Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 14, 2008

УДК $511, 514.8, 530.1$

Н. Ю. Светова

ОЦЕНКА ТОЧНЫХ ВЗАИМНЫХ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ СПЕКТРОВ

В работе установлена связь между взаимными мультифрактальными хаусдорфовой и упаковочной размерностями множества $K(\alpha,\beta)$ (предложенного в [1]) и взаимными мультифрактальными хаусдорфовой и упаковочной размерностями пересечения носителей борелевских вероятностных мер [2, 3]. При доказательстве утверждений используется техника доказательств Л. Олсена [6, 7], К. Фальконера [4], К.-С. Ло и С.-М. Нгаи [5].

Пусть дано произвольное метрическое пространство X с заданной на нем метрикой d. $\mathcal{B}(X)$ — σ-алгебра всех борелевских подмножеств пространства X. Под мерой μ, определенной на $\mathcal{B}(X)$, понимается нормированная борелевская мера. Множество всех борелевских вероятностных мер обозначим $P(X)$. Носителем меры μ называется множество всех точек, окрестности которых имеют положительную меру. $B_r(x)$ — открытый шар с центром в точке x и радиусом r.

Для любого $x \in E = \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$, мер $\mu,\nu \in P(X)$ положим

$$\underline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) = \varliminf_{r\to 0+} \frac{\ln \mu(B_r(x))}{\ln r}, \quad \overline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) = \varlimsup_{r\to 0+} \frac{\ln \mu(B_r(x))}{\ln r},$$
$$\underline{\beta}_{\mu,\nu}(x) = \varliminf_{r\to 0+} \frac{\ln \nu(B_r(x))}{\ln r}, \quad \overline{\beta}_{\mu,\nu}(x) = \varlimsup_{r\to 0+} \frac{\ln \nu(B_r(x))}{\ln r}.$$

Значения $\underline{\alpha}_{\mu,\nu}(x)$, $\overline{\alpha}_{\mu,\nu}(x)$ назовем, соответственно, *нижней* и *верхней взаимными локальными размерностями меры* μ *в точке* $x \in X$, $\underline{\beta}_{\mu,\nu}(x)$, $\overline{\beta}_{\mu,\nu}(x)$ — *нижней* и *верхней взаимными локальными размерностями меры* ν *в* x. Если $\underline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) = \overline{\alpha}_{\mu,\nu}(x)$ ($\underline{\beta}_{\mu,\nu}(x) = \overline{\beta}_{\mu,\nu}(x)$), то их общее значение будем обозначать $\alpha_{\mu,\nu}(x)$ ($\beta_{\mu,\nu}(x)$) и называть

© Н. Ю. Светова, 2008

взаимной локальной размерностью меры μ в точке $x \in X$(взаимной локальной размерностью меры ν в x). Взаимные локальные размерности мер α и β показывают, насколько быстро убывает число элементов пересечения носителей мер с заданной мерой μ и, соответственно, число элементов пересечения носителей мер с заданной мерой ν при уменьшении радиуса шара. Чем меньше значение локальной размерности, например α, тем медленнее это убывание и тем более плотное распределение точек с заданной мерой μ имеем. В случае однородно распределенной меры на пересечении носителей взаимная локальная размерность в точке совпадает с размерностью объемлющего пространства d, если указанная размерность принимает значения, меньшие d, то эти значения указывают на плотное распределение точек, в то время как $\alpha > d$ обнаруживается в областях, где точки с положительной мерой μ встречаются редко.

Для любых положительных α, β определим

$$K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}=\left\{x \in E\colon \overline{\alpha}_{\mu,\nu} < \alpha, \overline{\beta}_{\mu,\nu} < \beta\right\},\ K^{\overline{\beta}}_{\underline{\alpha}}=\left\{x \in E\colon \underline{\alpha}_{\mu,\nu} \geq \alpha, \overline{\beta}_{\mu,\nu} < \beta\right\},$$

$$K^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}}=\left\{x \in E\colon \overline{\alpha}_{\mu,\nu} < \alpha, \underline{\beta}_{\mu,\nu} \geq \beta\right\},\ K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}=\left\{x \in E\colon \underline{\alpha}_{\mu,\nu} \geq \alpha, \underline{\beta}_{\mu,\nu} \geq \beta\right\}.$$

Пусть $K(\alpha,\beta)$ — множество точек, принадлежащих пересечению носителей мер μ и ν, для которых взаимная локальная размерность меры μ равна α, а взаимная локальная размерность ν равна β, т. е.

$$K(\alpha,\beta) = K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}} \cap K^{\overline{\beta}}_{\underline{\alpha}} \cap K^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}} \cap K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} =$$
$$= \{x \in E : \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln \mu(B_\delta(x))}{\ln \delta} = \alpha, \quad \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln \nu(B_\delta(x))}{\ln \delta} = \beta\}.$$

Теорема 1. *Пусть X — метрическое пространство, $\mu,\nu \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha,\beta > 0$, $q,t \in \mathbb{R}$, $\delta_1,\delta_2 > 0$ такие, что $\delta_1+\delta_2 \leq \alpha q+\beta t+s$. Тогда*

1) $\mathcal{H}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s}(K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2}\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}), \quad q \geq 0, t \geq 0;$
2) $\mathcal{H}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s}(K^{\overline{\beta}}_{\underline{\alpha}}) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2}\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(K^{\overline{\beta}}_{\underline{\alpha}}), \quad q < 0, t \geq 0;$
3) $\mathcal{H}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s}(K^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}}) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2}\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(K^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}}), \quad q \geq 0, t < 0;$
4) $\mathcal{H}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s}(K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2}\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}), \quad q < 0, t < 0.$

Доказательство.

1) Пусть $m \in \mathbb{N}$, $q, t \geq 0$. Рассмотрим множество

$$A_m = \left\{ x \in K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}} : \frac{\ln \mu B_r(x)}{\ln r} < \alpha + \frac{\delta_1}{q}; \frac{\ln \nu B_r(x)}{\ln r} < \beta + \frac{\delta_2}{t}; 0 < r < \frac{1}{m} \right\}.$$

Очевидно, что множества A_m являются вложенными друг в друга и $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\bigcup\limits_m A_m \right) = K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}$.

Для фиксированного $m \in \mathbb{N}$ выберем η так, чтобы $0 < \eta < \frac{1}{m}$. Пусть $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ — произвольное центрированное η-покрытие любого множества $V \subseteq A_m$. Поскольку

$$\frac{\ln \mu B_{r_i}(x_i)}{\ln r_i} < \alpha + \frac{\delta_1}{q} \qquad \text{и} \qquad \frac{\ln \nu B_{r_i}(x_i)}{\ln r_i} < \beta + \frac{\delta_2}{t},$$

то для произвольного элемента x_i множества V

$$(\mu(B_{r_i}(x_i)))^q > r_i^{\alpha q + \delta_1} \text{ и } (\nu B_{r_i}(x_i))^t > r_i^{\beta t + \delta_2}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{H}_\eta^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2 + s}(V) \leq \sum_i (2r_i)^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2 + s} \leq 2^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2 + s} \times$$
$$\times \sum_i (\mu(B_{r_i}(x_i)))^q (\nu(B_{r_i}(x_i)))^t (2r_i)^s \leq \mathcal{H}_{\mu,\nu,\eta}^{q,t,s}(V).$$

Для произвольно выбранного $\eta < \dfrac{1}{m}$ имеем

$$\mathcal{H}_\eta^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2 + s}(A_m) \leq 2^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2} \mathcal{H}_{\mu,\nu,\eta}^{q,t,s}(A_m).$$

Переходя к супремуму по η и устремляя η к 0, для $\forall m \in \mathbb{N}$ получим

$$\mathcal{H}^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2 + s}(A_m) \leq 2^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2} \mathcal{H}_{\mu,\nu,0}^{q,t,s}(A_m) \leq 2^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2} \mathcal{H}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(A_m).$$

Поэтому $\mathcal{H}^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2 + s}(K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}) = \sup\limits_m \mathcal{H}^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2 + s}(A_m) \leq$
$\leq 2^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2} \sup\limits_m \mathcal{H}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(A_m) \leq 2^{\alpha q + \beta t + \delta_1 + \delta_2} \mathcal{H}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}})$.

Доказательство следующих трех пунктов почти в точности повторяет доказательство пункта 1, отличие состоит в выборе множества A_m. Ниже перечислим вид множества A_m для каждого случая.

2) $A_m = \left\{ x \in K_{\underline{\alpha}}^{\overline{\beta}} : \dfrac{\ln \mu B_r(x)}{\ln r} \geq \alpha + \dfrac{\delta_1}{q}; \dfrac{\ln \nu B_r(x)}{\ln r} < \beta + \dfrac{\delta_2}{t}; 0 < r < \dfrac{1}{m} \right\}$.

3) $A_m = \left\{ x \in K_{\underline{\beta}}^{\overline{\alpha}} : \dfrac{\ln \mu B_r(x)}{\ln r} < \alpha + \dfrac{\delta_1}{q}; \dfrac{\ln \nu B_r(x)}{\ln r} \geq \beta + \dfrac{\delta_2}{t}; 0 < r < \dfrac{1}{m} \right\}$.

4) $A_m = \left\{ x \in K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} : \dfrac{\ln \mu B_r(x)}{\ln r} \geq \alpha + \dfrac{\delta_1}{q}; \dfrac{\ln \nu B_r(x)}{\ln r} \geq \beta + \dfrac{\delta_2}{t}; 0 < r < \dfrac{1}{m} \right\}$.

Более того, если A является борелевским множеством, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть X — метрическое пространство, $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha, \beta > 0$, $q, t \in \mathbb{R}$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\delta_1 + \delta_2 \leq \alpha q + \beta t + s$. Тогда*
1) если $A \subseteq K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}$, $q < 0, t < 0$, то

$$2^{\alpha q + \beta t - \delta_1 - \delta_2} \mathcal{H}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(A) \leq \mathcal{H}^{\alpha q + \beta t - \delta_1 - \delta_2 + s}(A);$$

2) если $A \subseteq K_{\underline{\alpha}}^{\overline{\beta}}$, $q \geq 0, t < 0$, то

$$2^{\alpha q + \beta t - \delta_1 - \delta_2} \mathcal{H}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(A) \leq \mathcal{H}^{\alpha q + \beta t - \delta_1 - \delta_2 + s}(A);$$

3) если $A \subseteq K_{\underline{\beta}}^{\overline{\alpha}}$, $q < 0, t \geq 0$, то

$$2^{\alpha q + \beta t - \delta_1 - \delta_2} \mathcal{H}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(A) \leq \mathcal{H}^{\alpha q + \beta t - \delta_1 - \delta_2 + s}(A);$$

4) если $A \subseteq K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$, $q \geq 0, t \geq 0$, то

$$2^{\alpha q + \beta t - \delta_1 - \delta_2} \mathcal{H}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(A) \leq \mathcal{H}^{\alpha q + \beta t - \delta_1 - \delta_2 + s}(A).$$

Доказательство. 1) Выберем произвольное борелевское множество A из $K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}$, q, $t < 0$. Для любого натурального m положим

$$A_m = \left\{ x \in A : \frac{\ln \mu B_r(x)}{\ln r} < \alpha - \frac{\delta_1}{q}; \frac{\ln \nu B_r(x)}{\ln r} < \beta - \frac{\delta_2}{t}, 0 < r < \frac{1}{m} \right\}.$$

Для фиксированного m и произвольного множества $V \subseteq A_m$ подберем положительное $\eta < \frac{1}{m}$. Пусть $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ — произвольное центрированное η-покрытие любого множества $V \subseteq A_m$. Для $\forall x_i \in V$ имеем

$$(\mu B_{r_i}(x_i))^q > r_i^{\alpha q - \delta_1} \text{ и } (\nu B_{r_i}(x_i))^t > r_i^{\beta t - \delta_2}.$$

Следовательно, $\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\eta}(V) \leq \sum\limits_i (\mu(B_{r_i}(x_i)))^q (\nu(B_{r_i}(x_i)))^t (2r_i)^s \leq$ $\leq 2^s \sum\limits_i r_i^{\alpha q-\delta_1} \cdot r_i^{\beta t-\delta_2} \cdot r_i^s = 2^{-(\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2)} \sum\limits_i (2r_i)^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2+s} \leq$ $\leq 2^{-(\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2)} \mathcal{H}^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2+s}_{\eta}(V)$. Поэтому

$$\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(V) \leq 2^{-(\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2)} \mathcal{H}^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2+s}(V) \leq \mathcal{H}^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2+s}(A_m).$$

Последнее неравенство справедливо для любого $V \subseteq A_m$, тогда

$$\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(A_m) \leq 2^{-(\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2)} \mathcal{H}^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2+s}(A_m).$$

Так как множество A можно представить в виде счетного объединения A_m (по условию A — борелевское), то неравенство

$$2^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2} \mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(A) \leq \mathcal{H}^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2+s}(A)$$

завершает доказательство.

Следующие пункты теоремы доказываются аналогично этому. В качестве A_m в каждом отдельном случае следует взять

2) $A_m = \left\{ x \in A : \dfrac{\ln \mu B_r(x)}{\ln r} > \alpha - \dfrac{\delta_1}{q}; \dfrac{\ln \nu B_r(x)}{\ln r} \leq \beta - \dfrac{\delta_2}{t}, 0 < r < \dfrac{1}{m} \right\}$.

3) $A_m = \left\{ x \in A : \dfrac{\ln \mu B_r(x)}{\ln r} \leq \alpha - \dfrac{\delta_1}{q}; \dfrac{\ln \nu B_r(x)}{\ln r} > \beta - \dfrac{\delta_2}{t}, 0 < r < \dfrac{1}{m} \right\}$.

4) $A_m = \left\{ x \in A : \dfrac{\ln \mu B_r(x)}{\ln r} > \alpha - \dfrac{\delta_1}{q}; \dfrac{\ln \nu B_r(x)}{\ln r} > \beta - \dfrac{\delta_2}{t}, 0 < r < \dfrac{1}{m} \right\}$.

Теорема 3. *Пусть X — метрическое пространство, $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha, \beta > 0$, $q, t \in \mathbb{R}$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\delta_1 + \delta_2 \leq \alpha q + \beta t + s$. Тогда*

1) $\mathcal{P}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s}(K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}})$, $\quad q \geq 0, t \geq 0;$

2) $\mathcal{P}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s}(K^{\overline{\beta}}_{\underline{\alpha}}) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(K^{\overline{\beta}}_{\underline{\alpha}})$, $\quad q < 0, t \geq 0;$

3) $\mathcal{P}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s}(K^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}}) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(K^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}})$, $\quad q \geq 0, t < 0;$

4) $\mathcal{P}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s}(K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}})$, $\quad q < 0, t < 0.$

Докажем только первый пункт теоремы, доказательства остальных проводятся аналогично, в качестве A_m следует взять множества из соответствующих пунктов доказательства теоремы 1.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $q, t \geq 0$, A_m — множество из доказательства пункта 1 теоремы 1. Для фиксированного $m \in \mathbb{N}$ подберем

$0 < \eta < \frac{1}{m}$. Пусть $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ — любая центрированная η-упаковка произвольно выбранного множества $V \subseteq A_m$. Тогда для каждого $x_i \in V$

$$(\mu B_{r_i}(x_i))^q \geq r_i^{\alpha q+\delta_1}, \quad (\nu B_{r_i}(x_i))^t \geq r_i^{\beta t+\delta_2} \text{ и}$$

$$\sum_i (2r_i)^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s} \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \sum_i r_i^{\alpha q+\delta_1} r_i^{\beta t+\delta_2} (2r_i)^s \leq$$

$$\leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \sum_i (\mu(B_{r_i}(x_i)))^q (\nu(B_{r_i}(x_i)))^t (2r_i)^s \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\eta}(V).$$

Поэтому для произвольно выбранного $V \subseteq A_m$

$$\mathcal{P}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2}_{\eta}(V) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\eta}(V).$$

Пусть $A_m \subseteq \bigcup\limits_i V_i$, тогда

$$\mathcal{P}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s}(A_m) \leq \mathcal{P}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \left(\bigcup_i (A_m \cap V_i) \right) \leq$$

$$\leq \sum_i \mathcal{P}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2}(A_m \cap V_i) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \sum_i \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(A_m \cap V_i) \leq$$

$$\leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \sum_i \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(V_i).$$

Следовательно, для любого натурального m

$$\mathcal{P}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s}(A_m) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(A_m).$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty} \bigcup\limits_m A_m = K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}$, то

$$\mathcal{P}^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2+s}(K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}) \leq 2^{\alpha q+\beta t+\delta_1+\delta_2} \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}).$$

Теорема 4. *Пусть X — метрическое пространство, $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha, \beta > 0$, $q, t \in \mathbb{R}$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\delta_1 + \delta_2 \leq \alpha q + \beta t + s$. Тогда если множество A является борелевским и*
1) если $A \subseteq K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}$, $q < 0, t < 0$, то

$$2^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2} \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(A) \leq \mathcal{P}^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2+s}(A);$$

2) если $A \subseteq K_{\underline{\alpha}}^{\overline{\beta}}$, $q \geq 0, t < 0$, *то*

$$2^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2}\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(A) \leq \mathcal{P}^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2+s}(A);$$

3) если $A \subseteq K_{\underline{\beta}}^{\overline{\alpha}}$, $q < 0, t \geq 0$, *то*

$$2^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2}\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(A) \leq \mathcal{P}^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2+s}(A);$$

4) если $A \subseteq K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$, $q \geq 0, t \geq 0$, *то*

$$2^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2}\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(A) \leq \mathcal{P}^{\alpha q+\beta t-\delta_1-\delta_2+s}(A).$$

Из теорем 1 и 3 получим

Следствие 1. *Пусть* X — *метрическое пространство,* $\mu,\nu \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha,\beta > 0$, $q,t \in \mathbb{R}$, *тогда*

1) $\dim_{\mu,\nu}(K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}) \leq \alpha q + \beta t + b_{\mu,\nu}(q,t), \quad q \geq 0, t \geq 0,$
2) $\dim_{\mu,\nu}(K_{\underline{\alpha}}^{\overline{\beta}}) \leq \alpha q + \beta t + b_{\mu,\nu}(q,t), \quad q < 0, t \geq 0,$
3) $\dim_{\mu,\nu}(K_{\underline{\beta}}^{\overline{\alpha}}) \leq \alpha q + \beta t + b_{\mu,\nu}(q,t), \quad q \geq 0, t < 0,$
4) $\dim_{\mu,\nu}(K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}) \leq \alpha q + \beta t + b_{\mu,\nu}(q,t), \quad q < 0, t < 0,$
5) $\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}(K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}}) \leq \alpha q + \beta t + B_{\mu,\nu}(q,t), \quad q \geq 0, t \geq 0,$
6) $\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}(K_{\underline{\alpha}}^{\overline{\beta}}) \leq \alpha q + \beta t + B_{\mu,\nu}(q,t), \quad q < 0, t \geq 0,$
7) $\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}(K_{\underline{\beta}}^{\overline{\alpha}}) \leq \alpha q + \beta t + B_{\mu,\nu}(q,t), \quad q \geq 0, t < 0,$
8) $\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}(K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}) \leq \alpha q + \beta t + B_{\mu,\nu}(q,t), \quad q < 0, t < 0.$

Следствие 2. *Пусть* X — *метрическое пространство,* $\mu,\nu \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha,\beta > 0, q,t \in \mathbb{R}$, *тогда для точных взаимных спектров* $\dim_{\mu,\nu}(K(\alpha,\beta))$ *и* $\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}(K(\alpha,\beta))$ *имеют место следующие неравенства*

1) $\dim_{\mu,\nu}(K(\alpha,\beta)) \leq \inf\limits_{q,t}(\alpha q + \beta t + b_{\mu,\nu}(q,t)),$
2) $\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}(K(\alpha,\beta)) \leq \inf\limits_{q,t}(\alpha q + \beta t + B_{\mu,\nu}(q,t)).$

Résumé

It has received the estimations for the fine mutual multifractal spectra.

Список литературы

[1] Светова Н. Ю. *Условные и взаимные мультифрактальные спектры. Определение и основные свойства* / Н. Ю. Светова // Труды Петрозаводского государственного унивеоситета. Сер. Математика. 2003. Вып. 10. С. 41–58.

[2] Светова Н. Ю. *Взаимные мультифрактальные спектры I. Точные спектры*// Труды Петрозаводского государственного университета. Сер. Математика. Вып. 11. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2004. С. 42–47.

[3] Светова Н. Ю. *Взаимные мультифрактальные спектры II. Спектры Лежандра, Хентшель – Прокачиа и спектры, определенные для разбиений* / Н. Ю. Светова // Труды Петрозаводского государственного университета. Сер. Математика. 2004. Вып. 11. С. 47–56.

[4] Falconer K. J. *Fractal geometry. Mathematical Foundations and Applications* / K. J. Falconer. John Wiley & Sons. New York, 1990.

[5] Lau K. S. *Multifractal measures and a weak separation condition* / K. S. Lau, S.-M. Ngai // Advances in mathematics. 1999. № 141. P. 45–96.

[6] Olsen L. *A multifractal formalism* / L. Olsen // Advances in mathematics. 1995. № 116. P. 82–195.

[7] Olsen L. *Multifractal geometry* / L. Olsen // Progress in probability. 2000. V. 46. P. 3–37.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: nsvetova@petrsu.ru