Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 14, 2008

УДК 517.54

С. Ю. Граф

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ЯКОБИАНА В ЛИНЕЙНО- И АФФИННО-ИНВАРИАНТНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В линейно- и аффинно-инвариантных семействах нормированных гармонических отображений единичного круга доказывается точная двусторонняя оценка якобиана, зависящая от порядка семейства.

Термин линейной инвариантности семейств локально однолистных аналитических функций в круге был введен Ch. Pommerenke [1] в 1964 г., хотя само свойство линейной инвариантности использовалось и ранее. К семействам гармонических отображений это понятие наряду с понятием аффинной инвариантности применил T. Sheil-Small [3], что позволило получить для гармонических отображений аналоги некоторых результатов, известных ранее в аналитическом случае. Впоследствии подход к анализу свойств семейств гармонических отображений на основе их линейной инвариантности был развит различными авторами, среди которых L. Shaubroeck [5], В. В. Старков [6], J. Szynal [7] и др.

Рассмотрим произвольное линейно- и аффинно-инвариантное семейство $\mathcal{L}$ сохраняющих ориентацию локально однолистных гармонических отображений f единичного круга $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, удовлетворяющих условиям: $f(0) = 0$, $f_z(0) = 1$.

Напомним, что свойство линейной инвариантности семейства $\mathcal{L}$ заключается в том, что наряду с каждым отображением $f \in \mathcal{L}$ классу $\mathcal{L}$ принадлежит также отображение

$$L_\Phi [f] (z) = \frac{f \circ \Phi(z) - f \circ \Phi(0)}{f_z \circ \Phi(0) \cdot \Phi'(0)} \tag{1}$$

при любом конформном автоморфизме $\Phi(z) = e^{i\varphi}(z - z_0)/(1 - \overline{z_0}z)$ единичного круга, где $z_0 \in \Delta$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Аффинная инвариантность семейства $\mathcal{L}$ означает, что вместе с каждым отображением f классу $\mathcal{L}$ принадлежат отображения вида

$$A_\varepsilon\,[f]\,(z) = \frac{f(z) + \varepsilon\,\overline{f(z)}}{1 + \varepsilon\,\overline{f_{\overline{z}}}(0)} \tag{2}$$

при любом $\varepsilon \in \Delta$.

Известно [4], что гармонические в единичном круге функции допускают представление в виде $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, где $h(z)$, $g(z)$ — голоморфные в Δ функции. Этот факт позволяет записать всякую функцию из класса $\mathcal{L}$ в виде

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k}, \quad |z| < 1.$$

Порядком линейно-инвариантного семейства $\mathcal{L}$ называется число $\alpha = \sup|a_2|$, где супремум берется по всем функциям из $\mathcal{L}$. Всюду в дальнейшем будем считать, что порядок α семейства $\mathcal{L}$ конечен.

Класс $\mathcal{L}$ представляет собой нормальное в топологии локально-равномерной сходимости в единичном круге семейство функций, т.е. из любой последовательности функций семейства $\mathcal{L}$ можно выделить подпоследовательность, локально-равномерно в Δ сходящуюся к гармонической функции, вообще говоря, не обязательно локально однолистной. Нормальность $\mathcal{L}$ следует из равномерной ограниченности якобианов функций данного класса на любом компакте из Δ (см. [7] или формулируемую ниже теорему 1) и принципа сгущения для аналитических функций.

Подкласс $\mathcal{L}^0$ класса $\mathcal{L}$, выделяемый наложением дополнительного условия $f_{\overline{z}}(0) = 0$, является компактным в топологии локально равномерной сходимости в круге Δ. Сохранение локальной однолистности для предельной функции f сходящейся последовательности f_n функций класса $\mathcal{L}^0$ следует из отделенности от нуля якобианов функций f_n на любом компакте из Δ, доказанной, например, в приводимой ниже теореме 1. Семейства $\mathcal{L}^0$ уже не являются линейно- или аффинно-инвариантными. Для $f \in \mathcal{L}^0$ имеет место равенство $b_1 = 0$.

По аналогии назовем порядком семейства $\mathcal{L}^0$ число $\alpha_0 = \max|a_2|$, где максимум берется по всем функциям класса $\mathcal{L}^0$.

Заметим, что для некоторых семейств $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^0$ величины α и α_0 могут совпадать, но в общем случае они различны, причем $\alpha - \alpha_0 \le 1/2$.

В самом деле, любую функцию класса $\mathcal{L}$ можно представить в виде $f(z) = f_0(z) + \overline{b_1\, f_0(z)}$, где f_0 — некоторая функция из $\mathcal{L}^0$, а $b_1 = f_{\overline{z}}(0)$, $|b_1| < 1$. Отсюда следует, что $\alpha \le \alpha_0 + \max|b_2|$, где максимум берется по всем функциям класса $\mathcal{L}^0$. Но для коэффициента b_2 в $\mathcal{L}^0$ справедлива оценка $|b_2| \le 1/2$, являющаяся известным [2] следствием из леммы Шварца, примененной к комплексной дилатации $\mu_0(z) = g_0'(z)/h_0'(z) = 2 \cdot b_2\, z + \ldots$ локально однолистной функции $f_0 = h_0(z) + \overline{g_0(z)} \in \mathcal{L}^0$.

Примерами семейств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^0$ являются известные классы однолистных гармонических отображений S_H, S_H^0 соответственно, а также их подклассы C_H, C_H^0, образованные функциями, отображающими Δ на области, близкие к выпуклым. Для классов C_H, C_H^0 справедливы равенства $\alpha = 3$, $\alpha_0 = 5/2$. J. Clunie и T. Sheil-Small [2] выдвинули известную гипотезу о том, что для класса S_H также имеет место равенство $\alpha = 3$. Оценка величины α в классе S_H остается одной из важнейших нерешенных задач теории гармонических отображений.

Другим, приведенным в [7], примером линейно- и аффинно-инвариантного семейства $\mathcal{L}$ является множество функций, порожденное с помощью преобразований A_ε и L_Φ при всевозможных ε и Φ из функции

$$k_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right]. \tag{3}$$

В данном случае α является одновременно порядком семейства $\mathcal{L}$ и семейства $\mathcal{L}^0$, включающего в себя функцию k_α.

В работе [7] были получены двусторонние точные оценки якобиана $J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$ произвольной функции класса $\mathcal{L}$ в терминах порядка α семейства $\mathcal{L}$. В настоящей работе приводится независимое доказательство неравенств, уточняющих упомянутую оценку в том смысле, что в качестве константы, определяющей порядок роста якобиана, выступает уже не α, а α_0 — порядок семейства $\mathcal{L}^0$, который, как отмечалось выше, может быть на $1/2$ меньше α.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{L}$ — линейно- и аффинно-инвариантное семейство гармонических функций. Пусть $f \in \mathcal{L}$, $b_1 = f_{\overline{z}}(0)$. Тогда для любого z, $|z| = r$, $0 \le r < 1$, справедливы следующие оценки якобиана J_f*

отображения f :

$$(1-|b_1|^2)\frac{(1-r)^{2\alpha_0-2}}{(1+r)^{2\alpha_0+2}} \le J_f(z) \le (1-|b_1|^2)\frac{(1+r)^{2\alpha_0-2}}{(1-r)^{2\alpha_0+2}}.$$

Оценки точны. Равенства достигаются, например, в линейно- и аффинно-инвариантном классе $C_H \subset S_H$ *однолистных близких к выпуклым отображений на функциях*

$$f(z) = K(z) + \overline{b_1\, K(z)}, \tag{4}$$

где

$$K(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} + \overline{\left(\frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}\right)}$$

— гармоническая функция Кебе, или на функциях вида (3) в семействе $\mathcal{L}$*, порождаемом функцией* $k_\alpha(z)$*.*

Таким образом, сформулированная теорема дает усиление (по сравнению с оценкой, полученной в [7]) оценки порядка роста якобиана гармонических отображений в случае, когда $\alpha_0 < \alpha$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathcal{L}$, $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, и фиксируем произвольное значение $z_0 = r\,e^{i\varphi},\ 0 < r < 1$. Тогда, в силу линейной инвариантности класса $\mathcal{L}$, отображение $\tilde{f}(z) = L_\Phi\,[f]\,(z)$, определяемое по формуле (1) при $\Phi(z) = (z - z_0)/(1 - \overline{z_0}z)$, также принадлежит классу $\mathcal{L}$. При этом коэффициент $\tilde{b}_1 = \tilde{f}_{\overline{z}}(0)$ функции $\tilde{f}$ таков, что

$$\tilde{b}_1 = \frac{g' \circ \Phi(0) \cdot \Phi'(0)}{\overline{h' \circ \Phi(0) \cdot \Phi'(0)}} = \frac{g'(z_0)}{\overline{h'(z_0)}}; \quad 1 - |\tilde{b}_1|^2 = \frac{J_f(z_0)}{|h'(z_0)|^2}.$$

Используя аффинную инвариантность семейства $\mathcal{L}$, применим к функции $\tilde{f}$ преобразование (2) со значением $\varepsilon = \tilde{b}_1$. Тогда для вновь определенной функции

$$F(z) = A_{\tilde{b}_1}[\tilde{f}](z)$$

имеет место равенство $B_1 = F_{\overline{z}}(0) = 0$, что означает принадлежность отображения F классу $\mathcal{L}^0$.

Голоморфная составляющая $H(z)$ функции $F(z) = H(z) + \overline{G(z)}$ имеет вид

$$H(z) = \tfrac{1}{1-|z_0|^2} \cdot \tfrac{1}{J_f(z_0)} \cdot \Big[\, (h \circ \Phi(z) - h(z_0)) \cdot \overline{h'(z_0)} - \\ - (g \circ \Phi(z) - g(z_0)) \cdot \overline{g'(z_0)}\,\Big].$$

Непосредственными вычислениями устанавливается, что

$$A_2 = \tfrac{H''(0)}{2} = \tfrac{1}{(1-|z_0|^2)J_f(z_0)} \times \\ \times \Big[\big(h''(z_0)(1-|z_0|^2)^2 - 2\,\overline{z_0}\, h'(z_0)(1-|z_0|^2)\big) \cdot \overline{h'(z_0)} - \\ - \big(g''(z_0)(1-|z_0|^2)^2 - 2\,\overline{z_0}\, g'(z_0)(1-|z_0|^2)\big) \cdot \overline{g'(z_0)} \Big] = \\ = \tfrac{1}{J_f(z_0)} \cdot \Big[\big(h''(z_0)\overline{h'(z_0)} - g''(z_0)\overline{g'(z_0)}\big)(1-|z_0|^2) - 2\,\overline{z_0}\, J_f(z_0) \Big] = \\ = -\overline{z_0} + \tfrac{1-|z_0|^2}{2} \cdot \tfrac{\partial}{\partial z} \ln J_f(z_0).$$

Из определения величины α_0 как максимума $|a_2|$ по всем функциям класса $\mathcal{L}^0$ следует, что

$$|z_0| \cdot \left| -1 + \frac{1-|z_0|^2}{2\,\overline{z_0}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \ln J_f(z_0) \right| \le \alpha_0.$$

Последнее неравенство справедливо также и для действительной части выражения под знаком модуля, что с учетом равенств $z_0 = r\,e^{i\varphi}$ и

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln J_f(r\,e^{i\varphi}) = e^{-i\varphi}\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial r} \ln J_f(r\,e^{i\varphi}) - i\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{re^{i\varphi}}\,\frac{\partial}{\partial \varphi} \ln J_f(r\,e^{i\varphi})$$

позволяет преобразовать его к виду

$$-\alpha_0 \le r\left(-1 + \frac{1-r^2}{4\,r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \ln J_f(r\,e^{i\varphi}) \right) \le \alpha_0.$$

Отсюда получаем

$$4\,\frac{r-\alpha_0}{1-r^2} \le \frac{\partial}{\partial r} \ln J_f(r\,e^{i\varphi}) \le 4\,\frac{r+\alpha_0}{1-r^2}.$$

Интегрируя последнее двойное неравенство по отрезку $[0,\, r]$ и затем потенциируя, приходим к оценкам

$$\frac{(1-r)^{2\alpha_0-2}}{(1+r)^{2\alpha_0+2}} \le \frac{J_f(z)}{J_f(0)} \le \frac{(1+r)^{2\alpha_0-2}}{(1-r)^{2\alpha_0+2}},$$

что с учетом равенства $J_f(0) = 1 - |b_1|^2$ совпадает с требуемым в формулировке теоремы.

Точность доказанных оценок на функциях $K(z) + \overline{b_1\, K(z)}$ в классе C_H, для которого $\alpha_0 = 5/2$ (см. [2], [4]), и на функциях вида $k_\alpha(z) + \overline{b_1\, k_\alpha(z)}$ устанавливается непосредственной проверкой. □

Как и в работе [7], оказывается справедливой следующая теорема, в некотором смысле обратная к теореме 1 и приводимая здесь без доказательства.

Теорема 2. *Если для данного отображения $f \in \mathcal{L}$ приведенная в теореме 1 верхняя оценка якобиана верна при некотором $\alpha_0 > 0$, то найдется такое ε, $|\varepsilon| < 1$, что*

$$\left| a_2 - \frac{\varepsilon}{2} \right| \le \alpha_0.$$

Если, кроме того, $f \in \mathcal{L}^0$, то

$$|a_2| \le \alpha_0.$$

Приведенные неравенства точны.

В качестве следствия из теоремы 1 получим точные оценки модуля производных аналитической и антианалитической частей отображений $f \in \mathcal{L}$.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{L}$ — линейно- и аффинно-инвариантное семейство гармонических функций. Пусть $f = h + \overline{g} \in \mathcal{L}$, $b_1 = f_{\overline{z}}(0)$. Тогда для любого z, $|z| = r$, $0 \le r < 1$, справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} |h'(z)| &\le (1 + r\,|b_1|)\,\frac{(1+r)^{\alpha_0 - 3/2}}{(1--r)^{\alpha_0 + 3/2}}, \\ |g'(z)| &\le (r + |b_1|)\,\frac{(1+r)^{\alpha_0 - 3/2}}{(1-r)^{\alpha_0 + 3/2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Оценки точны в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений, для которых $\alpha = \alpha_0 + 1/2$. Равенства достигаются, например, в линейно- и аффинно-инвариантном классе $C_H \subset S_H$ однолистных близких к выпуклым отображений на функциях вида (4).

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathcal{L}$, $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$. Комплексная дилатация $\mu_f(z) = g'(z)/h'(z)$ отображения

f удовлетворяет неравенству $|\mu_f(z)| < 1 \; \forall \, z \in \Delta$, что позволяет применить к ней лемму Шварца в инвариантной форме, в соответствии с которой

$$\left| \frac{\mu_f(z) - \mu_f(0)}{1 - \overline{\mu_f(0)} \mu_f(z)} \right| \leq |z|.$$

Отсюда, с учетом того, что $\mu_f(0) = b_1$, приходим к оценкам

$$|\mu_f(z)|^2 \cdot (1 - r^2 |b_1|^2) + |b_1|^2 - r^2 \leq$$
$$\leq 2(1 - r^2) \cdot \, Re \, \overline{b_1} \mu_f(z) \leq 2(1 - r^2) \cdot |b_1| |\mu_f(z)|.$$

Решая полученное неравенство относительно $|\mu_f(z)|$, имеем

$$|\mu_f(z)| \leq \frac{|b_1| \cdot (1 - r^2) + r \cdot (1 - |b_1|^2)}{1 - r^2 \, |b_1|^2}.$$

В совокупности с приведенной в теореме 1 верхней оценкой якобиана последнее неравенство позволяет утверждать, что

$$|h'(z)| = \sqrt{\frac{J_f(z)}{1 - |\mu_f(z)|^2}} \leq (1 + r \, |b_1|) \frac{(1 + r -)^{\alpha_0 - 3/2}}{(1 - r)^{\alpha_0 + 3/2}}.$$

Верхняя оценка $|g'(z)|$ получается отсюда с учетом соотношения $g'(z) = \mu_f(z) \cdot h'(z)$.

Точность доказанных оценок на функциях $K(z) + \overline{b_1 \, K(z)}$ в классе C_H устанавливается непосредственной проверкой. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что в тех аффинно- и линейно-инвариантных семействах $\mathcal{L}$, для которых $\alpha = \alpha_0 + 1/2$, при $|b_1| \to 1$ первое из неравенств (5) преобразуется к виду

$$|h'(z)| \leq \frac{(1 + r)^{\alpha - 1}}{(1 - r)^{\alpha + 1}},$$

что совпадает с оценкой $|h'(z)|$, которую T. Sheil- Small [3] получил ранее для класса S_H.

Résumé

In the affine- and linear-invariant classes of locally univalent sence preserving harmonic mappings of the unit disk the sharp estimates for the Jacobian are obtained.

Список литературы

[1] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Functionen. I* / Ch. Pommerenke // Math. Ann. 1964. Hf. 155. P. 108–154.

[2] Clunie J. *Harmonic univalent functions* / J. Clunie, T. Sheil–Small // Ann. Acad. Sci. Fenn., A I Math. 1984. V. 9. P. 3–25.

[3] Sheil-Small T. *Constants for planar harmonic mappings* / T. Sheil-Small // J. London Math. Soc. 1990. V. 42. P. 237–248.

[4] Duren P. *Harmonic mappings in the plane.* / P. Duren. Cambridge. 2004. 214 p.

[5] Shaubroeck L. E. *Subordination of planar harmonic functions* / L. E. Shaubroeck // Complex Variables. 2000. V. 41. P. 163–178.

[6] Starkov V. V. *Harmonic locally quasiconformal mappings* / V. V. Starkov // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sectio A. 1995. V. XLIX, N. 14. P. 183–197.

[7] Sobczak-Kneć M. *Old and new order of linear invariant family of harmonic mappings and the bound for Jacobian* / M. Sobczak-Kneć, V. V. Starkov, J. Szynal (to appear).

Тверской государственный университет,
математический факультет,
170002, Тверь, Садовый пер., 35
E-mail: Sergey.Graf@tversu.ru