{\delta_0 + 1}{2}\right)$

$$\left| (m(r_0, g_\delta') - m(r_0, g_1')) \frac{(1+r_0)^{\alpha+1}}{(1-r_0)^{\alpha-1}} \right| < \varepsilon.$$

Тогда

$$m(r_0, g_\delta') \frac{(1+r_0)^{\alpha+1}}{(1-r_0)^{\alpha-1}} > m(r_0, g_1') \frac{(1+r_0)^{\alpha+1}}{(1-r_0)^{\alpha-1}} - \varepsilon > \delta_0 - 2\varepsilon > \frac{\delta_0 + 1}{2} > \delta.$$

С другой стороны, из возрастания по r величины

$$m(r, g'_\delta)\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}$$

следует, что

$$\delta \geq m(r_0, g'_\delta)\frac{(1+r_0)^{\alpha+1}}{(1-r_0)^{\alpha-1}}.$$

Противоречие. Следовательно, $g_1(z) = k_\theta(z)$. $\square$

Résumé

In this paper it is proved the regularity theorem for linearly invariant families of analytic function in the unit disk and some results, connected with this theorem.

Список литературы

[1] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.I* / Ch. Pommerenke // Math. Ann. 1964. Hf. 155. P. 108–154.

[2] Krzyz J. *On the maximum modulus of univalent functions* / J. Krzyz // Bull. Acad. Polonici Sci. 1955. V. CI. N 3. P. 203–206.

[3] Хейман В. К. *Многолистные функции* / В. К. Хейман. М.: Иностранная литература, 1960.

[4] Bieberbach L. *Einführung in die konforme Abbildung* / L. Bieberbach. Berlin: Sammlung Göschen, 1967.

[5] Лебедев Н. А. *Принцип площадей в теории однолистных функций* / Н. А. Лебедев. М.: Наука, 1975.

[6] Годуля Я. *Линейно-инвариантные семейства* / Я. Годуля, В. В. Старков // Труды Петрозаводского государственного университета. Сер. математика. Вып. 5. Петрозаводск, 1998. С. 3–96.

[7] Campbell D. M. *Locally univalent function with localy univalent derivatives* / D. M. Campbell // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. P. 395–409.

[8] Старков В. В. *Теорема регулярности в универсальных линейно-инвариантных семействах функций* / В. В. Старков // Труды международной конференции по конструктивной теории функций (Варна 1984). София, 1984. С. 76–79.

[9] Старков В. В. *Теоремы регулярности для универсальных линейно-инвариантных семейств функций* / В. В. Старков // Болгарский математический журнал "Сердика". 1985. Т. 11. С. 299–318.

[10] Starkov V. V. *Directions of intensive growth of locally univalent functions* / V. V. Starkov // Complex Anal. and Appl.'87. Sofia, 1989. P. 517–522.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: g_ek@inbox.ru