Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 16, 2009

УДК 517.518

Е. С. Белкина

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВ НИКОЛЬСКОГО — СТЕЧКИНА И БОАСА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДАНКЛЯ

На основе гармонического анализа Фурье — Данкля доказаны аналоги классических неравенств Никольского — Стечкина и Боаса.

В последние годы в математической литературе появился и стал широко использоваться новый класс дифференциально-разностных операторов — операторов Данкля (см., например, [12] и цитированную там литературу.) С операторами Данкля связан гармонический анализ Фурье — Данкля, который включает в себя интегральные преобразования Данкля и обобщенные сдвиги Данкля. Большой интерес представляет получение аналогов различных классических задач гармонического анализа для гармонического анализа Фурье — Данкля (см., например, [1, 2, 10–12]). В настоящей работе доказываются некоторые аналоги неравенств Никольского — Стечкина и Боаса. Приведем необходимые сведения о классических неравенствах Стечкина — Никольского и Боаса для тригонометрических полиномов.

Теорема 1. *Пусть $T_n(x)$ — тригонометрический полином степени n. Для любых чисел $h \in (0, \pi/n)$ и $r \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\max_x \left| \frac{d^r T_n}{dx^r}(x) \right| \leq \left(\frac{n}{2\sin(nh)} \right)^r \max_x |\Delta_h^r T_n(x)|, \tag{1}$$

где $\Delta_h^r T_n$ — конечная разность порядка r с шагом h.

Неравенство (1) называется неравенством Никольского — Стечкина. Оно доказано С. М. Никольским [5] для случая $h = \frac{\pi}{2n}$ и С. Б. Стечкиным [6] для произвольного h (см. также [7, гл. IV, пункт 4.8]).

Теорема 2. *Пусть $T_n(x)$ — тригонометрический полином степени n. Для любых чисел δ и h, удовлетворяющих условию $0<\delta<h<\pi/n$, и для любого $r\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\left(\frac{n}{2\sin(n\delta)}\right)^r \max_x |\Delta_\delta^r T_n(x)| \le \left(\frac{n}{2\sin(nh)}\right)^r \max_x |\Delta_h^r T_n(x)|. \qquad (2)$$

Неравенство (2) называется неравенством Боаса. Доказательство неравенства см. в [7] или [8].

Целью работы является получение аналогов неравенств (1) и (2) для гармонического анализа Фурье — Данкля. Предварительно приведем необходимые сведения из гармонического анализа Фурье — Данкля (см. [9–12]).

Оператором Данкля называется следующий дифференциально-разностный оператор D:

$$Df(x)=\frac{df}{dx}(x)+\big(\alpha+\frac{1}{2}\big)\frac{f(x)-f(-x)}{x}, \qquad \alpha>-\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Действие оператора D определено для всех функций $f\in C^{(1)}(\mathbb{R})$.

Введем обобщенную экспоненциальную функцию

$$e_\alpha(x):=j_\alpha(x)+i\,c_\alpha\,x\,j_{\alpha+1}(x), \qquad (4)$$

где

$$c_\alpha=\big(2(\alpha+1)\big)^{-1}, \quad i=\sqrt{-1},$$

$j_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя первого рода, т. е.

$$j_\alpha(x)=\frac{2^\alpha\,\Gamma(\alpha+1)\,J_\alpha(x)}{x^\alpha},$$

где $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода (см. [4, с. 412]).

Используя соотношение

$$j'_\alpha(x)=-\frac{xj_{\alpha+1}(x)}{2(\alpha+1)},$$

которое следует, например, из формулы 8.472 в [3], получим, что функцию $e_\alpha(x)$ можно также записать в виде

$$e_\alpha(x)=j_\alpha(x)-ij'_\alpha(x). \qquad (5)$$

Через $C^{(k)}$ обозначим множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, через $\mathcal{E}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, а через $\mathcal{D}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем.

Через $L_{2,\alpha}$ обозначим гильбертово пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль), для которых конечна норма

$$\|f\|_{2,\alpha} := \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, |x|^{2\alpha+1}\, dx\Big)^{1/2}.$$

Преобразованием Данкля называется следующее интегральное преобразование

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e_\alpha(\lambda x)\, |x|^{2\alpha+1}\, dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Обратное преобразование Данкля задается формулой

$$f(x) = \big(2^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)\big)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)\, e_\alpha(-\lambda x)\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda. \tag{7}$$

Пусть $\mathcal{S}$ — пространство быстроубывающих функций на $\mathbb{R}$, т. е. множество всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Обычным образом пространство $\mathcal{S}$ снабжается топологией и становится локально-выпуклым пространством. Известно (см. [10]), что прямое и обратное преобразования Данкля являются взаимно обратными автоморфизмами пространства $\mathcal{S}$. Для преобразования Данкля справедливо равенство Парсеваля ($f(x) \in \mathcal{S}$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, |x|^{2\alpha+1}\, dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda, \tag{8}$$

где

$$A = \left(2^\alpha\, \Gamma(\alpha+1)\right)^{-2}. \tag{9}$$

Отображение $f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ продолжается по непрерывности до изоморфизма гильбертова пространства $L_{2,\alpha}$ на себя. Продолженное отображение будем также обозначать $f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ и называть преобразованием Данкля, при этом остается справедливой формула (8), которую можно также записать в виде

$$\|f\|_{2,\alpha}^2 = A\,\|\widehat{f}\|_{2,\alpha}^2. \tag{10}$$

Оператор обобщенного сдвига Данкля $T^y f(x)$ можно определять различными способами. Для функции $f(x) \in \mathcal{E}$ оператор обобщенного сдвига Данкля $u(x,y) = T^y f(x)$ можно определить как решение следующей задачи Коши (см., например, [10]):

$$D_x u(x,y) = D_y u(x,y); \tag{11}$$

$$u(x,0) = f(x), \tag{12}$$

где D_x и D_y — дифференциально-разностные операторы Данкля, примененные по переменным x и y соответственно.

Для любой функции $f(x) \in \mathcal{E}$ решение этой задачи Коши существует, единственно и может быть выписано в явном виде (см. [9]):

$$\begin{aligned} T^y f(x) = C\Bigg(&\int_0^\pi f_e(\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi})\,h^e(x,y,\varphi)\,\sin^{2\alpha}\varphi\,d\varphi+\\ &+\int_0^\pi f_o(\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi})\,h^o(x,y,\varphi)\,\sin^{2\alpha}\varphi\,d\varphi\Bigg), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$C = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(1/2)}.$$

$$h^e(x,y,\varphi) = 1 - \operatorname{sign}(xy)\cos\varphi,$$

$$h^o(x,y,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)(1-\operatorname{sign}(xy)\,\cos\varphi)}{\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi}} & \text{для } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{для } (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

$$f_e(x) = \frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right), \quad f_o(x) = \frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right). \tag{14}$$

По формуле (13) оператор T^y может быть определен и для более широкого, чем $\mathcal{E}$, класса функций. В частности, оператор $T^y f$ определен для любой непрерывной функции f. По формуле (12) оператор

T^y продолжается до непрерывного оператора в $L_{2,\alpha}$ (см. [1]). Продолженный оператор также будем обозначать T^y.

Обозначим через $\mathcal{I}_\nu$, $\nu > 0$, множество всех функций $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $g(x)$ — целая функция экспоненциального типа $\leq \nu$;
2) $g(x)$ принадлежит пространству $L_{2,\alpha}$.

Функции из $\mathcal{I}_\nu$ будут использоваться в качестве средства приближения. Отметим (см. [1]), что функции из $\mathcal{I}_\nu$ допускают также другое описание: $g(x) \in \mathcal{I}_\nu$ тогда и только тогда, когда $g(x) \in L_{2,\alpha}$ и ее преобразование Данкля $\widehat{g}(\lambda)$ равно 0 при $|\lambda| > \nu$ (такие функции мы будем называть функциями с ограниченным спектром порядка ν).

При помощи обобщенного сдвига Данкля для любой функции $f(x) \in L_{2,\alpha}$ определим разности с шагом $h > 0$:

$$\Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x) := f(x) - T^h f(x), \quad \ldots, \quad \Delta_h^k f(x) := \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(x)).$$

Можно также написать, что

$$\Delta_h^k f(x) = (I - T^h)^k f(x),$$

где I — единичный оператор.

Приведем некоторые необходимые нам свойства, показывающие связь между преобразованием Данкля, обобщенным сдвигом Данкля и оператором Данкля.

Лемма 1. *Пусть $f \in L_{2,\alpha}(\mathbb{R})$ и $s \geq 0$, тогда*

$$(\widehat{T^s f})(\lambda) = e_\alpha(-\lambda s)\,\widehat{f}(\lambda), \tag{15}$$

где $f \mapsto \widehat{f}$ — преобразование Данкля.

Доказательство. См. [1], лемма 2.5. □

Лемма 2. *Пусть функции f b Df принадлежат пространству $L_{2,\alpha}$, тогда*

$$\widehat{Df}(\lambda) = -i\lambda\,\widehat{f}(\lambda), \tag{16}$$

где $f \to \widehat{f}$ — преобразование Данкля.

Доказательство. См. [1], лемма 3.3. □

В следующей лемме приведено несколько оценок для функций $e_\alpha(x)$, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 3. *Для $x \in \mathbb{R}$ справедливы следующие неравенства*

1) $|e_\alpha(x)| \le 1$, причем равенство достигается только при $x = 0$;
2) $1 - e_\alpha(x) \le 2|x|$;
3) $1 - e_\alpha(x) \ge c$ при $|x| \ge 1$, где $c > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от α.

Доказательство. См. [1], лемма 3.4. □

Теорема 3. *Пусть $\Phi(x) \in \mathcal{I}_\nu, \nu > 0, m \in \mathbb{N}$. Для любого $h \in (0, \frac{1}{\nu})$ справедливо неравенство*

$$\|D^m\Phi\|_{2,\alpha} \le c_1 h^{-m} \|\Delta_h^m \Phi\|_{2,\alpha}, \tag{17}$$

где $c_1 = c_1(\alpha, m)$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Из равенства Парсеваля (10) и из свойств (15) и (16) следует, что

$$\|D^m\Phi\|_{2,\alpha} = A\|\lambda^m \widehat{\Phi}(\lambda)\|_{2,\alpha}, \tag{18}$$

$$\|\Delta_h^m\Phi\|_{2,\alpha} = A\|(1 - e_\alpha(-h\lambda))^m \widehat{\Phi}(\lambda)\|_{2,\alpha}. \tag{19}$$

Исходя из (18) и (19), можно написать равенство

$$\|D^m\Phi\|_{2,\alpha} = A\|\lambda^m \widehat{\Phi}(\lambda)\|_{2,\alpha} =$$
$$= h^{-m} A \left\| \frac{(\lambda h)^m}{(1 - e_\alpha(-\lambda h))^m} (1 - e_\alpha(-\lambda h))^m \widehat{\Phi}(\lambda) \right\|_{2,\alpha}. \tag{20}$$

Определим функцию

$$\varphi(t) := \frac{t^m}{(1 - e_\alpha(-t))^m}. \tag{21}$$

Так как $|e_\alpha(t)| < 1$ при $t \ne 0$ (см. лемма 3, п. 1.), то функция $\varphi(t)$ определена на множестве $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Заметим, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{1 - e_\alpha(-t)} = \frac{1}{e'_\alpha(0)} = -i(2\alpha + 2).$$

Поэтому существует конечный предел функции $\varphi(t)$ при $t \to 0$ и, следовательно, функция $\varphi(t)$ ограничена на множестве $[-1,1]\backslash\{0\}$.

Пусть

$$c_1 = \sup_{0<|t|\le 1} |\varphi(t)|.$$

Так как $\operatorname{supp}\widehat{\Phi} \subseteq [-\nu,\nu]$, то можно считать, что $|\lambda| \le \nu$, а так как $h \in (0, \frac{1}{\nu})$, то $h\lambda \in [-1,1]$. Из (20) и (19) вытекает, что

$$\|D^m\Phi\|_{2,\alpha} \le c_1 h^{-m} A\|(1-e_\alpha(-h\lambda))^m\widehat{\Phi}(\lambda)\|_{2,\alpha} = c_1 h^{-m}\|\Delta_h^m\Phi\|_{2,\alpha}.$$

Теорема доказана. □

Неравенство (17) является аналогом неравенства Никольского — Стечкина.

Теорема 4. *Пусть $\Phi(x) \in \mathcal{I}_\nu, \nu > 0, m \in \mathbb{N}$. Для любых чисел h и δ, удовлетворяющих условию $0 < \delta < h < 1/\nu$, справедливо неравенство*

$$\delta^{-m}\|\Delta_\delta^m\Phi\|_{2,\alpha} \le c_2 h^{-m}\|\Delta_h^m\Phi\|_{2,\alpha}, \tag{22}$$

где $c_2 = c_2(\alpha, m)$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Пользуясь равенством Парсеваля (10) и свойством (15), можно написать, что

$$\|\Delta_\delta^m\Phi\|_{2,\alpha} = A\|(1-e_\alpha(-\delta\lambda))^m\widehat{\Phi}(\lambda)\|_{2,\alpha}, \tag{23}$$

$$\|\Delta_h^m\Phi\|_{2,\alpha} = A\|(1-e_\alpha(-h\lambda))^m\widehat{\Phi}(\lambda)\|_{2,\alpha}. \tag{24}$$

Из (23) и (24) вытекает, что

$$\delta^{-m}\|\Delta_\delta^m\Phi\|_{2,\alpha} = h^{-m}A\|\left(\frac{h}{\delta}\right)^m \frac{(1-e_\alpha(-\delta\lambda))^m}{(1-e_\alpha(-\lambda h))^m}(1-e_\alpha(-\lambda h))^m\widehat{\Phi}(\lambda)\|_{2,\alpha}. \tag{25}$$

Пусть $t = -h\lambda$, $s = \delta/h$. Так как $|\lambda| \le \nu$, $0 < \delta < h < 1/\nu$, то $|t| \le 1$, $0 < s < 1$. Формулу (25) можно переписать в виде

$$\delta^{-m}\|\Delta_\delta^m\Phi\|_{2,\alpha} = h^{-m}A\|\psi(s,t)(1-e_\alpha(-\lambda h))^m\widehat{\Phi}(\lambda)\|_{2,\alpha}, \tag{26}$$

где

$$\psi(s,t) := s^{-m}\frac{(1-e_\alpha(st))^m}{(1-e_\alpha(t))^m}. \tag{27}$$

Проверим, что функция $\psi(s,t)$ ограничена в области $0 < |t| < 1$, $0 < s < 1$. Действительно, пользуясь неравенством

$$|1 - e_\alpha(st)| \le 2|st|$$

(см. лемма 3, пункт 2), получим, что

$$|\psi(s,t)| \le s^{-m} \frac{2^m s^m |t|^m}{|1 - e_\alpha(t)|^m} = 2^m |\varphi(t)|,$$

где $\varphi(t)$ — функция, определенная в (20). А так как функция $\varphi(t)$ ограничена при $t \in [-1,1]\backslash\{0\}$, то функция $\psi(s,t)$ тоже ограниченная.

Пусть

$$c_2 = \sup_{\substack{0<|t|\le 1\\ 0<s<1}} |\psi(s,t)|.$$

Из (24) и (26) вытекает, что

$$\delta^{-m}\|\Delta_\delta^m \Phi\|_{2,\alpha} \le c_2 h^{-m} \|\Delta_h^m \Phi\|_{2,\alpha},$$

что завершает доказательство теоремы. □

Неравенство (22) является аналогом неравенства Боаса.

Résumé

Using the Fourier — Dunkl harmonic analysis it is proved analogs of the classical inequalities of S. M. Nikolskiĭ, S. B. Stechkin and R. P. Boas.

Список литературы

[1] Белкина Е. С. *Гармонический анализ Данкля и некоторые задачи теории приближений функций.* I / Е. С. Белкина // Труды ПетрГУ. Сер. Матем. 2006. Вып. 13. С. 3–25.

[2] Белкина Е. С. *Гармонический анализ Данкля и некоторые задачи теории приближений функций.* II / Е. С. Белкина // Труды ПетрГУ. Сер. Матем. 2006. Вып. 13. С. 26–37.

[3] Градштейн И. С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Наука, 1971.

[4] Левитан Б. М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье* / Б. М. Левитан // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6. № 2. С. 70–82.

[5] Никольский С. М. *Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна*/ С. М. Никольский // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. № 9. С. 1507–1510.

[6] Стечкин С. Б. *Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна* / С. Б. Стечкин // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. № 9. С. 1511–1514.

[7] Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* / А. Ф. Тиман. М.: Физматгиз, 1960.

[8] Boas R. P. *Quelques généralisations d'une théoréme de S. Bernstein sur la dérivée d'un polynome trigonometrique* / R. P. Boas // Comp. Rend. 1948. V. 227. P. 618–619.

[9] Mohamed A. M. *Transmutation operators and Paley — Wiener theorem associated with a singular differential-difference operator on the real line* / A. M. Mohamed, T. Khalifa // Analysis and Applications. 2003. V. 1. No 1. P. 43–70.

[10] Neijb B. S. *Mean-periodic functions associated with the Dunkl operators* / B. S. Neijb, K. Samir // Integral Transforms and Special Functions. 2004. V. 15. No 2. P. 155–179.

[11] Rösler M. *Dunkl operators: Theory and applications* / M. Rösler // Lecture Notes in Math. 2002. V. 1817. P. 93–135.

[12] Sundaram T. *Convolution and maximal function for Dunkl transform* / T. Sundaram, X. Yuan // J. Anal. Math. 2006. V. 97. P. 25–55.

Карельский государственный педагогический университет,
физико-математический факультет,
кафедра математического анализа и алгебры,
185640, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 17