Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 16, 2009

УДК 517.54

Е. Г. Ганенкова

НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ, ОБРАЗУЮЩИХ ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СЕМЕЙСТВА

В работе изучаются граничные свойства модулей производных функций из линейно-инварианитных семейств в поликруге. Рассматриваются вопросы о поведении модулей производных в угловых областях, используется связь линейно-инвариантных семейств и класса Блоха.

§ 1. Введение

Объектом изучения будут являться функции

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n), \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Delta^n,$$

аналитические в поликруге $\Delta^n = \underbrace{\Delta \times \ldots \times \Delta}_{n} \in \mathbb{C}^n$ ($\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$), образующие линейно-инвариантные семейства.

Термин линейно-инвариантного семейства был введен Х. Поммеренке в [1] для функций, аналитических в единичном круге Δ. Семейство $\mathfrak{M}$ функций $f(z) = z + \ldots$, аналитических и локально однолистных в Δ, называется линейно-инвариантным семейством, если вместе с функцией $f(z)$ оно содержит также и функцию вида

$$\frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))}{f'(\varphi(0))\varphi'(0)} = z + \ldots$$

для любого конформного автоморфизма $\varphi(z)$ единичного круга Δ.

Изучение таких семейств вызвало большой интерес. Оказалось, что многие известные классы конформных отображений являются линейно-инвариантными семействами. Следовательно, появилась возможность изучать общие свойства таких классов функций. И если раньше изучение многих классов конформных отображений в большей части основывалось на геометрических свойствах, характерных для функций данного семейства, то с введением понятия линейной инвариантности стало возможным разработать универсальные методы изучения свойств классов локально однолистных функций.

В [2] Я. Годуля и В. В. Старков обобщили понятие линейно-инвариантного семейства на функции, аналитические в поликруге Δ^n.

Зафиксируем число $l,\ 1 \le l \le n$.

Определение 1. *Семейство $\mathfrak{M}_l$ аналитических в Δ^n функций $f(z)$ называется l-линейно-инвариантным семейством, если для каждой функции из этого семейства выполняются следующие условия:*

1) $\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(z) \neq 0$ в Δ^n, $f(\mathbb{O}) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbb{O}) = 1$, где $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0)$ — центр поликруга;

2) $f(ze^{i\theta})e^{-i\theta_l} \in \mathfrak{M}_l$ для любой функции $f \in \mathfrak{M}_l$ и любого $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, где $ze^{i\theta} = (z_1 e^{i\theta_1}, ..., z_n e^{i\theta_n})$;

3) для любой функции $f \in \mathfrak{M}_l$ и для любого $a = (a_1, ..., a_n) \in \Delta^n$

$$f(z,a) = \frac{f(\varphi_a(z)) - f(\varphi_a(\mathbb{O}))}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(a)(1 - |a_l|^2)} \in \mathfrak{M}_l,$$

где

$$\varphi_a(z) = \left(\frac{z_1 + a_1}{1 + \bar{a}_1 z_1}, \ldots, \frac{z_n + a_n}{1 + \bar{a}_n z_n} \right)$$

— автоморфизм поликруга Δ^n.

Норму в $\mathbb{C}^n$ определим формулой

$$||z|| = \max_k |z_k| \quad \text{для } z = (z_1, \ldots, z_n).$$

Пусть

$$\frac{\partial f(z,a)}{\partial z_l} = 1 + c_1(f,a)z_1 + \ldots + c_n(f,a)z_n + o(\|z\|).$$

Определение 2. *Порядком функции из линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}_l$ называется число*

$$\mathrm{ord} f = \frac{1}{2} \sup_{a \in \Delta^n} \|(c_1(f,a), \ldots, c_n(f,a))\|.$$

Порядком линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}_l$ *называется число*

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M}_l = \sup_{f\in\mathfrak{M}_l} \operatorname{ord} f.$$

Определение 3. *Универсальным* l*-линейно-инвариантным семейством* $\mathcal{U}^l_\alpha$ *порядка* α *называется объединение всех* l*-линейно-инвариантных семейств, порядок которых не превосходит* α*:*

$$\mathcal{U}^l_\alpha = \bigcup_{\operatorname{ord}\mathfrak{M}_l\le\alpha} \mathfrak{M}_l.$$

В [2] показано, что $\mathcal{U}^l_\alpha = \emptyset$ при $\alpha < 1$.

Важным при изучении аналитических функций является вопрос о поведении этих функций при приближении их аргумента к границе. Одной из задач этого класса является описание характера роста модулей функций и их производных вблизи остова поликруга $\{z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_k| = 1,\ k = 1,\dots,n\}$. В случае функций одного переменного ($n = 1$) это было сделано в работах [3–7]; для функций, аналитических в поликруге, теоремы, описывающие решение данной задачи, получены в [8–10].

Естественно рассматривать симметричную задачу: описать характер убывания тех же величин при приближении z к $\partial\Delta^n$. Для одномерного случая в [11] была получена теорема, утверждающая, что модули производных функций из $\mathcal{U}^l_\alpha$ убывают гладко, регулярно. В [12] этот результат был обобщен на случай поликруга.

Обозначим $r_k = |z_k|$, $\mathbf{r} = (r_1,\dots,r_n)$, где $r_k \in (0;1)$ $\forall k = 1,\dots,n$, тогда $z = \mathbf{r}e^{i\theta}$. Пусть $I = (1-, ..., 1-)$. Для непрерывной в Δ^n функции $p(z)$ и фиксированного $r \in (0;1)$ обозначим

$$m(r,p) = \min_{\|z\|\le r} |p(z)|.$$

Для $f \in \mathcal{U}^l_\alpha$ введем обозначение

$$\Phi_\theta(\mathbf{r}) = \left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbf{r}e^{i\theta})\right| \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+r_k}{1-r_k}\right)^{\alpha} (1-r_l^2).$$

Теорема A (регулярности роста в $\mathcal{U}^l_\alpha$) [12]. *Пусть* $f(z) \in \mathcal{U}^l_\alpha$*. Тогда*

1) для любого фиксированного θ величины $\Phi_\theta(\mathbf{r})$ и $\min\limits_\theta \Phi_\theta(\mathbf{r})$ не убывают по каждой переменной $r_k \in (0;1)$; величина

$$m\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right)\frac{(1+r)^{\alpha n+1}}{(1-r)^{\alpha n-1}}$$

не убывает по $r \in (0;1)$;

2) существуют такие $\delta \in [1,\infty]$ и $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$, что

$$\delta = \lim_{r\to 1-}\left[m\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right)\frac{(1+r)^{\alpha n+1}}{(1-r)^{\alpha n-1}}\right] = \lim_{\mathbf{r}\to I}\min_\theta \Phi_\theta(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r}\to I}\Phi_{\theta_0}(\mathbf{r});$$

3) $\delta = 1 \Longleftrightarrow f(z) = k_\theta(z) =$

$$= -\frac{e^{i\theta_l}}{2\alpha}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-z_k e^{-i\theta_k}}{1+z_k e^{-i\theta_k}}\right)^{\alpha} - 1\right] + Q(z_1,\ldots,z_{l-1},z_{l+1},\ldots,z_n),$$

где Q — любая аналитическая в Δ^{n-1} функция, такая, что $Q(\mathbb{O}) = 0$.

Определение 4. *Вектор $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$ из п. 2) теоремы A будем называть направлением максимального убывания (н.м.у.) функции $f(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l$.*

Определение 5. *Направлением интенсивного убывания (н.и.у.) функции $f(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l$ будем называть каждый вектор $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n) \in [0;2\pi)^n$, такой, что*

$$\lim_{\mathbf{r}\to I}\Phi_\theta(\mathbf{r}) = \delta_\theta < \infty.$$

Определение 6. *Будем называть δ_θ числом Хеймана функции f по аналогии с терминологией теорем регулярности роста.*

Данная работа является продолжением исследований, связанных с теоремами регулярности убывания в семействе $\mathcal{U}_\alpha^l$.

§ 2. Поведение производных в угловой области

Будем рассматривать функции $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$, имеющие хотя бы одно н.и.у.

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$.

В данном разделе будет показано, что если функция $f(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l$ имеет н.и.у. $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ с соответствующим ему числом Хеймана

δ, то поведение величин $\left|\dfrac{\partial^{q+1} f}{\partial z_l \partial z_1^{q_1} \dots \partial z_n^{q_n}}(\zeta)\right|$ и $\left|\dfrac{\partial^{q+1} k_\gamma}{\partial z_l \partial z_1^{q_1} \dots \partial z_n^{q_n}}(\zeta)\right| \cdot \delta$ при $R \to 1-$ мало отличается в угловой области

$$\Delta^n(R, \eta) =$$

$$= \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \Delta^n : \ |\arg(1 - \zeta_k e^{-i\gamma_k})| < \eta \ \ \forall k, \ R < ||\zeta|| < 1\},$$

$\eta \in (0; \pi/2)$, для любых чисел $q_k \in \mathbb{N}_0, \ q_1 + \ldots + q_n = q$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} q_k \le \alpha, \text{ при } \alpha \in \mathbb{N} \\ q_k \text{ — любое натуральное, при } \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1}$$

Сначала докажем вспомогательную теорему.

Семейство $\mathcal{U}_\alpha^l$ разобьем на непересекающиеся подклассы $\mathcal{U}_\alpha^l(\delta)$, $\delta \in [1; \infty]$, полагая, что класс $\mathcal{U}_\alpha^l(\delta)$ состоит из всех функций из $\mathcal{U}_\alpha^l$, которым соответствует одно и то же δ — число из теоремы A.

Обозначим $\dot{\mathcal{U}}_\alpha^l(\delta) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial z_l} : \ f \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta) \right\}$.

Теорема 1. *Пусть $g_\delta(z) \in \dot{\mathcal{U}}_\alpha^l(\delta)$ и $g_\delta(z) \to g_1(z)$ равномерно внутри Δ^n при $\delta \to 1+$. Тогда $g_1(z) = \frac{\partial k_\theta}{\partial z_l}(z)$ при некотором $\theta \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. В [2] доказано, что семейство $\dot{\mathcal{U}}_\alpha^l$ компактно в топологии равномерной сходимости внутри Δ^n. Поэтому $g_1 \in \dot{\mathcal{U}}_\alpha^l(\delta_0)$ при некотором $\delta_0 \in [1; \infty]$.

Предположим, что теорема не верна, то есть $g_1(z) \neq \frac{\partial k_\theta}{\partial z_l}(z)$ ни при каком $\theta \in \mathbb{R}^n$. Тогда по теореме A $\delta_0 > 1$.

Зафиксируем $\varepsilon \in \left(0; \frac{\delta_0 - 1}{4}\right)$. По теореме A величина

$$m(r, g_1) \frac{(1+r)^{\alpha n + 1}}{(1-r)^{\alpha n - 1}}$$

не убывает по $r \in (0; 1)$. Следовательно, существует такое $r(\varepsilon) > 0$, что для любого $r \in (r(\varepsilon); 1)$ выполняется неравенство

$$m(r, g_1) \frac{(1+r)^{\alpha n + 1}}{(1-r)^{\alpha n - 1}} > \delta_0 - \varepsilon.$$

Зафиксируем $r_0 \in (r(\varepsilon); 1)$. Так как $g_\delta(z) \to g_1(z)$ равномерно внутри Δ^n при $\delta \to 1+$, то $\forall \delta \in (1; \frac{\delta_0 + 1}{2})$

$$|m(r_0, g_\delta) - m(r_0, g_1)| \, \frac{(1+r_0)^{\alpha n + 1}}{(1-r_0)^{\alpha n - 1}} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$m(r_0, g_\delta)\frac{(1+r_0)^{\alpha n+1}}{(1-r_0)^{\alpha n-1}} > m(r_0, g_1)\frac{(1+r_0)^{\alpha n+1}}{(1-r_0)^{\alpha n-1}} - \varepsilon >$$

$$> \delta_0 - 2\varepsilon > \frac{\delta_0+1}{2} > \delta.$$

Но из неубывания по $r \in (0;1)$ величины $m(r, g_\delta)\dfrac{(1+r)^{\alpha n+1}}{(1-r)^{\alpha n-1}}$ следует, что

$$\delta \geq m(r_0, g_\delta)\frac{(1+r_0)^{\alpha n+1}}{(1-r_0)^{\alpha n-1}}.$$

Полученное противоречие показывает, что

$$g_1(z) = \frac{\partial k_\theta}{\partial z_l}(z)$$

при некотором $\theta \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$, $f(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$, $\delta_0 < \infty$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — н.и.у. функции $f(z)$, которому соответствует число Хеймана $\delta \in [\delta_0; \infty)$.*

Тогда для любых q_k, $k = 1, \ldots, n$, удовлетворяющих условиям (1), $q = q_1 + \ldots + q_n$, и для любого фиксированного $\eta \in (0; \pi/2)$

$$e^{-i\Phi(\zeta)} \cdot \frac{\dfrac{\partial^{q+1} f}{\partial z_l \partial z_1^{q_1} \ldots \partial z_n^{q_n}}(\zeta)}{\dfrac{\partial^{q+1} k_\gamma}{\partial z_l \partial z_1^{q_1} \ldots \partial z_n^{q_n}}(\zeta)} \to \delta$$

при $\Delta^n(R, \eta) \ni \zeta \to e^{i\gamma}$, где

$$\Phi(\zeta) = \arg \frac{\partial f}{\partial z_l}(\rho(\zeta) e^{i\gamma}),$$

$$\rho(\zeta) = \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n),\ \rho_k = \rho_k(\zeta) = \sqrt{\frac{(1-r_0^2)^2}{4r_0^4 c_k^2} - \frac{1}{r_0^2}} - \frac{1}{2c_k}\left(1 - \frac{1}{r_0^2}\right),$$

$$c_k = \mathrm{Re}\{\zeta_k e^{-i\gamma_k}\} - \mathrm{tg}\,\eta |\mathrm{Im}\{\zeta_k e^{-i\gamma_k}\}|,\ k = 1, \ldots, n, \quad r_0 = \sin\eta.$$

Доказательство. Доказательство теоремы для случая $q = 0$ в идейном плане повторяет доказательство аналогичной теоремы 3.1 из [9].

Докажем сначала, что для любого фиксированного $r_0 \in (0;1)$

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}\left(\dfrac{z_1+\rho_1 e^{i\gamma_1}}{1+\rho_1 e^{-i\gamma_1} z_1}, \ldots, \dfrac{z_n+\rho_n e^{i\gamma_n}}{1+\rho_n e^{-i\gamma_n} z_n}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})} -$$

$$-\frac{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}\left(\dfrac{z_1+\rho_1 e^{i\gamma_1}}{1+\rho_1 e^{-i\gamma_1} z_1}, \ldots, \dfrac{z_n+\rho_n e^{i\gamma_n}}{1+\rho_n e^{-i\gamma_n} z_n}\right)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})} \to 0 \qquad (2)$$

равномерно в поликруге $\Delta^n_{r_0} = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| \le r_0\}$ при ρ, стремящемся к I.

В случае $f \in \mathcal{U}^l_\alpha(\infty)$ утверждение (2) очевидно, так как тогда по теореме A функция $\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(z)$ совпадает с $\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(z)$.

Рассмотрим случай $\delta_0 \in (1;\infty)$. Пусть δ — число Хеймана, соответствующее н.и.у. γ; $1 < \delta_0 \le \delta < \infty$. В [12] показано, что γ — н.и.у. функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $\gamma(a) = (\gamma_1(a), \ldots, \gamma_n(a))$ — н.и.у. функции $f(z,a)$, $a \in \Delta^n$, и

$$e^{i\gamma_k(a)} = \frac{e^{i\gamma_k} - a_k}{1 - \bar{a}_k e^{i\gamma_k}}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Пусть $\delta_{\gamma(a)}$ — число Хеймана функции $f(z,a)$, соответствующее н.и.у. $\gamma(a)$. Тогда числа δ и $\delta_{\gamma(a)}$ связаны равенством (см. [12], доказательство теоремы 2):

$$\delta_{\gamma(a)} = \frac{\delta}{\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)\right| (1-|a_l|^2)} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1-|a_k|^2}{|1+\bar{a}_k e^{i\gamma_k}|^2}\right)^{\alpha} \qquad (3)$$

Пусть $a = \rho e^{i\gamma}$, где $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in (0;1)^n$, тогда (3) перепишем в виде

$$\delta_{\gamma(a)} = \delta \cdot \left(\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)\right| \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+\rho_k}{1-\rho_k}\right)^{\alpha} (1-\rho_l^2)\right)^{-1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\rho \to I$, по определению 5 получим, что $\delta_{\gamma(a)} \to 1$ при $\rho \to I$.

В [2] показано, что функции семейства $\dot{\mathcal{U}}^l_\alpha$ равномерно ограничены внутри Δ^n. Тогда по принципу компактности ([13], с. 23) для любой последовательности $\rho^{(N)} = (\rho_1^{(N)}, \dots, \rho_n^{(N)}) \in (0;1)^n$ такой, что $\rho^{(N)} \to I$ при $N \to \infty$, последовательность $\frac{\partial f}{\partial z_l}(z, \rho^{(N)} e^{i\gamma})$ равномерно внутри Δ^n сходится к некоторой аналитической функции. По теореме 1 этой функцией является $\frac{\partial k_\theta}{\partial z_l}(z)$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}^n$.

Докажем, что $\theta = \gamma$. Обозначим

$$R_k^{(N)} = \frac{r_k + \rho_k^{(N)}}{1 + r_k \rho_k^{(N)}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad R^{(N)} = (R_1^{(N)}, \dots, R_n^{(N)}).$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial k_\theta}{\partial z_l}(\mathbf{r} e^{i\gamma}) \right| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial z_l}(\rho^{(N)} e^{i\gamma}, \mathbf{r} e^{i\gamma}) \right| = \lim_{N\to\infty} \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial z_l}(R^{(N)} e^{i\gamma}) \right|}{\left| \frac{\partial f}{\partial z_l}(\rho^{(N)} e^{i\gamma}) \right| \cdot |1 + \rho_l^{(N)} r_l|^2} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[\left| \frac{\partial f}{\partial z_l}(R^{(N)} e^{i\gamma}) \right| \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + R_k^{(N)}}{1 - R_k^{(N)}} \right)^\alpha \left(1 - (R_l^{(N)})^2 \right) \right] \times$$

$$\times \lim_{N\to\infty} \left[\left| \frac{\partial f}{\partial z_l}(\rho^{(N)} e^{i\gamma}) \right| \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + \rho_k^{(N)}}{1 - \rho_k^{(N)}} \right)^\alpha \left(1 - (\rho_l^{(N)})^2 \right) \right]^{-1} \times$$

$$\times \lim_{N\to\infty} \frac{\prod\limits_{k=1}^n \left(\frac{1 + \rho_k^{(N)}}{1 - \rho_k^{(N)}} \right)^\alpha \left(1 - (\rho_l^{(N)})^2 \right)}{\prod\limits_{k=1}^n \left(\frac{1 + R_k^{(N)}}{1 - R_k^{(N)}} \right)^\alpha \left(1 - (R_l^{(N)})^2 \right) |1 + \rho_l^{(N)} r_l|^2}.$$

Так как

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1 - R_k^{(N)}}{1 - \rho_k^{(N)}} = \lim_{N\to\infty} (R_k^{(N)}(\rho_k))' = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - r_k^2}{\left(1 + r_k \rho_k^{(N)}\right)^2} = \frac{1 - r_k}{1 + r_k},$$

то с использованием определения 5 получим, что

$$\left|\frac{\partial k_\theta}{\partial z_l}(\mathbf{r}e^{i\gamma})\right| = \delta\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-r_k}{1+r_k}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+r_l}{1-r_l}\right)\frac{1}{(1+r_l)^2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-r_k}{1+r_k}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-r_l^2}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial k_\theta}{\partial z_l}(\mathbf{r}e^{i\gamma})\right| \to 0$$

при $r_k \to 1-$, $r_j \in \Delta$ $(j \neq k)$ для любого фиксированного $k \in \{1,\ldots,n\}$. А это возможно только в случае $\theta = \gamma$, так как

$$\left|\frac{\partial k_\theta}{\partial z_l}(\mathbf{r}e^{i\gamma})\right| = \frac{|1-r_l e^{-i(\theta_l-\gamma_l)}|^{\alpha-1}}{|1+r_l e^{-i(\theta_l-\gamma_l)}|^{\alpha+1}}\cdot\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\left|\frac{1-r_k e^{-i(\theta_k-\gamma_k)}}{1+r_k e^{-i(\theta_k-\gamma_k)}}\right|^{\alpha}.$$

Так как функции семейства $\dot{\mathcal{U}}^l_\alpha$ равномерно ограничены внутри Δ^n, то, применяя обобщенную теорему Витали (см. [14], с. 710) к функциям $\dfrac{f(z,\rho e^{i\gamma})}{\partial z_l}$, заключаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial z_l}(z,\rho e^{i\gamma}) \underset{\rho\to I}{\longrightarrow} \frac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(z)$$

равномерно внутри Δ^n. В частности, для любого фиксированного $r_0 \in (0;1)$

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}\left(\dfrac{z_1+\rho_1 e^{i\gamma_1}}{1+\rho_1 e^{-i\gamma_1}z_1},\ldots,\dfrac{z_n+\rho_n e^{i\gamma_n}}{1+\rho_n e^{-i\gamma_n}z_n}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})\cdot(1+\rho_l e^{-i\gamma_l}z_l)^2}$$

при $\rho \to I$ стремится к

$$\frac{1}{1-z_l^2 e^{-2i\gamma_l}}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-z_k e^{-i\gamma_k}}{1+z_k e^{-i\gamma_k}}\right)^{\alpha}$$

равномерно в поликруге $\Delta^n_{r_0}$. Таким образом, функции

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}\left(\dfrac{z_1+\rho_1 e^{i\gamma_1}}{1+\rho_1 e^{-i\gamma_1} z_1},\dots,\dfrac{z_n+\rho_n e^{i\gamma_n}}{1+\rho_n e^{-i\gamma_n} z_n}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})} \quad \text{и}$$

$$\frac{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}\left(\dfrac{z_1+\rho_1 e^{i\gamma_1}}{1+\rho_1 e^{-i\gamma_1} z_1},\dots,\dfrac{z_n+\rho_n e^{i\gamma_n}}{1+\rho_n e^{-i\gamma_n} z_n}\right)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-e^{-i\gamma_k}\cdot\dfrac{z_k+\rho_k e^{i\gamma_k}}{1+\rho_k e^{-i\gamma_k} z_k}}{1+e^{-i\gamma_k}\cdot\dfrac{z_k+\rho_k e^{i\gamma_k}}{1+\rho_k e^{-i\gamma_k} z_k}}\right)^{\alpha} \times$$

$$\times\frac{1}{1-\left(\dfrac{z_l+\rho_l e^{i\gamma_l}}{1+\rho_l e^{-i\gamma_l} z_l}\right)^2 e^{-2i\gamma_l}}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\rho_k}{1+\rho_k}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-\rho_l^2}\right]^{-1} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-z_k e^{-i\gamma_k}}{1+z_k e^{-i\gamma_k}}\right)^{\alpha}\cdot\frac{(1+\rho_l e^{-i\gamma_l} z_l)^2}{1-z_l^2 e^{-2i\gamma_l}}$$

равномерно в $\Delta^n_{r_0}$ при $\rho\to I$ сходятся к одной и той же аналитической в Δ^n функции, то есть выполняется утверждение (2).

Функции

$$\zeta_k=\frac{z_k+\rho_k e^{i\gamma_k}}{1+\rho_k e^{-i\gamma_k} z_k},\quad k=1,\dots,n,$$

однолистно отображают круг $\{z_k\in\Delta,\ |z_k|<r_0\}$ на круг с центром $c_k(\rho_k)=e^{i\gamma_k}\rho_k\dfrac{1-r_0^2}{1-\rho_k^2 r_0^2}$ и радиусом $r_k(\rho_k)=\dfrac{r_0(1-\rho_k^2)}{1-\rho_k^2 r_0^2}$. Следовательно,

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\zeta)}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}-\frac{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\zeta)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}\xrightarrow[\rho\to I]{}0 \qquad (4)$$

равномерно в поликруге

$$K_\rho(r_0)=\{\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\in\Delta^n:\ |\zeta_k-c_k(\rho_k)|<r_k(\rho_k),\ k=1,\dots,n\}.$$

Так как

$$\lim_{\rho\to 1-}\frac{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\zeta)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}\neq 0,$$

то (4) эквивалентно тому, что

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\zeta)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\zeta)}\cdot\frac{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}\xrightarrow[\rho\to I]{}1$$

равномерно в $K_\rho(r_0)$.

Обозначив $\Phi(\zeta)=\arg\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})$ и учитывая, что $\arg\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})=0$ и

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\zeta)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\zeta)}\cdot\frac{\left|\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})\right|\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\rho_k}{1-\rho_k}\right)^{\alpha}(1-\rho_l^2)}{e^{i\Phi(\zeta)}\left|\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})\right|\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\rho_k}{1-\rho_k}\right)^{\alpha}(1-\rho_l^2)}\xrightarrow[\rho\to I]{}1,$$

по определению 5, получим, что

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\zeta)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\zeta)}\,e^{-i\Phi(\zeta)}\xrightarrow[\rho\to I]{}\delta$$

равномерно в $K_\rho(r_0)$. То есть для любого $\varepsilon>0$ существует $M\in(0,1)$ такое, что условие $\rho:||\rho||\in(M,1)$ влечет выполнение неравенства

$$\left|\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\zeta)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\zeta)}e^{-i\Phi(\zeta)}-\delta\right|<\varepsilon,\quad\forall\zeta\in K_\rho(r_0).\tag{5}$$

Пусть $2\beta_k$ — величина угла с вершиной в точке $e^{i\gamma_k}$ и сторонами, касающимися круга $\{\zeta_k\in\mathbb{C}:\ |\zeta_k-c_k(\rho_k)|\leq r_k(\rho_k)\}$. Тогда

$$\sin\beta_k=\frac{r_k(\rho_k)}{1-|c_k(\rho_k)|}=\frac{r_0(1-\rho_k^2)}{1-\rho_k^2r_0^2-\rho_k+\rho_kr_0^2}=\frac{r_0(1+\rho_k)}{1+\rho_kr_0^2}=\psi(\rho_k),$$

Функция $\psi(\rho_k)$ возрастает с ростом ρ_k. Поэтому совокупность поликругов $K_\rho(r_0)$ заполняет некоторую подобласть Δ^n, содержащую $\Delta^n(R,\eta)$ при некоторых R и η. В качестве η можно взять $\arcsin r_0$, т. к. $\psi(\rho_k)$ возрастает. То есть η можно брать сколь угодно близким к $\pi/2$, если r_0 достаточно близко к 1. Таким образом, (5) выполнено в $\Delta^n(R,\eta)$, где η можно считать любым заданным числом из $(0,\pi/2)$, R зависит от ε. При этом каждому $\zeta\in\Delta^n(R,\eta)$ соответствует некоторое $\Phi=\Phi(\zeta)$ (не единственное, поскольку ζ принадлежит многим $K_\rho(r_0)$), где ρ такое, что $\zeta\in K_\rho(r_0)$. Следовательно, для $\zeta\in\Delta^n(R,\eta)$ можем выбрать $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_n)$, такое, что для каждого $k=1,\dots,n$ точка ζ_k будет лежать на радиусе круга $\{u\in\mathbb{C}:\ |u-c_k(\rho_k)|\le r_k(\rho_k)\}$, ортогональном одной из сторон угловой области $\{u\in\mathbb{C}:\ |\arg(1-ue^{-i\gamma_k})|<\eta\}$. Тогда

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)=\frac{\operatorname{Im}[(\zeta_k-c_k(\rho_k))e^{-i\gamma_k}]}{|(\zeta_k-c_k(\rho_k))e^{-i\gamma_k}|}.$$

Будем предполагать, что $\operatorname{Im}(\zeta_k e^{-i\gamma_k})\ne 0$. В противном случае ζ_k попадает на радиус круга $\{u\in\mathbb{C}:\ |u-c_k(\rho_k)|\le r_k(\rho_k)\}$, ортогональный $\partial\Delta$ в точке $e^{i\gamma_k}$. В этой ситуации будем полагать, что ζ_k совпадает с центром $c_k(\rho_k)$ круга $\{u\in\mathbb{C}:\ |u-c_k(\rho_k)|\le r_k(\rho_k)\}$. Поэтому

$$\frac{1}{\cos^2\eta}=\left(\frac{\operatorname{Re}(\zeta_k e^{-i\gamma_k})-|c_k(\rho_k)|}{\operatorname{Im}(\zeta_k e^{-i\gamma_k})}\right)^2+1.$$

То есть

$$\operatorname{tg}\,\eta=\frac{\operatorname{Re}(\zeta_k e^{-i\gamma_k})-|c_k(\rho_k)|}{|\operatorname{Im}(\zeta_k e^{-i\gamma_k})|}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow |c_k|=|c_k(\rho_k)|=\operatorname{Re}(\zeta_k e^{-i\gamma_k})-\operatorname{tg}\,\eta|\operatorname{Im}(\zeta_k e^{-i\gamma_k})|.$$

Так как $|c_k(\rho_k)|=\rho_k\dfrac{1-r_0^2}{1-\rho_k^2 r_0^2}$, то $\rho_k^2 r_0^2|c_k(\rho_k)|+\rho_k(1-r_0^2)-|c_k(\rho_k)|=0$ и

$$\rho_k=\rho_k(\zeta_k)=\sqrt{\frac{(1-r_0^2)^2}{4r_0^4|c_k|^2}-\frac{1}{r_0^2}}+\frac{1}{2|c_k|}\left(1-\frac{1}{r_0^2}\right),$$

где $r_0=\sin\eta$. Теорема для $q=0$ доказана.

Перейдем к доказательству теоремы для $q\ge 1$. Будем дифференцировать (2) по переменным z_k $(k=1,\dots,n)$ q_k раз соответственно $(q=q_1+\ldots+q_n)$, причем каждый раз после дифференцирования полученный результат будем умножать на $(1+z_k\rho_k e^{-i\gamma_k})^2$, где k — индекс переменной z_k, по которой производится дифференцирование. Тогда по теореме Вейерштрасса (см. [15], с. 34) получим, что

$$\frac{\dfrac{\partial^{q+1} f}{\partial z_l \partial z_1^{q_1}\dots\partial z_n^{q_n}}\left(\dfrac{z_1+\rho_1 e^{i\gamma_1}}{1+\rho_1 e^{-i\gamma_1} z_1},\dots,\dfrac{z_n+\rho_n e^{i\gamma_n}}{1+\rho_n e^{-i\gamma_n} z_n}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}\cdot\prod_{k=1}^{n}(1-\rho_k^2)^{q_k}-$$

$$-\frac{\dfrac{\partial^{q+1} k_\gamma}{\partial z_l \partial z_1^{q_1}\dots\partial z_n^{q_n}}\left(\dfrac{z_1+\rho_1 e^{i\gamma_1}}{1+\rho_1 e^{-i\gamma_1} z_1},\dots,\dfrac{z_n+\rho_n e^{i\gamma_n}}{1+\rho_n e^{-i\gamma_n} z_n}\right)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}\cdot\prod_{k=1}^{n}(1-\rho_k^2)^{q_k}$$

стремится к нулю при $\rho\to I$ равномерно в $\Delta^n_{r_0}$.

Так как

$$\frac{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}\left(\dfrac{z_1+\rho_1 e^{i\gamma_1}}{1+\rho_1 e^{-i\gamma_1} z_1},\dots,\dfrac{z_n+\rho_n e^{i\gamma_n}}{1+\rho_n e^{-i\gamma_n} z_n}\right)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}\xrightarrow[\rho\to I]{}$$

$$\xrightarrow[\rho\to I]{}\left(\frac{1-z_l e^{-i\gamma_l}}{1+z_l e^{-i\gamma_l}}\right)^{\alpha-1}\prod_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{n}\left(\frac{1-z_k e^{-i\gamma_k}}{1+z_k e^{-i\gamma_k}}\right)^{\alpha}$$

равномерно внутри Δ^n, то

$$\frac{\dfrac{\partial^{q+1} k_\gamma}{\partial z_l \partial z_1^{q_1}\dots\partial z_n^{q_n}}\left(\dfrac{z_1+\rho_1 e^{i\gamma_1}}{1+\rho_1 e^{-i\gamma_1} z_1},\dots,\dfrac{z_n+\rho_n e^{i\gamma_n}}{1+\rho_n e^{-i\gamma_n} z_n}\right)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}\cdot\prod_{k=1}^{n}(1-\rho_k^2)^{q_k}\xrightarrow[\rho\to I]{}$$

$$\xrightarrow[\rho\to I]{}(-2)^q e^{-i(\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k q_k)}\cdot\left(\frac{1+z_l e^{-i\gamma_l}}{1-z_l e^{-i\gamma_l}}\right)\cdot\frac{(\alpha-q_l)}{\alpha}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-q_k+1)\left(\frac{1-z_k e^{-i\gamma_k}}{1+z_k e^{-i\gamma_k}}\right)^{\alpha-q_k}\right]$$

равномерно внутри Δ^n, а, следовательно, и равномерно в $\Delta^n_{r_0}$. Поэтому функция

$$\frac{\dfrac{\partial^{q+1}k_\gamma}{\partial z_l \partial z_1^{q_1}\ldots\partial z_n^{q_n}}\left(\dfrac{z_1+\rho_1 e^{i\gamma_1}}{1+\rho_1 e^{-i\gamma_1}z_1},\ldots,\dfrac{z_n+\rho_n e^{i\gamma_n}}{1+\rho_n e^{-i\gamma_n}z_n}\right)}{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}\cdot\prod_{k=1}^n(1-\rho_k^2)^{q_k}$$

отделена от нуля в $\Delta^n_{r_0}$ при $\rho\to I$ для всех $q_k,\ k=1,\ldots,n$, удовлетворяющих условиям (1). Значит, для указанных $q_k,\ k=1,\ldots,n$,

$$\frac{\dfrac{\partial^{q+1}f}{\partial z_l \partial z_1^{q_1}\ldots\partial z_n^{q_n}}(\zeta)}{\dfrac{\partial^{q+1}k_\gamma}{\partial z_l \partial z_1^{q_1}\ldots\partial z_n^{q_n}}(\zeta)}\cdot\frac{\dfrac{\partial k_\gamma}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})}\xrightarrow[\rho\to I]{}1 \tag{6}$$

равномерно в $K_\rho(r_0)$. Далее, как в случае $q=0$, из (6) получим, что

$$e^{-i\Phi(\zeta)}\cdot\frac{\dfrac{\partial^{q+1}f}{\partial z_l \partial z_1^{q_1}\ldots\partial z_n^{q_n}}(\zeta)}{\dfrac{\partial^{q+1}k_\gamma}{\partial z_l \partial z_1^{q_1}\ldots\partial z_n^{q_n}}(\zeta)}\to\delta$$

равномерно в $\Delta^n(R,\eta)$ при $R\to 1-$. $\square$

§ 3. Теорема регулярности убывания для производных высших порядков

Следующая теорема является аналогом теоремы А для частных производных любого порядка.

Теорема 3. *Пусть $f\in\mathcal{U}^l_\alpha$, γ — н.и.у. функции f, δ — число Хеймана, соответствующее этому н.и.у. Тогда для любых $q_k\in\mathbb{N}_0$, $k=1,\ldots,n$, удовлетворяющих условиям (1), $q_1+\ldots+q_n=q$, существует*

$$\lim_{\mathbf{r}\to I}\left|\frac{\partial^{q+1}f}{\partial z_l \partial z_1^{q_1}\ldots\partial z_n^{q_n}}(\mathbf{r}e^{i\gamma})\right|\frac{(1-r_l)}{\prod\limits_{k=1}^n(1-r_k)^{\alpha-q_k}}=$$

$$=\frac{\delta|\alpha-q_l|}{2^{\alpha n+1}\alpha}\prod_{k=1}^n|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-q_k+1)|^{\operatorname{sign}q_k}.$$

Доказательство. Вычислим предел

$$\lim_{\Delta^n \ni z \to I} \left[\frac{\partial^{q+1} k_{\mathbb{O}}(z)}{\partial z_l \partial z_1^{q_1} \dots \partial z_n^{q_n}} \cdot \frac{(1-z_l)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1-z_k)^{\alpha - q_k}} \right]. \tag{7}$$

Поскольку

$$\frac{\partial^{q+1} k_{\mathbb{O}}}{\partial z_l \partial z_1^{q_1} \dots \partial z_n^{q_n}}(z) = \frac{\partial^{q_l}}{\partial z_l^{q_l}} \left(\frac{(1-z_l)^{\alpha-1}}{(1+z_l)^{\alpha+1}} \right) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} \frac{\partial^{q_k}}{\partial z_k^{q_k}} \left(\frac{1-z_k}{1+z_k} \right)^{\alpha}$$

и для $q_k \geq 1,\ k = 1, \dots, n$, при $z_l \to 1-$

$$\frac{\partial^{q_l}}{\partial z_l^{q_l}} \left[(1-z_l)^{\alpha-1} \cdot (1+z_l)^{-\alpha-1} \right] =$$

$$= (-1)^{q_l} [(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-q_l)]^{\operatorname{sign} q_l} \cdot \frac{(1-z_l)^{\alpha-q_l-1}}{(1+z_l)^{\alpha+1}} (1 + o(1-z_l))$$

и

$$\frac{\partial^{q_k}}{\partial z_k^{q_k}} \left[(1-z_k)^{\alpha} \cdot (1+z_k)^{-\alpha} \right] =$$

$$= (-1)^{q_k} [\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-q_k+1)]^{\operatorname{sign} q_k} \cdot \frac{(1-z_k)^{\alpha-q_k}}{(1+z_k)^{\alpha}} (1 + o(1-z_k)),$$

то искомый предел (7) будет равен

$$\frac{(-1)^{q_l} [(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-q_l)]^{\operatorname{sign} q_l}}{2^{\alpha+1}} \times$$

$$\times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} \frac{(-1)^{q_k} [\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-q_k+1)]^{\operatorname{sign} q_k}}{2^{\alpha}} =$$

$$= \frac{(-1)^q (\alpha - q_l)}{2^{\alpha n+1} \alpha} \cdot \prod_{k=1}^{n} [\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-q_k+1)]^{\operatorname{sign} q_k}.$$

В частности,

$$\lim_{\mathbf{r}\to I}\left[\frac{\partial^{q+1}k_{\mathbb{O}}(\mathbf{r})}{\partial z_l\partial z_1^{q_1}\dots\partial z_n^{q_n}}\cdot\frac{(1-r_l)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-r_k)^{\alpha-q_k}}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^q(\alpha-q_l)}{2^{\alpha n+1}\alpha}\cdot\prod_{k=1}^{n}[\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-q_k+1)]^{\operatorname{sign}q_k}.$$

По теореме 2 для любых $q_k,\ k=1,\dots,n$, удовлетворяющих условиям (1), $q_1+\ldots+q_n=q$,

$$\left|\frac{\dfrac{\partial^{q+1}f}{\partial z_l\partial z_1^{q_1}\dots\partial z_n^{q_n}}(\mathbf{r}e^{i\gamma})}{\dfrac{\partial^{q+1}k_\gamma}{\partial z_l\partial z_1^{q_1}\dots\partial z_n^{q_n}}(\mathbf{r}e^{i\gamma})}\right|\xrightarrow[\mathbf{r}\to I]{}\delta,$$

что эквивалентно тому, что

$$\left|\frac{\dfrac{\partial^{q+1}f}{\partial z_l\partial z_1^{q_1}\dots\partial z_n^{q_n}}(\mathbf{r}e^{i\gamma})}{\dfrac{\partial^{q+1}k_{\mathbb{O}}}{\partial z_l\partial z_1^{q_1}\dots\partial z_n^{q_n}}(\mathbf{r})}\right|\xrightarrow[\mathbf{r}\to I]{}\delta.$$

Следовательно, для указанных $q_k,\ k=1,\dots,n$, получим, что

$$\lim_{\mathbf{r}\to I}\left|\frac{\partial^{q+1}f}{\partial z_l\partial z_1^{q_1}\dots\partial z_n^{q_n}}(\mathbf{r}e^{i\gamma})\right|\frac{(1-r_l)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-r_k)^{\alpha-q_k}}=$$

$$=\frac{\delta|\alpha-q_l|}{2^{\alpha n+1}\alpha}\prod_{k=1}^{n}|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-q_j+1)|^{\operatorname{sign}q_k}.$$

Теорема доказана. □

§ 4. Аналог теоремы регулярности для функций Блоха

Определение 7. *Аналитическая в поликруге Δ^n функция g называется функцией Блоха, если*

$$\max_{k=1,\dots,n}\sup_{z\in\Delta^n}\left|(1-|z_k|^2)\frac{\partial g}{\partial z_k}(z)\right|<\infty.$$

Множество $\mathcal{B}$ всех функций Блоха называется классом Блоха.

Интерес к этому классу в данной работе вызван существованием связи между функциями этого класса и функциями из линейно-инвариантных семейств.

Теорема B [2]. *Пусть $l \in \{1, \dots, n\}$ фиксировано. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $g \in \mathcal{B}$;

(ii) существует функция $f \in \bigcup\limits_{\alpha<\infty} \mathcal{U}^l_\alpha$ *такая, что*

$$g(z) - g(\mathbb{O}) = \log \frac{\partial f}{\partial z_l}(z).$$

Используя эту взаимосвязь, получим аналог теоремы регулярности для класса $\mathcal{B}$.

Теорема 4. *Пусть $g \in \mathcal{B}$,*

$$\alpha = \operatorname{ord} \int\limits_0^{z_l} \exp\{g(z_1, \dots, z_{l-1}, t, z_{l+1}, \dots, z_n) - g(\mathbb{O})\}\, dt.$$

Тогда

1) существует такие $\delta \in [0; \infty]$ и $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$, что

$$\delta = \lim_{r \to 1-} \left[m(r, g(z) - g(\mathbb{O}) + \alpha n \log \frac{1+r}{1-r} + \log(1 - r^2) \right] =$$

$$= \lim_{\mathbf{r} \to I} \left[\min_\theta \operatorname{Re}\{g(\mathbf{r}e^{i\theta}) - g(\mathbb{O})\} + \alpha \sum_{k=1}^n \log \frac{1 - r_k}{1 + r_k} + \log(1 - r_l^2) \right] =$$

$$= \lim_{\mathbf{r} \to I} \left[\operatorname{Re}\{g(\mathbf{r}e^{i\theta_0}) - g(\mathbb{O})\} + \alpha \sum_{k=1}^n \log \frac{1 - r_k}{1 + r_k} + \log(1 - r_l^2) \right],$$

2) величина, стоящая под знаком первого предела, не убывает по $r \in (0; 1)$; величины, стоящие под знаками второго и третьего пределов, не убывают по каждому $r_k \in (0; 1)$, $k = 1, \dots, n$;

3) $\delta = 0 \iff g(z) = g(\mathbb{O}) + \alpha \sum\limits_{k=1}^n \log \dfrac{1 - z_k e^{-i\theta_k}}{1 + z_k e^{i\theta_k}} - \log(1 - z_l^2 e^{-2i\theta_l}).$

Доказательство. Пусть $g \in \mathcal{B}$. Тогда по теореме B существует функция $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$ такая, что

$$f(z) = \int_0^{z_l} \exp\{g(z_1, \ldots, z_{l-1}, t, z_{l+1}, \ldots, z_n) - g(\mathbb{O})\}\, dt,$$

константа α определяется равенством

$$\alpha = \operatorname{ord} \int_0^{z_l} \exp\{g(z_1, \ldots, z_{l-1}, t, z_{l+1}, \ldots, z_n) - g(\mathbb{O})\}\, dt.$$

Учитывая, что

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(z)\right| \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+r_k}{1-r_k}\right)^{\alpha} (1-r_l^2) =$$

$$= |\exp(g(z) - g(\mathbb{O}))| \cdot \exp\left(\log\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-r_k}{1+r_k}\right)^{\alpha}(1-r_l^2)\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\operatorname{Re}\{g(z) - g(\mathbb{O})\} + \alpha \sum_{k=1}^{n} \log\frac{1-r_k}{1+r_k} + \log(1-r_l^2)\right)$$

и

$$m\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1+r)^{\alpha n+1}}{(1-r)^{\alpha n-1}} =$$

$$= \exp\left(m(r, \operatorname{Re}\{g(z) - g(\mathbb{O})\}) + \alpha n \log\frac{1-r}{1+r} + \log(1-r^2)\right),$$

а также используя факт неубывания по $x \in \mathbb{R}$ функции $\exp x$, из первого пункта теоремы A получим, что величины

$$\operatorname{Re}\{g(z) - g(\mathbb{O})\} + \alpha \sum_{k=1}^{n} \log\frac{1-r_k}{1+r_k} + \log(1-r_l^2),$$

$$\min_{\theta} \operatorname{Re}\{g(z) - g(\mathbb{O})\} + \alpha \sum_{k=1}^{n} \log\frac{1-r_k}{1+r_k} + \log(1-r_l^2)$$

не убывают по каждому $r_k \in (0;1)$, $k = 1, \ldots, n$, а величина

$$m(r, \operatorname{Re}\{g(z) - g(\mathbb{O})\}) + \alpha n \log \frac{1-r}{1+r} + \log(1 - r^2)$$

не убывает по $r \in (0;1)$.

Из второго и третьего пунктов теоремы A будет следовать, что существуют такие $\delta_0 \in [1;\infty]$ и $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$, что

$$\delta_0 = \lim_{r \to 1-} \exp\left(m(r, \operatorname{Re}\{g(z) - g(\mathbb{O})\}) + \alpha n \log \frac{1+r}{1-r} + \log(1 - r^2) \right) =$$

$$= \lim_{\mathbf{r} \to I} \exp\left(\min_{\theta} \operatorname{Re}\{g(\mathbf{r}e^{i\theta}) - g(\mathbb{O})\} + \alpha \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1-r_k}{1+r_k} + \log(1 - r_l^2) \right) =$$

$$= \lim_{\mathbf{r} \to I} \exp\left(\operatorname{Re}\{g(\mathbf{r}e^{i\theta_0}) - g(\mathbb{O})\} + \alpha \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1-r_k}{1+r_k} + \log(1 - r_l^2) \right),$$

причем, $\delta_0 = 1$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = -\frac{e^{i\theta_l}}{2\alpha} \left[\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - z_k e^{-i\theta_k}}{1 + z_k e^{-i\theta_k}} \right)^{\alpha} - 1 \right] + Q(z_1, \ldots, z_{l-1}, z_{l+1}, \ldots, z_n),$$

где Q — некоторая аналитическая в Δ^{n-1} функция. Откуда заключаем, что существует такое $\delta \in [0;\infty]$, что

$$\delta = \lim_{r \to 1-} \left[m(r, \operatorname{Re}\{g(z) - g(\mathbb{O})\}) + \alpha n \log \frac{1+r}{1-r} + \log(1 - r^2) \right] =$$

$$= \lim_{\mathbf{r} \to I} \left[\min_{\theta} \operatorname{Re}\{g(\mathbf{r}e^{i\theta}) - g(\mathbb{O})\} + \alpha \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1-r_k}{1+r_k} + \log(1 - r_l^2) \right] =$$

$$= \lim_{\mathbf{r} \to I} \left[\operatorname{Re}\{g(\mathbf{r}e^{i\theta_0}) - g(\mathbb{O})\} + \alpha \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1-r_k}{1+r_k} + \log(1 - r_l^2) \right],$$

при этом

$$\delta = 0 \iff g(z) = g(\mathbb{O}) + \alpha \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1 - z_k e^{-i\theta_k}}{1 + z_k e^{i\theta_k}} - \log(1 - z_l^2 e^{-2i\theta_l}).$$

Теорема доказана. $\square$

Résumé

In this paper we investigate some boundary properties of derivatives of functions from linearly invariant families in the polydisk. In particular, we analyze angular behaviour of a such functions and apply the relationship between linearly invariant families and Bloch class.

Список литературы

[1] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.I* / Ch. Pommerenke. // Math. Ann. 155 (1964). P. 108–154.

[2] Godula J. *Linearly invariant families of holomorphic functions in the unit polydisk* / J. Godula, V. V. Starkov // Generalizations of Complex Analysis. Banach Center Publ. 37 (1996). P. 115–127.

[3] Krzyż J. *On the maximum modulus of univalent functions* / J. Krzyż // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. CI (1955). No 3. P. 203–206.

[4] Хейман В. К. *Многолистные функции* / В. К. Хейман. М.: Иностранная литература, 1960.

[5] Bieberbach L. *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*/ L. Bieberbach // S. B. Preuss. Acad. Wiss. 138 (1916). P. 940–955.

[6] Campbell D. M. *Locally univalent functions with locally univalent derivatives* / D. M. Campbell // Trans. Amer. Math. Soc. 162 (1971). P. 395–409.

[7] Старков В. В. *Теорема регулярности для универсальных линейно-инвариантных семейств функций* / В. В. Старков // Сердика. 11(1985). P. 299–318.

[8] Годуля Я. *Теорема регулярности для линейно-инвариантных семейств функций в поликруге*/ Я. Годуля, В. В. Старков // Известия ВУЗов. Сер. Математика. 8 (1995). С. 21–33.

[9] Godula J. *On regularity theorems for linearly invariant families of analytic functions in the unit polydisk* / J. Godula, V. V. Starkov // Computational Methods and Function Theory. 1997. P. 241–257.

[10] Godula J. *On regularity theorems for linearly invariant families of analytic functions in the unit polydisk, II* / J. Godula, V. V. Starkov // Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A. LII.1,3 (1997). P. 15–24.

[11] Ганенкова Е. Г. *Теорема регулярности убывания в линейно-инвариантных семействах функций* / Е. Г. Ганенкова // Известия ВУЗов. Сер. Математика. № 2(537) (2007). С. 75–78.

[12] Ганенкова Е. Г. *Теорема регулярности убывания для аналитических в поликруге функций* / Е. Г. Ганенкова // Труды ПетрГУ. Сер. Математика. 14 (2007). С. 14–30.

[13] Ганнинг Р. *Аналитические функции многих комплексных переменных* / Р. Ганнинг, Х. Росси. М.: Мир, 1969.

[14] *Математическая энциклопедия* / Гл. ред. И. М. Виноградов: В 5 т. Т. 1. М.: Советская энциклопедия, 1977.

[15] Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ: В 2 ч.* Ч. 2 / Б. В. Шабат. М.: Наука, 1976.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: g_ek@inbox.ru