Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 14, 2008

УДК 517

В. В. Мосягин, Б. М. Широков

МОНОТОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПАРАНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С КОНУСОМ

В паранормированных пространствах рассматриваются некоторые классы конусов. Их свойства используются для доказательства разрешимости операторных уравнений.

1. Пусть X — векторное пространство над полем скаляров Φ (будем считать, что $\Phi = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), θ — нулевой элемент X.

Определение 1. *Вещественный функционал $p(x)$, заданный на векторном пространстве X, называется паранормой, если он обладает следующими свойствами:*

1) $p(\theta) = 0$;
2) $p(x) \geq 0$ *для любого* $x \in X$;
3) $p(-x) = p(x)$ *для любого* $x \in X$;
4) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *для любых* x *и* y *из* X;
5) *если* $t_n \to t$ *в поле* Φ *и* $p(x_n - x) \to 0$, *то* $p(t_n x_n - tx) \to 0$.

Паранорма называется тотальной, если

6) *условие* $p(x) = 0$ *влечет за собой равенство* $x = \theta$.

Определение 2. *Пара (X, p), где X — векторное пространство, а p — паранорма, определенная на X, называется паранормированным векторным пространством (см. [1]).*

© В. В. Мосягин, Б. М. Широков, 2008

Каждое паранормированное векторное пространство (X, p) является псевдометрическим векторным пространством (X, d), где псевдометрика $d(x, y)$ определяется с помощью паранормы $p(x)$ равенством

$$d(x, y) = p(x - y). \tag{1}$$

Псевдометрика $d(x, y)$, определенная равенством (1), инвариантна по отношению к сдвигу: $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ для любых $x, y, z \in X$. Из неравенства

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) = d(x, y), \quad x, y \in X,$$

следует непрерывность паранормы $p(x)$.

Каждое паранормированное пространство является топологическим векторным пространством. Это пространство хаусдорфово, если паранорма тотальна.

Паранормированное пространство называется полным, если оно является полным псевдометрическим пространством (см. [1]).

В дальнейшем для краткости будем использовать аббревиатуру ПНП X (паранормированное пространство X).

2. Ниже всюду будем предполагать, что X — вещественное векторное пространство, паранорма p, определенная на X, тотальна, а паранормированное пространство (X, p) — полное.

Определение 3. *Замкнутое выпуклое множество $K \subset X$ назовем конусом, если $x \in K$, $x \neq \theta$ влечет за собой $\alpha x \in K$ при $\alpha \geq 0$ и $-x \notin K$.*

Любой конус K в паранормированном пространстве X позволяет ввести в нем полуупорядоченность: $x \geqslant y$ (равносильно $y \leqslant x$), если $x - y \in K$. Элемент $x \geqslant \theta$ (то есть $x \in K$) назовем положительным.

В полуупорядоченном ПНП X будем рассматривать конусные отрезки — множества $\langle u, v \rangle = \{x : u \leqslant x \leqslant v\}$. Эти множества выпуклы и замкнуты.

В каждом конкретном случае специфика конуса, при помощи которого вводится полуупорядоченность в ПНП X, может обеспечить дополнительные свойства полуупорядоченности. Это обстоятельство, как и в случае банаховых пространств, стимулирует изучение различных классов конусов ПНП X.

Определение 4. *Конус K в X называется правильным, если каждая неубывающая последовательность*

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots, \tag{2}$$

ограниченная сверху некоторым элементом

$$x_n \leqslant y, \tag{3}$$

сходится в X.

Определение 5. *Конус K в X называется нормальным, если из неравенства $\theta \leqslant x \leqslant y$ следует $p(x) \leq p(y)$.*

Определение 6. *Конус K в X называется миниэдральным, если каждое конечное множество элементов $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ имеет точную верхнюю границу $\sup\{x_1, \ldots, x_n\}$, и сильно миниэдральным, если точная верхняя граница существует у любого ограниченного сверху непустого множества.*

3. Тот факт, что ПНП X полуупорядочено при помощи некоторого конуса K, может использоваться при изучении оператора A, действующего в X, лишь в том случае, когда A обладает свойствами, связанными с полуупорядоченностью.

Определение 7. *Оператор A, действующий в ПНП X, называется*

положительным, если $A(K) \subset K$;

монотонным на множестве $D \subset X$, если из $x, y \in D$ и $x \leqslant y$ следует $A(x) \leqslant A(y)$.

Для нелинейных операторов указанные свойства независимы, а для линейных — из свойства положительности следует свойство монотонности.

Пусть для монотонного оператора A, действующего в ПНП X, могут быть указаны такие элементы v_0 и w_0, что

$$v_0 \leqslant w_0 \quad \text{и} \quad A(v_0) \geqslant v_0, \quad A(w_0) \leqslant w_0. \tag{4}$$

Тогда оператор A отображает конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в себя. Действительно, из неравенств $v_0 \leqslant x \leqslant w_0$ следует

$$v_0 \leqslant A(v_0) \leqslant A(x) \leqslant A(w_0) \leqslant w_0.$$

Построим последовательности

$$v_n = A(v_{n-1}), \quad w_n = A(w_{n-1}), \qquad n = 1,\ 2, \ldots \tag{5}$$

Первая из них, в силу (4), монотонно возрастает и ограничена сверху, а вторая — монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому эти последовательности сходятся, если K — правильный конус. Если оператор A непрерывен, то в равенствах (5) можно перейти к пределу. Значит,

$$v^* = A(v^*), \quad w^* = A(w^*),$$

где v^* и w^* — пределы последовательностей $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$ соответственно. При этом элементы v^* и w^* могут быть различными.

Приведенные рассуждения показывают, что для доказательства существования решения уравнения $A(x) = x$ в пространстве X с непрерывным и монотонным оператором A и для построения последовательных приближений достаточно установить существование элементов v_0 и w_0, удовлетворяющих соотношениям (4). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть K — правильный конус в паранормированном пространстве X и A — непрерывный монотонный оператор на конусном отрезке $\langle v_0, w_0 \rangle$, преобразующий этот отрезок в себя. Тогда оператор A имеет на $\langle v_0, w_0 \rangle$, по крайней мере, одну неподвижную точку. При этом последовательности (5) сходятся к неподвижным точкам оператора A.*

Теорема 2. *Пусть конус K в паранормированном пространстве X правильный, а оператор A обладает свойствами:*

1) *монотонен на отрезке $\langle v_0, w_0 \rangle \subset X$ и преобразует его в себя;*
2) *непрерывен;*
3) *имеет единственную неподвижную точку x^* на отрезке $\langle v_0, w_0 \rangle$.*

Тогда последовательные приближения

$$y_n = A(y_{n-1}), \qquad n = 1,\ 2, \ldots, \tag{6}$$

сходятся к x^*, какого бы ни было $y_0 \in \langle v_0, w_0 \rangle \subset X$.

Доказательство. Последовательности (5) и (6) удовлетворяют неравенствам

$$v_n \leqslant y_n \leqslant w_n, \qquad n = 1,\ 2, \ldots \tag{7}$$

Последовательности (5) сходятся и их пределы являются неподвижными точками оператора A. Из единственности неподвижной точки следует, что пределы последовательностей (5) совпадают. Кроме того, в полных метрических векторных пространствах с замкнутым конусом каждый правильный конус нормален (см. [2]). Следовательно, последовательность (6) сходится к x^*. Теорема доказана. $\square$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. (Принцип Биркгофа — Тарского [3]). *Пусть конус K в X сильно миниэдрален. Тогда любой монотонный оператор A (не обязательно непрерывный), оставляющий инвариантным конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$, имеет на $\langle v_0, w_0 \rangle$, по крайней мере, одну неподвижную точку.*

Résumé

Some fixed point theorems for monotone operators in paranormed spaces with a cone are proved.

Список литературы

[1] Wilansky A. *Modern methods in topological sector spaces* / A. Wilansky. New York, 1978.

[2] McArthur C. V. *Convergence of monotone nets in ordered topological vector spaces* / C. V. McArthur // Studia Math. 34(1970). P. 1–16.

[3] Опойцев В. И. *Нелинейные операторы в пространствах с конусом* / В. И. Опойцев, Т. А. Хурадзе. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1984.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: shirokov@petrsu.ru