Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 14, 2008

УДК 517.518

Е. С. Белкина

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАНКЛЯ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

В работе рассматривается интегральное преобразование Данкля функций, удовлетворяющих условию Липшица. Доказан аналог классической теоремы Е. Титчмарша об описании образа при преобразовании Фурье множества функций, удовлетворяющих условию Липшица в L_2.

В последние годы в математической литературе появился и стал использоваться новый класс обобщенных сдвигов — обобщенные сдвиги Данкля. Обобщенные сдвиги Данкля строятся по некоторым дифференциально-разностным операторам (операторам Данкля), которые широко используются в математической физике (см., например, [10]). С операторами Данкля связаны интегральные преобразования Данкля, которые по своим свойствам во многом аналогичны классическим преобразованиям Фурье, но имеют и много особых свойств. В связи с этим большой интерес представляет получение аналогов различных классических задач гармонического анализа для преобразования Данкля (см., например, [1, 2, 8–11]). В настоящей работе получен аналог одной классической теоремы Е. Титчмарша об описании образа при преобразовании Фурье множества функций, удовлетворяющих условию Липшица в L^2. Приведем точную формулировку этой теоремы (см. [6, теорема 85]).

Пусть $f(x)$ — функция из пространства $L_2(\mathbb{R})$ (все рассматриваемые функции комплекснозначные), $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R})}$ — норма в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, γ — произвольное число из интервала $(0,1)$.

Определение 1. *Функция $f(x)$ принадлежит классу Липшица* $\mathrm{Lip}(\gamma,2)$, *если $f(x)\in L_2(\mathbb{R})$ и*

$$\|f(x+t)-f(x)\|_{L_2(\mathbb{R})}=O(t^\gamma)$$

при $t \to 0$.

Теорема 1. *Если* $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, *а* $\widehat{f}(\lambda)$ — *ее преобразование Фурье, то условия*

$$\|f(x+t) - f(x)\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(t^\gamma), \quad 0 < \gamma < 1,$$

при $t \to 0$ *и*

$$\int\limits_{|\lambda| \geq X} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda = O(X^{-2\gamma})$$

при $X \to +\infty$ *эквивалентны.*

Прежде чем сформулировать аналогичную теорему для преобразования Данкля, приведем необходимые сведения о нем и обобщенных сдвигах Данкля (см. [8–11]).

Оператором Данкля называется следующий дифференциально-разностный оператор D:

$$Df(x) = \frac{df}{dx}(x) + \Bigl(\alpha + \frac{1}{2}\Bigr) \frac{f(x) - f(-x)}{x}, \qquad \alpha > -\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Действие оператора D определено для всех функций $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$.

Введем обобщенную экспоненциальную функцию

$$e_\alpha(x) := j_\alpha(x) + i \, c_\alpha \, x \, j_{\alpha+1}(x), \tag{2}$$

где

$$c_\alpha = \bigl(2(\alpha+1)\bigr)^{-1}, \quad i = \sqrt{-1},$$

$j_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя первого рода, т. е.

$$j_\alpha(x) = \frac{2^\alpha \, \Gamma(\alpha+1) \, J_\alpha(x)}{x^\alpha},$$

где $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода (см. [4, с. 412]).

Используя соотношение

$$j'_\alpha(x) = -\frac{x j_{\alpha+1}(x)}{2(\alpha+1)},$$

которое следует, например, из формулы 8.472 в [3], получим, что функцию $e_\alpha(x)$ можно также записать в виде

$$e_\alpha(x) = j_\alpha(x) - i j'_\alpha(x). \tag{3}$$

Через $C^{(k)}$ обозначим множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, через $\mathcal{E}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, а через $\mathcal{D}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем.

Через $L_{2,\alpha}$ обозначим гильбертово пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль), для которых конечна норма

$$\|f\|_{2,\alpha} := \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, |x|^{2\alpha+1}\, dx\Big)^{1/2}.$$

Преобразованием Данкля называется следующее интегральное преобразование

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e_\alpha(\lambda x)\, |x|^{2\alpha+1}\, dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Обратное преобразование Данкля задается формулой

$$f(x) = \big(2^{\alpha+1}\, \Gamma(\alpha+1)\big)^{-2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)\, e_\alpha(-\lambda x)\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda. \tag{5}$$

При $f \in \mathcal{D}$ преобразования (4) и (5) определены и являются взаимно обратными, и при этом справедливо равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, |x|^{2\alpha+1}\, dx = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda, \tag{6}$$

где

$$A = \left(2^\alpha\, \Gamma(\alpha+1)\right)^{-2}. \tag{7}$$

Отображение $f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ продолжается по непрерывности до изоморфизма гильбертова пространства $L_{2,\alpha}$ на себя. Продолженное отображение будем также обозначать $f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ и называть преобразованием Данкля, при этом остается справедливой формула (6), которую можно также записать в виде

$$\|f\|_{2,\alpha}^2 = A\, \|\widehat{f}\|_{2,\alpha}^2. \tag{8}$$

Оператор обобщенного сдвига Данкля $T^y f(x)$ можно определять различными способами. Для функции $f(x) \in \mathcal{E}$ оператор обобщенного сдвига Данкля $u(x,y) = T^y f(x)$ можно определить как решение следующей задачи Коши (см., например, [9]):

$$D_x u(x,y) = D_y u(x,y); \tag{9}$$

$$u(x,0) = f(x), \tag{10}$$

где D_x и D_y — дифференциально-разностные операторы Данкля, примененные по переменным x и y соответственно.

Для любой функции $f(x) \in \mathcal{E}$ решение этой задачи Коши существует, единственно и может быть записано в явном виде (см. [9]):

$$T^y f(x) = C\left(\int_0^\pi f_e(\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi})\, h^e(x,y,\varphi)\, \sin^{2\alpha}\varphi\, d\varphi + \right.$$
$$\left. + \int_0^\pi f_o(\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi})\, h^o(x,y,\varphi)\, \sin^{2\alpha}\varphi\, d\varphi\right), \tag{11}$$

где

$$C = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(1/2)},$$

$$h^e(x,y,\varphi) = 1 - \operatorname{sign}(xy)\cos\varphi,$$

$$h^o(x,y,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)(1-\operatorname{sign}(xy)\,\cos\varphi)}{\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi}} & \text{для } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{для } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$f_e(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \quad f_o(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right). \tag{12}$$

По формуле (12) оператор T^y может быть определен и для более широкого, чем $\mathcal{E}$, класса функций. В частности, оператор $T^y f$ определен для любой непрерывной функции f. По формуле (12) оператор T^y продолжается до непрерывного оператора в $L_{2,\alpha}$ (см. [1]). Продолженный оператор также будем обозначать T^y.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу Липшица $\mathrm{Lip}_\alpha(\gamma, 2)$, $0 < \gamma < 1$, если $f(x) \in L_{2,\alpha}$ и*

$$\|T^h f(x) - f(x)\|_{2,\alpha} = O(h^\gamma)$$

при $h \to 0$.

Аналогом теоремы Е. Титчмарша для преобразования Данкля является следующая теорема, доказательство которой есть основная цель работы.

Теорема 2. *Если $f(x) \in L_{2,\alpha}$ и $\widehat{f}(\lambda)$ — ее преобразование Данкля, то условия*

$$f(x) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\gamma, 2)$$

и

$$\int\limits_{|\lambda|\geq X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, d\lambda = O(X^{-2\gamma-2\alpha-1})$$

при $X \to +\infty$ эквивалентны.

Лемма 1. *Пусть $f \in L_{2,\alpha}(\mathbb{R})$ и $s \geq 0$, тогда*

$$(\widehat{T^s f})(\lambda) = e_\alpha(\lambda s)\, \widehat{f}(\lambda),$$

где $f \mapsto \widehat{f}$ — преобразование Данкля.

Доказательство. См. [1, лемма 2.5]. □

В следующей лемме приведено несколько оценок для функций $e_\alpha(x)$, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 2. *Для $x \in \mathbb{R}$ справедливы следующие неравенства:*

1) $|e_\alpha(x)| \leq 1$;
2) $1 - e_\alpha(x) \leq 2|x|$;
3) $1 - e_\alpha(x) \geq c$ *при* $|x| \geq 1$, *где $c > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от α.*

Доказательство. См. [1, лемма 3.4]. □

Всюду далее через $C, C_1, C_2, \ldots$ обозначаются положительные постоянные, которые могут зависеть от функции f и от параметров γ и α, но не зависят от переменных x, λ, h.

Теорема 3. *Для любой функции $f(x) \in L_{2,\alpha}(\mathbb{R})$ условия*

$$f(x) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\gamma, 2), \quad 0 < \gamma < 1,$$

и

$$\int\limits_{|\lambda|\geq X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda = O(X^{-2\gamma}) \quad \text{при} \quad X \to +\infty$$

эквивалентны.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы достаточно доказать, что если $f(x) \in L_{2,\alpha}(\mathbb{R})$, то условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |T^h f(x) - f(x)|^2\, |x|^{2\alpha+1}\, dx \le C_1\, h^{2\gamma} \quad \text{при } 0<\gamma<1, \quad h\to 0, \tag{13}$$

и

$$\int_{|\lambda|\ge X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \le C_2\, X^{-2\gamma} \quad \text{при } X\to +\infty \tag{14}$$

эквивалентны.

Из леммы 1 следует, что для каждого фиксированного h преобразованием Данкля функции $T^h f(x) - f(x)$ служит функция $(e_\alpha(\lambda h) - 1)\widehat{f}(\lambda)$.

Воспользовавшись равенством Парсеваля (6), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |1-e_\alpha(\lambda h)|^2\, |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda = A_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |T^h f(x) - f(x)|^2\, |x|^{2\alpha+1}\, dx, \tag{15}$$

где $A_\alpha = 2^{2\alpha}\,(\Gamma(\alpha+1))^2$.

Предположим, что условие (13) выполнено, тогда из леммы 2 (п. 3) и равенства (15) следует, что

$$\int_{|\lambda|\ge 1/h} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \le \frac{1}{c^2} \int_{|\lambda|\ge 1/h} |1-e_\alpha(\lambda h)|^2 |\, \widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \le$$

$$\le \frac{A_\alpha}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |T^h f(x) - f(x)|^2\, |x|^{2\alpha+1}\, dx \le C_2\, h^{2\gamma},$$

где $C_2 = C_1 A_\alpha / c^2$.

Поэтому

$$\int_{|\lambda|\ge X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \le C_2 X^{-2\gamma}.$$

С другой стороны, если выполнено условие (14), то, полагая

$$\varphi(x) = \int_X^{+\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda$$

и используя интегрирование по частям, получим

$$\int_0^X |\lambda|^2\, |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda = -\int_0^X |\lambda|^2\, \varphi'(\lambda)\, d\lambda \leq$$

$$\leq C_2(-|X|^2)|X|^{-2\gamma} + 2C_2\frac{\lambda^{2-2\gamma}}{2-2\gamma} =$$

$$= -C_2X^{2-2\gamma} + C_2\frac{X^{2-2\gamma}}{1-\gamma} = C_3\, X^{2-2\gamma}, \tag{16}$$

где $C_3 = C_2\gamma/(1-\gamma)$.

Из леммы 2 (п. 2) и неравенства (16) следует, что

$$\int_{-1/h}^{1/h} |1 - e_\alpha(\lambda h)|^2\, |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \leq$$

$$\leq 4h^2 \int_{-1/h}^{1/h} |\lambda|^2\, |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \leq C_4 h^{2\gamma}, \tag{17}$$

где $C_4 = 8C_3$.

Из леммы 2 (п. 1) и неравенства (14) вытекает, что

$$\int_{|\lambda|\geq 1/h} |1 - e_\alpha(\lambda h)|^2\, |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \leq$$

$$\leq 4 \int_{|\lambda|\geq 1/h} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \leq 4C_2 h^{2\gamma}. \tag{18}$$

Поэтому, используя равенство Парсеваля (6), неравенства (17) и (18) и разбивая промежуток интегрирования, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |T^h f(x) - f(x)|^2\, |x|^{2\alpha+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{A_\alpha} \int\limits_{-1/h}^{1/h} |1 - e_\alpha(\lambda h)|^2 \, |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, |\lambda|^{2\alpha+1} \, d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{A_\alpha} \int\limits_{|\lambda| \geq 1/h} |1 - e_\alpha(\lambda h)|^2 \, |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, |\lambda|^{2\alpha+1} \, d\lambda \leq C_1 \, h^{2\gamma},$$

где $C_1 = (C_4 + 4C_2)/A_\alpha$. $\square$

Доказательство теоремы 2. С учетом уже доказанной теоремы 3 нам достаточно доказать, что условие (14)

$$\int\limits_{|\lambda| \geq X} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, |\lambda|^{2\alpha+1} \, d\lambda \leq C_2 X^{-2\gamma}$$

равносильно условию

$$\int\limits_{|\lambda| \geq X} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda \leq C_5 X^{-2\gamma-2\alpha-1}. \tag{19}$$

Предположим, что условие (14) выполнено. Интеграл из правой части формулы (19) запишем в виде суммы

$$\int\limits_{|\lambda| \geq X} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{2^k X}^{2^{k+1} X} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda + \int\limits_{-2^{k+1} X}^{-2^k X} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda \right). \tag{20}$$

Так как $2^k X \leq |\lambda|$, то

$$\int\limits_{2^k X}^{2^{k+1} X} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda + \int\limits_{-2^{k+1} X}^{-2^k X} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda \leq \int\limits_{2^k X}^{2^{k+1} X} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \left(\frac{|\lambda|}{2^k X} \right)^{2\alpha+1} d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{-2^{k+1} X}^{-2^k X} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \left(\frac{|\lambda|}{2^k X} \right)^{2\alpha+1} d\lambda \leq X^{-(2\alpha+1)} \, 2^{-k(2\alpha+1)} \, C_2 \, (2^k X)^{-2\gamma} =$$

$$= C_2 \, 2^{-k(2\alpha+2\gamma+1)} \, X^{-2\alpha-2\gamma-1}.$$

Тогда равенство (20) примет вид

$$\int\limits_{|\lambda|\geq X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, d\lambda \leq \sum_{k=0}^{\infty} C_2 2^{-k(2\alpha+2\gamma+1)} X^{-2\alpha-2\gamma-1} = C_5\, X^{-2\alpha-2\gamma-1},$$

где $C_5 = C_2 2^{2\alpha+2\gamma+1}(2^{2\alpha+2\gamma+1}-1)^{-1}$. Следовательно, выполнено и условие (19).

С другой стороны, пусть выполнено условие (19). Интеграл из правой части формулы (19) запишем в виде суммы

$$\int\limits_{|\lambda|\geq X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{2^k X}^{2^{k+1}X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda + \int\limits_{-2^{k+1}X}^{-2^k X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \right). \tag{21}$$

Если $|\lambda| \leq 2^{k+1}X$, то

$$\int\limits_{2^k X}^{2^{k+1}X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda + \int\limits_{-2^{k+1}X}^{-2^k X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \leq$$

$$\leq (2^{k+1}X)^{2\alpha+1} \left(\int\limits_{2^k X}^{2^{k+1}X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, d\lambda + \int\limits_{-2^{k+1}X}^{-2^k X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, d\lambda \right) \leq$$

$$\leq C_5\, X^{-2\gamma}\, 2^{2\alpha-2k\gamma+1}.$$

Тогда из (21) следует, что

$$\int\limits_{|\lambda|\geq X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{2^k X}^{2^{k+1}X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-2^{k+1}X}^{{2-}^{k}X} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} C_5\, X^{-2\gamma}\, 2^{2\alpha-2k\gamma+1} \leq C_2\, X^{-2\gamma},$$

где $C_2 = 2^{2\alpha+2\gamma+1} C_5 (2^{2\gamma} - 1)^{-1}$. Поэтому выполнено условие (14). Теорема 2 доказана.

Resume

The Dunkl transform of functions satisfying certain Lipschitz conditions is studied in this paper. The analogue of the theorem of E. Titchmarsh about the description of image under Dunkl transform of functions satisfying certain Lipschitz conditions is proved.

Список литературы

[1] Белкина Е. С. *Гармонический анализ Данкля и некоторые задачи теории приближений функций.* I / Е. С. Белкина // Труды ПетрГУ. Сер. матем. 2006. Вып. 13. С. 3–25.

[2] Белкина Е. С. *Гармонический анализ Данкля и некоторые задачи теории приближений функций.* II / Е. С. Белкина // Труды ПетрГУ. Сер. матем. 2006. Вып. 13. С. 26–37.

[3] Градштейн И. С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Наука, 1971.

[4] Левитан Б. М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье* / Б. М. Левитан // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6. № 2. С. 70-82.

[5] Потапов М. К. *О применении оператора обобщенного сдвига в теории приближений* / М. К. Потапов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механика. 1998. № 3. С. 38–48.

[6] Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье* / Е. Титчмарш. М.: Гостехиздат, 1948.

[7] Löfstróm J. *Approximation theorems connected with generalized translations* / J. Löfstróm, J. Peetre // Math. Ann. 1969. V. 181. P. 255–268.

[8] Mohamed A. M. *Transmutation operators and Paley-Wiener theorem associated with a singular differential-difference operator on the real line* / A. M. Mohamed, T. Khalifa // Analysis and Applications. 2003. V. 1. No 1. P. 43–70.

[9] Neijb B. S. *Mean-periodic functions associated with the Dunkl operators* / B. S. Neijb, K. Samir // Integral Transforms and Special Functions. 2004. V. 15. No 2. P. 155–179.

[10] Rösler M. Dunkl operators: Theory and applications / M. Rösler // Lecture Notes in Math. 2002. V. 1817. P. 93–135.

[11] Sundaram T. *Convolution and maximal function for Dunkl transform* / T. Sundaram, X. Yuan // Архив электр. препринтов. http://front.math.ucdavis.edu /math.CA/0403049.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33