Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 16, 2009

УДК 517.518

С. С. Платонов, Е. Н. Сыромолотов

О ПРОДОЛЖЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА ДАНКЛЯ

В работе рассматривается задача продолжения обобщенных сдвигов Данкля на некоторые весовые функциональные банаховы пространства. Основным результатом статьи является доказательство того, что операторы обобщенного сдвига Данкля могут быть продолжены до линейных ограниченных операторов в этих пространствах.

Во многих задачах гармонического анализа на действительной прямой $\mathbb{R}$ важную роль играют операторы сдвига $f(x) \mapsto f(x+h)$, $x, h \in \mathbb{R}$. Операторы сдвига обладают многими замечательными свойствами, так, например, они образуют однопараметрическую группу изометрий для банаховых пространств $L_p(\mathbb{R})$, преобразование Фурье представляет собой разложение по собственным функциям операторов сдвига, через операторы сдвига определяется свертка функций и т. д. В современной математике существует много различных аналогов операторов сдвига (см., например, [1–5]). В последнее время широкое распространение приобрел новый класс обобщенных сдвигов — обобщенные сдвиги Данкля. Обобщенные сдвиги Данкля строятся по некоторым дифференциально-разностным операторам (операторам Данкля). На основе операторов Данкля можно построить обобщенный гармонический анализ (гармонический анализ Фурье — Данкля), который включает в себя интегральные преобразования Данкля и обобщенные свертки. Многие задачи классического гармонического анализа имеют естественные аналоги в гармоническом анализе Фурье — Данкля (см., например, [6–11]).

Изначально действие операторов обобщенного сдвига Данкля определено для бесконечно дифференцируемых функций, но для многих задач требуется расширить действие операторов обобщенного сдвига Данкля на другие классы функций. В настоящей работе рассматривается задача продолжения обобщенных сдвигов Данкля на некоторые весовые банаховы функциональные пространства $L_{p,\alpha}$. Основным результатом статьи является доказательство того, что операторы обобщенного сдвига Данкля могут быть продолжены до линейных ограниченных операторов в этих пространствах.

Введем необходимые для дальнейшего функциональные пространства. Если не оговорено противное, то все функции предполагаются комплекснозначными и определенными на $\mathbb{R}$.

Пусть C — множество всех непрерывных функций, $C^{(k)}$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций, $\mathcal{E} = C^{(\infty)}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций, $\mathcal{D}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, C_c — множество непрерывных функций с компактным носителем. Множества C, $C^{(k)}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, C_c являются топологическими векторными пространствами с обычными топологиями (см., например, [12]).

Для любого $1 \le p < \infty$ через $L_{p,\alpha}$ обозначим банахово пространство, состоящее из измеримых функций $f(t)$ на $\mathbb{R}$ (функция рассматривается с точностью до значений на множестве меры нуль), для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int |f(x)|^p \, |x|^{2\alpha+1} dx \right)^{1/p}.$$

Здесь и далее, если не указаны пределы интегрирования, то интегралы берутся по всей числовой прямой.

При $p = \infty$ обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(x)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$. Норма в пространстве $L_{\infty,\alpha}$ определяется по формуле

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \|f\|_{\infty} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Оператором Данкля называется следующий дифференциально-разностный оператор D:

$$Df(x) = \frac{df}{dx}(x) + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \frac{f(x) - f(-x)}{x}. \qquad (1)$$

Действия оператора D определено для всех функций $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$. Всюду далее α — фиксированное действительное число, удовлетворяющее условию $\alpha > -1/2$.

Для любой функции $f(x) \in \mathcal{E}$ рассмотрим следующую задачу Коши:

$$D_x u(x,y) = D_y u(x,y); \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \tag{3}$$

где D_x и D_y — операторы Данкля, применяемые по переменным x и y соответственно. Известно (см. [8, Proposition 2.7(iii)]), что для любой функции $f(x) \in \mathcal{E}$ существует единственная функция $u(x,y) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, которая является решением задачи Коши (2)–(3). Оператор обобщенного сдвига Данкля T^y, $y \in \mathbb{R}$, определяется равенством:

$$f(x) \to T^y f(x) := u(x,y).$$

В предельном случае, при $\alpha \to -1/2$, обобщенный сдвиг Данкля переходит в обычный сдвиг $f(x) \to f(x+y)$.

Теорема 1.

1) *При любом $y \in \mathbb{R}$ оператор T^y является линейным непрерывным оператором из пространства $\mathcal{E}$ в себя.*
2) *Для любой функции $f \in \mathcal{E}$ отображение $y \to T^y f$ является непрерывным (и даже бесконечно дифференцируемым) отображением из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{E}$.*
3) *Оператор T^y допускает следующее интегральное представление:*

$$T^y f(x) = C \left(\int_0^\pi f_e\left(G(x,y,\varphi)\right)\, h^e(x,y,\varphi)(\sin\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi + \int_0^\pi f_o\left(G(x,y,\varphi)\right) h^o(x,y,\varphi)(\sin\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi \right), \tag{4}$$

где

$$C = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(1/2)}, \quad G(x,y,\varphi) = \sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi},$$

$$h^e(x,y,\varphi) = 1 - \operatorname{sign}(xy)\cos\varphi,$$

$$h^o(x,y,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)(1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)}{\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi}} & \text{при } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{при } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$f_e(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)), \qquad f_o(x) = \frac{1}{2}(f(x)-f(-x)).$$

4) *Если* $f \in \mathcal{D}$ *и* $\operatorname{supp} f \subset [-a,a]$ ($\operatorname{supp} f$ *— носитель функции* f), *то* $T^y \in \mathcal{D}$ *и* $\operatorname{supp}(T^y f) \subset [-a-|y|, a+|y|]$.

5) *Оператор Данкля* $D = D_x$ *коммутирует с оператором* T^y, *то есть*

$$D_x(T^y f(x)) = T^y(D_x f(x)), \quad f(x) \in \mathcal{E}.$$

Доказательство. См. [8, Proposition 2.7]. Доказательство интегрального представления (4) см. в работе [13]. □

Для многих задач гармонического анализа требуется расширить действие оператора T^y на другие функциональные пространства, отличные от $\mathcal{E}$. Для непрерывных функций f действие оператора T^y определим прямо по формуле (4). Далее будет показано, что оператор T^y переводит пространство C в себя и является непрерывным оператором в этом пространстве. Основной целью работы является построение продолжения оператора T^y на пространства $L_{p,\alpha}$.

Теорема 2. *Для любого* $p \in [1,+\infty]$ *и для любого* $y \in \mathbb{R}$ *в банаховом пространстве* $L_{p,\alpha}$ *существует единственный линейный ограниченный оператор* $\widetilde{T}^y : L_{p,\alpha} \to L_{p,\alpha}$, *который удовлетворяет условию*

$$\widetilde{T}^y f = T^y f \qquad \forall f \in L_{p,\alpha} \cap \mathcal{E},$$

т. е. оператор $\widetilde{T}^y$ *является продолжением оператора* T^y.

Доказательство теоремы 2 является основной целью статьи. Доказательство будет проводиться отдельно для случаев $p \in [2,+\infty)$, $p \in (1,2)$, $p = 1$ и $p = +\infty$.

Одним из основных элементов доказательства является следующая классическая теорема о продолжении линейных операторов.

Теорема 3. *Пусть* X *— нормированное пространство,* E *— всюду плотное в* X *линейное подмножество.* $A : E \to Y$ *— линейный ограниченный оператор, заданный на* E, *со значениями в банаховом пространстве* Y. *Тогда оператор* A *допускает единственное продолжение на все* X *и притом с сохранением нормы.*

Доказательство. См. [14, теорема 8.4.1]. □

Лемма 1. *Пусть $f_e(x)$ — непрерывная четная функция из и $f_o(x)$ — непрерывная нечетная функция из, тогда для $2 \le p < +\infty$ справедливы неравенства:*

$$|T^y f_e(x)|^p \le 2^{p-1} T^y |f_e(x)|^p, \tag{5}$$
$$|T^y f_o(x)|^p \le 2^{p-1} T^y |f_o(x)|^p. \tag{6}$$

Доказательство. Введем на отрезке $[0, \pi]$ меру $dm(\varphi) = C(\sin\varphi)^{2\alpha} d\varphi$, где C — коэффициент из формулы (4). Тогда $\int_0^\pi dm(\varphi) = 1$.

Заметим, что $0 \le h^e(x, y, \varphi) \le 2$, поэтому

$$0 \le |h^e(x, y, \varphi)|^p \le 2^p.$$

Используя формулу (4) и неравенство Гельдера (число q определяется из соотношения $1/p + 1/q = 1$) получим, что

$$|T^y f_e(x)| = \left| \int_0^\pi f_e(G(x, y, \varphi)) \cdot h^e(x, y, \varphi) \cdot 1\, dm(\varphi) \right| \le$$
$$\le \left(\int_0^\pi |f_e(G(x, y, \varphi))|^p \, |h^e(x, y, \varphi)|^p \, dm(\varphi) \right)^{1/p} \left(\int_0^\pi 1^q \, dm(\varphi) \right)^{1/q} \le$$
$$\le \left(2^{p-1} \int_0^\pi |f_e(G(x, y, \varphi))|^p \cdot h^e(x, y, \varphi) \, dm(\varphi) \right)^{1/p} = \left(2^{p-1} T^y |f_e(x)|^p \right)^{1/p},$$

откуда следует неравенство (5).

Докажем неравенство (6). Используя неравенство Гельдера, получим, что

$$|T^y f_o(x)| = \left| \int_0^\pi f_o\left(G(x, y, \varphi)\right) \cdot h^o(x, y, \varphi) \cdot 1 dm(\varphi) \right| \le$$
$$\le \left(\int_0^\pi |f_o\left(G(x, y, \varphi)\right)|^p \, |h^o(x, y, \varphi)|^p \, dm(\varphi) \right)^{1/p}. \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что справедливо неравенство

$$\frac{(x+y)^2(1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)}{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi} \leq 2. \tag{8}$$

Из неравенства (7) следует, что

$$\frac{|x+y|^p(1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)^{p-1}}{(x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi)^{p/2}} =$$

$$= \left(\frac{(x+y)^2(1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)}{(x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi)}\right)^{p/2}(1-\operatorname{sign}(xy))^{p/2-1} \leq 2^{p/2}\cdot 2^{p/2-1} = 2^{p-1},$$

откуда

$$|h^o(x,y,\varphi)|^p = \frac{|x+y|^p(1-sign(xy)\cos\varphi)^p}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi}\right)^p} \leq 2^{p-1}h^e(x,y,\varphi). \tag{9}$$

Из (7) и (9) следует, что

$$|T^y f_o(x)|^p \leq 2^{p-1}\int\limits_0^\pi |f_o\left(G(x,y,\varphi)\right)|^p\ h^e(x,y,\varphi)\,dm(\varphi) \leq 2^{p-1}T^y|f_o(x)|^p,$$

что доказывает неравенство (6). □

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция и $|f(x)| \leq A$ для любого $x \in [-a-|y|, a+|y|]$ $(a>0,\ A>0)$. Тогда при $x \in [-a,a]$ справедливо неравенство*

$$|T^y f(x)| \leq 4A. \tag{10}$$

Доказательство. См. [10, лемма 2.3]. □

Лемма 3. *Пусть последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на любом отрезке $[-a;a] \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}$ последовательность функций $T^y f_n(x)$ сходится к $T^y f(x)$ равномерно на любом отрезке.*

Доказательство. Равномерная сходимость $T^y f_n(x)$ к $T^y f(x)$ на отрезке $[-a,a]$ эквивалентна тому, что

$$\max_{|x|\leq a}|T^y f_n(x) - T^y f(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Но, по лемме 2,

$$\max_{|x|\le a}|T^y f_n(x)-T^y f(x)|\le 4\max_{|x|\le a+|y|}|f_n(x)-f(x)|,$$

а

$$\max_{|x|\le a+|y|}|f_n(x)-f(x)|\to 0,$$

так как $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на отрезке $[-a-|y|,a+|y|]$. □

Лемма 4.

1) *Для любого $y\in\mathbb{R}$ оператор T^y переводит пространство C в себя.*
2) *Для любой функции $f\in C$ отображение $y\to T^y f$ из $\mathbb{R}$ в топологическое векторное пространство C непрерывно.*

Доказательство. 1) Пусть $f(x)\in C$. Так как множество $\mathcal{E}$ всюду плотно в C, то можно найти последовательность функций $f_n(x)\in\mathcal{E}$ такую, что $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на любом отрезке. Тогда по лемме 3, последовательность $T^y f_n(x)\to T^y f(x)$ равномерно на любом отрезке. Так как функции $T^y f_n$ принадлежат пространству $\mathcal{E}$ и тем более пространству C (см. теорему 1) и равномерный предел непрерывных функций есть непрерывная функция, то $T^y f(x)\in C$.

2) Топология на пространстве C задается семейством полунорм

$$\|f\|_{C,N}=\max_{-N\le x\le N}|f(x)|,\qquad N>0.$$

Пусть $f(x)\in C$. Чтобы доказать, что отображение $y\to T^y f$ из $\mathbb{R}$ в C непрерывно в точке y_0, нужно показать, что для любых $N>0$, $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, такое, что из неравенства $|y-y_0|<\delta$ вытекает неравенство

$$\|T^y f-T^{y_0}f\|_{C,N}<\varepsilon. \tag{11}$$

Так как пространство $\mathcal{E}$ всюду плотно в C, то существует функция $g(x)\in\mathcal{E}$ такая, что

$$\|f-g\|_{C,N+|y_0|+1}<\frac{\varepsilon}{12}. \tag{12}$$

Тогда, по лемме 3, для любого $y\in[y_0-1,y_0+1]$ выполняется неравенство

$$\|T^y(f-g)\|_{C,N}\le 4\cdot\frac{\varepsilon}{12}=\frac{\varepsilon}{3}. \tag{13}$$

Так как отображение $y \to T^y g$ из $\mathbb{R}$ в C непрерывно (вытекает из пункта 2) теоремы 1), то найдется $\delta > 0$, такое, что из $|y - y_0| < \delta$ следует

$$\|T^y g - T^{y_0} g\|_{C,N} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\delta < 1$.

Используя неравенства (12)–(14), получаем

$$\|T^y f - T^{y_0} f\|_{C,N} = \|T^Y f - T^y g + T^y g - T^{y_0} g + T^{y_0} g - T^{y_0} f\|_{C,N} \le$$
$$\le \|T^y (f-g)\|_{C,N} + \|T^y g - T^{y_0} g\|_{C,N} + \|T^{y_0}(f-g)\|_{C,N} \le$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что доказывает неравенство (11). □

Лемма 5. *Для любых функций $f(x) \in C$ и $g(x) \in C_c$ и любого $y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\int (T^y f(x))\, g(x)|x|^{2\alpha+1} dx = \int f(x) \left(T^{-y} g(x)\right) |x|^{2\alpha+1} dx. \tag{15}$$

Доказательство. Если $f(x), g(x) \in \mathcal{D}$, то равенство (15) доказано в [15, Proposition 3.2]. Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, $g(x) \in C_c$, $\operatorname{supp} g \subseteq [-N, N]$ ($\operatorname{supp} g$ — носитель функции g). Возьмем произвольную последовательность функций $f_n(x) \in \mathcal{D}$, которая сходится к $f(x)$ равномерно на каждом отрезке, и последовательность функций $g_n(x) \in \mathcal{D}$ так, что $\operatorname{supp} g_n \subseteq [-N, N]$ и последовательность $g_n(x)$ сходится к $g(x)$ равномерно на отрезке $[-N, N]$. Тогда

$$\int (T^y f_n(x))\, g_n(x)|x|^{2\alpha+1} dx = \int f_n(x) \left(T^{-y} g_n(x)\right) |x|^{2\alpha+1} dx. \tag{16}$$

Из следствия 3 вытекает, что последовательность $T^y f_n(x)$ сходится к $T^y f(x)$ равномерно на любом отрезке, а последовательность $T^{-y} g_n(x)$ сходится к $T^{-y} g(x)$ равномерно на отрезке $[-N - |y|, N + |y|]$. Переходя в равенстве (16) к пределу при $n \to \infty$, получим (15). □

Доказательство теоремы 2 для случая $2 \le p < +\infty$.

1) Для построения оператора $\widetilde{T}^y$ воспользуемся теоремой 3 для случая, когда $X = Y = L_{p,\alpha}$, $E = \mathcal{D}$. Так как подмножество $\mathcal{D}$ всюду плотно в $L_{p,\alpha}$ при $p \ne \infty$, то достаточно показать, что линейный

оператор
$$T^y : \mathcal{D} \to L_{p,\alpha}$$
является ограниченным, то есть существует число $C > 0$, что
$$\|T^y f\|_{p,\alpha} \le C\|f\|_{p,\alpha} \qquad \forall f \in \mathcal{D}. \tag{17}$$
Заметим, что если $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$, то
$$\|T^y f\|_{p,\alpha} = \|T^y f_e + T^y f_o\|_{p,\alpha} \le \|T^y f_e\|_{p,\alpha} + \|T^y f_o\|_{p,\alpha}. \tag{18}$$
Оценим каждое слагаемое по отдельности. Используя неравенство (5) и соотношение (15) в частном случае, когда $g(x) \equiv 1$, получим
$$\begin{aligned} \|T^y f_e\|_{p,\alpha}^p &= \int |T^y f_e(x)|^p \, |x|^{2\alpha+1} \, dx \le \\ &\le 2^{p-1} \int T^y \left(|f_e(x)|^p\right) \, |x|^{2\alpha+1} \, dx = \\ &= 2^{p-1} \int |f_e(x)|^p \left(T^{-y} 1\right) |x|^{2\alpha+1} \, dx = \\ &= 2^{p-1} \int |f_e(x)|^p |x|^{2\alpha+1} dx \le 2^p \|f_e\|_{p,\alpha}^p. \end{aligned} \tag{19}$$
При этом использовано, что $T^{-y}1 = 1$. Из (19) следует, что
$$\|T^y f_e\|_{p,\alpha} \le 2\|f_e\|_{p,\alpha}. \tag{20}$$
Аналогично, используя неравенство (6) и соотношение (15), получаем
$$\|T^y f_o\|_{p,\alpha} \le 2\|f_o\|_{p,\alpha}. \tag{21}$$
Заметим, что $\|f_e\|_{p,\alpha} \le \|f\|_{p,\alpha}$ и $\|f_o\|_{p,\alpha} \le \|f\|_{p,\alpha}$, поэтому из неравенств (18), (20) и (21) вытекает
$$\|T^y f\|_{p,\alpha} \le 4\|f\|_{p,\alpha}, \tag{22}$$
что доказывает (17) причем $C = 4$. Таким образом, существует единственный оператор $\widetilde{T}^y$, продолжающий оператор T^y с $\mathcal{D}$ на $L_{p,\alpha}$, причем для продолженного оператора выполняется неравенство
$$\|\widetilde{T}^y f\|_{p,\alpha} \le 4\|f\|_{p,\alpha}. \tag{23}$$

2) Пусть $f \in L_{p,\alpha} \bigcap \mathcal{E}$. Проверим, что

$$\widetilde{T}^y f = T^y f. \tag{24}$$

Пусть $\Psi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, ..$ произвольная последовательность функций, удовлетворяющая условиям: (1) $\Psi_n(x) \in \mathcal{D}$; (2) $0 \le \Psi_n(x) \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; (3) $\operatorname{supp} \Psi_n \subseteq [-n-1, n+1]$; (4) $\Psi_n(x) \equiv 1$ при $x \in [-n, n]$. Определим последовательность функций $f_n(x) := f(x)\Psi_n(x)$. Все функции $f_n(x)$ принадлежат множеству $\mathcal{D}$ и, очевидно, что $f_n(x) \to f(x)$ в топологическом пространстве $\mathcal{E}$. Из непрерывности оператора T^y в пространстве $\mathcal{E}$ (пункт 1) теоремы 1) вытекает, что $T^y f_n \to T^y f$ в пространстве $\mathcal{E}$ и, в частности, последовательность $T^y f_n(x)$ сходится к $T^y f(x)$ поточечно на $\mathbb{R}$.

С другой стороны, заметим, что $f_n \to f$ в нормированном пространстве $L_{p,\alpha}$. Действительно,

$$\|f - f_n\|_{p,\alpha}^p = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |1 - \Psi_n(x)|^p \, |x|^{2\alpha+1} \, dx \le$$
$$\le \int\limits_{|x| \ge n} |f(x)|^p |x|^{2\alpha+1} \, dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из определения оператора $\widetilde{T^y}$ вытекает, что $\|\widetilde{T}^y f - T^y f_n\|_{p,\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$. Хорошо известно, что из сходимости последовательности в пространстве L_p следует, что найдется подпоследовательность, которая сходится почти всюду, значит, некоторая подпоследовательность последовательности $T^y f_n$ сходится почти всюду к $\widetilde{T}^y f$, но последовательность $T^y f_n$ сходится к $T^y f$, откуда вытекает, что $\widetilde{T}^y f = T^y f$.

Доказательство теоремы 2 для случая $1 < p < 2$.

Как и для случая $p \in [2, +\infty)$, для построения оператора $\widetilde{T}^y$ воспользуемся теоремой 3 при $X = Y = L_{p,\alpha}$, $E = \mathcal{D}$. Для доказательства существования продолжения $\widetilde{T}^y$ достаточно доказать неравенство

$$\|T^y f\|_{p,\alpha} \le 4\|f\|_{p,\alpha} \qquad 1 < p < 2, \quad f \in \mathcal{D}. \tag{25}$$

Если $p \in (1, 2)$, то сопряженный показатель $q \in (2, +\infty)$ $(1/p + 1/q = 1)$. Из общей теории Лебеговых пространств (см., например, [14]) следует, что пространство $L_{p,\alpha}$ изоморфно сопряженному пространству к банахову пространству $L_{q,\alpha}$. Изоморфизм получается сопоставлением каждой функции $f \in Ł_{p,\alpha}$ линейного функционала Λ_f, который определяется формулой

$$\Lambda_f(g) = \int f(x)\, g(x)\, |x|^{2\alpha+1}\, dx, \quad g \in L_{q,\alpha}.$$

При этом норма этого функционала совпадает с $\|f\|_{p,\alpha}$, т. е.

$$\|f\|_{p,\alpha} = \sup\left\{|\Lambda_f(g)| : g \in L_{q,\alpha}, \quad \|g\|_{q,\alpha} \le 1\right\}. \tag{26}$$

Пусть $f \in \mathcal{D}$ и $\Lambda = \Lambda_{T^y f}$ — линейный функционал, соответствующий функции $T^y f$. Так как функции из C_c образуют плотное подмножество в $L_{q,\alpha}$, то из (26) следует, что

$$\|T^y f\|_{p,\alpha} = \sup\left\{|\Lambda(g)| : g \in C_c, \quad \|g\|_{q,\alpha} \le 1\right\}. \tag{27}$$

Из леммы 5 вытекает, что

$$\Lambda(g) = \int (T^y f)(x)\, g(x)\, |x|^{2\alpha+1}\, dx = \int f(x)\, (T^{-y} g(x))\, |x|^{2\alpha+1}\, dx \tag{28}$$

при $g \in$. Так как $\|T^{-y} g\|_{q,\alpha} \le 4\|g\|_{q,\alpha}$ (следует из (22)), то из (28) и из равенства Гельдера следует

$$|\Lambda(g)| \le \|f\|_{p,\alpha} \|T^{-y} g\|_{q,\alpha} \le 4\|f\|_{p,\alpha}\, \|g\|_{q,\alpha}.$$

Тогда из (27) вытекает неравенство (25).

Из (25) следует, что при $p \in (1, 2)$ существует единственный оператор $\widetilde{T}^y$, продолжающий оператор $T^y \subset \mathcal{D}$ на $L_{p,\alpha}$, причем для продолженного оператора выполняется неравенство (22).

Доказательство того, что $\widetilde{T}^y f = T^y f$ для любой функции $f \in L_{p,\alpha} \bigcap \mathcal{E}$ проводятся так же, как и для случая $p \in [2, +\infty)$.

Лемма 6. *Для любой функции $f(x) \in C_c$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g_\varepsilon \in C_c$, удовлетворяющая условиям:*

1) $|g_\varepsilon|(x) \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
2) $\left| \int f(x) g_\varepsilon(x) |x|^{2\alpha+1}\, dx - \|f\|_{1,\alpha} \right| < \varepsilon.$

Доказательство. Пусть $A = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{supp} f \subseteq [-N, N]$. Определим функцию

$$g(x) = \begin{cases} |f(x)|/f(x), & \text{при} \quad f(x) \neq 0, \\ 0, & \text{при} \quad f(x) = 0. \end{cases}$$

Тогда $|g(x)| \leq 1$, $\int f(x)g(x)|x|^{2\alpha+1}\,dx = \|f\|_{1,\alpha}$ и $\operatorname{supp} g \subset [-N, N]$. Чтобы получить функцию $g_\varepsilon(x)$ мы «сгладим» функцию $g(x)$.

Пусть $L_1(\mathbb{R})$ — обычное Лебегово пространство, состоящее из всех суммируемых функций на $\mathbb{R}$. Пусть

$$\|h\|_1 = \int |h(x)|\,dx, \quad h \in L_1(\mathbb{R}),$$

— норма в банаховом пространстве $L_1(\mathbb{R})$. Известно, что любая функция $h(x) \in L_1$ непрерывна в целом, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что

$$\|h(x-t) - h(x)\|_1 < \varepsilon$$

при всех t, удовлетворяющих условию $|t| < \delta$.

Очевидно, что $g(x) \in L_1(\mathbb{R})$, поэтому из непрерывности в целом следует, что найдется $\delta > 0$, такое что при $|t| < \delta$ справедливо неравенство

$$\|g(x-t) - g(x)\|_1 < \frac{\varepsilon}{A(N+1)^{2\alpha+1}}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\delta < 1$. Тогда, если $|t| < \delta$, то

$$\begin{aligned} \|g(x-t) - g(x)\|_{1,\alpha} &= \int |g(x-t) - g(x)|\,|x|^{2\alpha+1}\,dx = \\ &= \int\limits_{|x| \leq N+1} |g(x-t) - g(x)|\,|x|^{2\alpha+1}\,dx \leq \\ &\leq (N+1)^{2\alpha+1}\|g(x-t) - g(x)\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{A}. \end{aligned} \tag{29}$$

Пусть $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям: 1) $\varphi(x) \geq 0$; 2) $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-\delta, \delta]$; 3) $\int \varphi(x)\,dx = 1$. Функцию $g_\varepsilon(x)$ определим как свертку функций g и φ, т. е.

$$g_\varepsilon(x) = (g * \varphi)(x) = \int g(x-t)\varphi(y)\,dt.$$

Из свойств свертки вытекает, что $g_\varepsilon(x)$ является непрерывной функцией с компактным носителем ($\operatorname{supp} g_\varepsilon \subseteq [-N-\delta, N+\delta]$).

Проверим, что выполняются условия леммы. Так как $|g(x)| \le 1$, то

$$|g_\varepsilon(x)| \le \int |g(x-t)|\,\varphi(t)\,dt \le \int \varphi(t)\,dt = 1,$$

что доказывает 1). Используя неравенство Минковского и оценку (29), получим

$$\|g_\varepsilon - g\|_{1,\alpha} \le \int \|g(x-t)-g(x)\|_{1,\alpha}\varphi(t)\,dt =$$
$$= \int\limits_{|t|\le\delta} \|g(x-t)-g(x)\|_{1,\alpha}\varphi(t)\,dt \le \frac{\varepsilon}{A}\int\limits_{|t|\le\delta}\varphi(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{A}.$$

Далее

$$\left|\int f(x)g_\varepsilon(x)|x|^{2\alpha+1}\,dx - \|f\|_{1,\alpha}\right| = \left|\int f(x)(g_\varepsilon(x)-g(x))|x|^{2\alpha+2}\,dx\right| \le$$
$$\le \int |f(x)|\,|g_\varepsilon(x)-g(x)|\,|x|^{2\alpha+1}\,dt \le A\,\|g_\varepsilon - g\|_{1,\alpha} \le \varepsilon,$$

что завершает доказательство свойства 2). □

Доказательство теоремы 2 для случая $p = 1$.

Как и для случаев $p \in (1,2)$ и $p \in [2,+\infty)$ для построения оператора $\widetilde{T}^y$ воспользуемся теоремой 3 при $X = Y = L_{1,\alpha}$, $E = \mathcal{D}$. Для доказательства существования продолжения $\widetilde{T}^y$ достаточно доказать неравенство

$$\|T^y f\|_{1,\alpha} \le 4\|f\|_{1,\alpha} \qquad f \in \mathcal{D}. \tag{30}$$

Пусть $f \in \mathcal{D}$, тогда функция $T^y f$ тоже принадлежит пространству $\mathcal{D}$ и тем более пространству C_c. Для функции $T^y f$ и $\varepsilon > 0$ пусть g_ε — функция из пространства C_c, удовлетворяющая условиям 1) и 2) из леммы 6. Тогда из условия 2) следует неравенство

$$\|T^y f\|_{1,\alpha} - \varepsilon \le \left|\int (T^y f)(x)\,g_\varepsilon(x)\,|x|^{2\alpha+1}\,dx\right|. \tag{31}$$

Из леммы 5 вытекает

$$\int (T^y f)(x)\,g_\varepsilon(x)\,|x|^{2\alpha+1}\,dx = \int f(x)(T^{-y}g_\varepsilon)(x)\,|x|^{2\alpha+1}\,dx. \tag{32}$$

Так как $|g_\varepsilon(x)| \le 1$, то $|(T^{-y}g_\varepsilon)(x)| \le 4$ (следует из леммы 2), откуда

$$\left|\int f(x)(T^{-y}g_\varepsilon)(x)\,|x|^{2\alpha+1}\,dx\right| \le 4\int |f(x)||x|^{2\alpha+1}\,dx = 4\|f\|_{1,\alpha}. \quad (33)$$

Из (31)–(33) вытекает

$$\|T^y f\|_{1,\alpha} - \varepsilon \le 4\|f\|_{1,\alpha}, \quad (34)$$

а так как ε — произвольное положительное число, то из (34) следует неравенство (30).

Доказательство того, что $\widetilde{T}^y f = T^y f$ для любой функции $f \in L_{1,\alpha} \bigcap \mathcal{E}$ проводятся также, как для случая $p \in (2, +\infty)$.

Напомним, что множество $L_{\infty,\alpha}$ состоит из всех функций $f(x)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$. Множество $L_{\infty,\alpha}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Пусть множество $\widetilde{\mathcal{E}}$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых ограниченных функций с ограниченной первой производной. Из оценки

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \sup|f'(x)| \cdot |x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

вытекает, что функции из $\widetilde{\mathcal{E}}$ равномерно непрерывны и, следовательно, $\widetilde{\mathcal{E}}$ является линейным подмножеством в пространстве $L_{\infty,\alpha}$.

Лемма 7. *Пусть $f(x) \in \mathcal{E}$. Для того, чтобы функция f принадлежала множеству $\widetilde{\mathcal{E}}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

а) $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$;

б) $(Df)(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$, где D — оператор Данкля.

Доказательство. 1) Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{E}}$, тогда $|f(x)| \le C_1$ и $|f'(x)| \le C_2$ для некоторых постоянных C_1 и C_2. Условие а) выполняется, проверим, что будет выполнено и условие б). Так как

$$Df(x) = f'(x) + (\alpha + \frac{1}{2})\frac{1}{x}(f(x) - f(-x)),$$

то достаточно проверить ограниченность функции $\frac{1}{x}(f(x) - f(-x))$.

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(f(x)-f(-x))=2f'(0),$$

то найдется число $\delta>0$ такое, что при $|x|<\delta$ будет выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{x}(f(x)-f(-x))-2f'(0)\right|<1.$$

Тогда, при $|x|<\delta$,

$$\left|\frac{1}{x}(f(x)-f(-x))\right|\le 2f'(0)+1\le 2C_2+1. \tag{35}$$

При $|x|\ge\delta$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{x}(f(x)-f(-x))\right|\le \frac{2C_1}{\delta}. \tag{36}$$

Из (35) и (36) вытекает ограниченность функции $(f(x)-f(-x))/x$ на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

2) Пусть для функции f выполняются условия а) и б), т. е. $|f(x)|\le C_1$ и $|Df(x)|\le C_3$ для некоторых постоянных C_1 и C_2. Докажем, что $f\in\widetilde{\mathcal{E}}$. Для этого достаточно показать, что производная $f'(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$, а так как $f'(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то достаточно показать, что она ограничена при $|x|\ge 1$. Остается заметить, что

$$|f'(x)|=\left|(Df)(x)-(\alpha+\frac{1}{2})\,\frac{(f(x)-f(-x))}{x}\right|\le C_3+(2\alpha+1)C_1$$

при $|x|\ge 1$. □

Доказательство теоремы 2 для случая $p=\infty$.

Для построения оператора $\widetilde{T}^y$ воспользуемся теоремой 3 для случая, когда $X=Y=L_{\infty,\alpha}$, $E=\widetilde{\mathcal{E}}$.

Проверим, что оператор T^y переводит множество $\widetilde{\mathcal{E}}$ в себя. Пусть $f\in\widetilde{\mathcal{E}}$, тогда, по лемме 7, функции $f(x)$ и $Df(x)$ ограничены на $\mathbb{R}$, то есть $|f(x)|\le C_1$ и $|Df(x)|\le C_2$ для некоторых постоянных C_1 и C_2. Так как оператор T^y переводит пространство $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$ (пункт 1) теоремы 1), то $T^yf\in\mathcal{E}$. Из неравенства (10) следует, что $|T^yf(x)|\le 4C_1$, а так как операторы D и T^y перестановочны (пункт 5) теоремы 1), то

$$|D(T^yf)(x)|=|T^y(Df)(x)|\le 4C_2.$$

Следовательно, функции $T^y f(x)$ и $D(T^y f)(x)$ ограничены на $\mathbb{R}$ и из леммы 7 вытекает, что $T^y \in \widetilde{\mathcal{E}}$.

Проверим, что линейное подмножество $\widetilde{\mathcal{E}}$ всюду плотно в банаховом пространстве $L_{\infty,\alpha}$. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям: 1) $\varphi \in \mathcal{D}$; 2) $\varphi(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}$; 3) $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-1, 1]$; 4) $\int \varphi(x)\, dx = 1$. Тогда для функций $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$ справедливы следующие свойства: 1) $\varphi_n \in \mathcal{D}$; 2) $\varphi_n(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}$; 3) $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$; 4) $\int \varphi_n(x)\, dx = 1$.

Для любой функции $f(x) \in L_{1,\alpha}$ рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) := (f * \varphi_n)(x) = \int f(x-t)\, \varphi_n(t)\, dt, \tag{37}$$

то есть f_n свертка функций f и φ_n. Из свойств свертки вытекает, что функция $f_n(x)$ бесконечно дифференцируемая и производная $f_n'(x)$ может быть записана в виде

$$f_n'(x) = (f * \varphi_n')(x) = \int f(x-t)\, \varphi_n'(t)\, dt. \tag{38}$$

Из (37) и (38) следует, что

$$|f_n(x)| \leq \int |f(x-t)|\, \varphi_n(t)\, dt \leq \|f\|_{\infty,\alpha},$$

$$|f_n'(x)| \leq \int |f(x-t)\|\, \varphi_n'(t)|\, dt \leq C\|f\|_{\infty,\alpha},$$

где $C = \int |\varphi_n'(t)|\, dt$. Отсюда вытекает, что функция $f_n \in \widetilde{\mathcal{E}}$.

Проверим, что $\|f - f_n\|_{\infty,\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|t| < \delta$ вытекает неравенство $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ $(t, x \in \mathbb{R})$. Выберем натуральное число N так, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство $2/n < \delta$, тогда из свойств функций φ_n получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \int |f(x) - f(x-t)|\varphi_n(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{|t|\leq 1/n} |f(x) - f(x-t)|\, \varphi_n(t)\, dt \leq \varepsilon \int \varphi_n(t)\, dt = \varepsilon.$$

Тогда, при $n > N$, выполняется неравенство $\|f - f_n\|_{\infty,\alpha} \le \varepsilon$, что и требовалось.

Так как $\widetilde{\mathcal{E}}$ всюду плотное линейное подмножество в $L_{\infty,\alpha}$ и линейный оператор T^y ограничен на $\widetilde{\mathcal{E}}$, то по, теореме 3, существует единственное непрерывное продолжение $\widetilde{T}^y$ этого оператора на банахово пространство $L_{\infty,\alpha}$. Так как $L_{\infty,\alpha} \subset C$, то, по лемме 4, продолжение $\widetilde{T}^y$ совпадает с оператором T^y, который определен на пространстве C. В частности, отсюда следует, что $\widetilde{T}^y f = T^y f$ для любой функции $f \in L_{\infty,\alpha} \bigcap \mathcal{E}$.

Замечание. При доказательстве теоремы 2 для всех $p \in [1, +\infty]$ получено, что

$$\|\widetilde{T}^y f\|_{p,\alpha} \le 4\|f\|_{p,\alpha}, \quad f \in L_{p,\alpha},$$

и тем самым доказано, что норма оператора $\widetilde{T}^y$ на пространстве $L_{p,\alpha}$ не превосходит 4. Точное значение нормы операторов $\widetilde{T}^y$ неизвестно ни при каких значениях p и y (за исключением тривиального случая $y = 0$, когда $\widetilde{T}^0$ совпадает с тождественным оператором и его норма равна 1).

Список литературы

[1] Левитан Б. М. *Теория операторов обобщенного сдвига.* / Б. М. Левитан. М.: Наука, 1973.

[2] Triméche K. *Transformation operators and mean-periodic functions associated with differential operators.* / K. Triméche. Math. Rep. 1988. V. 1. Part 1. P. 1–282.

[3] Triméche K. *Generalized harmonic analysis and wavelet packets.* / K. Triméche. Amsterdam, 2001.

[4] Платонов С. С. *Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой.* / С. С. Платонов // Известия РАН. Сер. Матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.

[5] Потапов М. К. *О применении оператора обобщенного сдвига в теории приближений.* / М. К. Потапов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем., Механика. 1998. № 3. С. 38–48.

[6] Dunkl C. F. *Differential-difference operators associated to reflection group* / C. F. Dunkl // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 311. P. 167–183.

[7] Rösler M. *Dunkl operators: Theory and applications* / M. Rösler // Lecture Notes in Math. 2002. V. 1817. P. 93–135.

[8] Salem N. B. *Mean-periodic functions associated with the Dunkl operators* / N. B. Salem, S. Kallel // Integral Transforms and Special Functions. 2004. V. 15. No 2. P. 155–179.

[9] Thangavelu S. *Convolution and maximal function for Dunkl transform* / S. Thangavelu, X. Yuan // J. Anal. Math. 2005. V. 97. P.25–56.

[10] Белкина Е. С. *Гармонический анализ Данкля и некоторые задачи теории приближений функций. I, II* / Е. С. Белкина // Труды ПетрГУ. Сер. Матем. 2006. Вып. 13. С. 3–37.

[11] Белкина Е. С. *Эквивалентность K-функционалов и модулей гладкости, построенных по обобщенным сдвигам Данкля* / Е. С. Белкина, С. С. Платонов // Известия ВУЗов. Сер. Матем. 2008. № 8. С. 3–15.

[12] Колмогоров А. Н. *Элементы теории функций и функционального анализа* / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. М.: Наука, 1976.

[13] Rösler M. *Bessel-type signed hypergroups on* $\mathbb{R}$ / M. Rösler // In: Heyer, H. and Mukherjea, A(Eds), Probability Measures an Groups and Related Structures. Proc. Couf. Oberwolfach, 1994. Would Scientific. 1995. P. 292–304.

[14] Вулих Б. З. *Введение в функциональный анализ* / Б. З. Вулих. М.: Наука, 1967.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33