Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 17, 2010

УДК 517.54

И. С. Ефремова

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ДВУХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В работе исследована экстремальная задача для линейного функционала в классе U'_α. В частности, получен вид экстремальной функции.

Понятие линейно-инвариантного семейства было введено Х. Поммеренке в 1964 г. в работе [1].

Пусть $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг. Обозначим через $\mathfrak{L}$ множество всех конформных автоморфизмов единичного круга Δ:

$$\varphi = e^{i\theta}\frac{z+a}{1+z\bar{a}},\ a \in \Delta,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Определение 1. *Множество $\mathfrak{M}$ аналитических в круге Δ функций $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ называется линейно-инвариантным семейством (л.-и. с.), если для любой функции $f(z) \in \mathfrak{M}$ выполнены условия:*

1) $f'(z) \neq 0$, *для каждого $z \in \Delta$ (локальная однолистность);*
2) *для любого $\varphi \in \mathfrak{L}$ функция*

$$\Lambda_\varphi[f(z)] = \frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))}{f'(\varphi(0))\varphi'(0)} = z + \dots$$

принадлежит классу $\mathfrak{M}$.

Важной характеристикой является порядок линейно-инвариантного семейства.

Определение 2. *Порядком л.-и. с. $\mathfrak{M}$ называется число:*

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \sup_{f\in\mathfrak{M}} |a_2(f)|.$$

Понятие порядка функции было введено Кемпбелом в работе [2].

Пусть $f(z) = z + \dots$ локально однолистна и аналитична в Δ.

Определение 3. *Порядком функции $f(z)$ называется число:*

$$\operatorname{ord} f = \operatorname{ord} \mathfrak{M}[f],$$

где $\mathfrak{M}[f] = \{\Lambda_\varphi[f(z)] : \ \varphi \in \mathfrak{L}\}$ — л.-и. с., порожденное функцией f.

Определение 4. *Универсальным линейно-инвариантным семейством U_α порядка α называется объединение всех л.-и. с. $\mathfrak{M}$, порядок которых не превосходит α :*

$$U_\alpha = \bigcup \{\mathfrak{M} : \operatorname{ord} \mathfrak{M} \le \alpha\}.$$

Примеры линейно-инвариантных семейств.

1) Семейство LS всех аналитических и локально однолистных в Δ функций $f(z) = z + \dots$.
2) Семейство $S \subset LS$ однолистных в Δ функций; $\operatorname{ord} S = 2$ [4].
3) Семейство $K \subset S$ выпуклых функций (функций из S, для которых $f(\Delta)$– выпуклая область); $\operatorname{ord} K = 1$ [8].
4) Ниже определенное семейство U_α является линейно-инвариантным [6, 7]; $\operatorname{ord} U_\alpha = \alpha$ [6, 7].

I_α класс всех комплекснозначных функций $\mu(t)$ ограниченной вариации на $[0, 2\pi)$, удовлетворяющих условию:

$$\left| \int_0^{2\pi} d\mu(t) - 1 \right| + \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \le \alpha.$$

U'_α класс функций $g(z)$, представимых в виде

$$g(z) = \int_0^z \exp\left[-2 \int_0^{2\pi} \log(1 - se^{-it})\, d\mu(t) \right] ds, \tag{1}$$

где $\mu(t) \in I_\alpha$ (ветвь логарифма главная).

X и Y — два нормированных пространства и F — отображение, действующее из X и Y. Если отображение F в точке φ допускает разложение

$$F(\varphi + h) = F(\varphi) + L_\varphi(h) + o(||h||),$$

то оно называется дифферинцируемым по Фреше в точке $\varphi \in O$.

Рассмотрим следующие функционалы:

$$\max_{f \in U'_\alpha} \operatorname{Re}\left\{\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\right\}, \tag{2}$$

$$\max_{f \in U'_\alpha} \operatorname{Re}\left\{\frac{f''(z_2)}{f'(z_2)}\right\}, \tag{3}$$

где z_1, z_2 — фиксированные точки из Δ.

Обозначим: $z_1 = r_1 e^{i\theta_1},\ \arg z_1 = \theta_1,\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2},\ \arg z_2 = \theta_2$. В [6] (см. также [7]) доказано, что максимум в (2) достигается на функциях $l_1(z) \in U'_\alpha$ таких, что:

$$l'_1(z) = \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log(1 - z e^{i(\theta_1 - t)})\,\frac{(e^{it} - r_1)^2 d\beta_1(t)}{|e^{it} - r_1|^2 e^{it}}\right],$$

где $\beta_1(t)$– любая вещественная неубывающая на $[0, 2\pi]$ функция, с полной вариацией α, удовлетворяющая условию:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(e^{it} - r_1)^2 d\beta_1(t)}{|e^{it} - r_1|^2 e^{it}} = 1. \tag{4}$$

Обозначим $\mathfrak{A}_1$ множество всех таких производных $l'_1(z)$ экстремальных функций в задаче (2), которым в их интегральном представлении соответствуют ступенчатые функции $\beta_1(t)$.

Аналогично максимум в (3) достигается на функциях $l_2 \in U'_\alpha$, таких, что:

$$l'_2(z) = \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log(1 - z e^{i(\theta_2 - t)})\,\frac{(e^{it} - r_2)^2 d\beta_2(t)}{|e^{it} - r_2|^2 e^{it}}\right],$$

где $\beta_2(t)$– любая вещественная неубывающая на $[0, 2\pi]$ функция, с полной вариацией α, удовлетворяющая условию:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(e^{it} - r_2)^2 d\beta_2(t)}{|e^{it} - r_2|^2 e^{it}} = 1. \tag{5}$$

Обозначим $\mathfrak{A}_2-$ множество всех таких производных $l_2'(z)$ экстремальных функций, которым в их интегральном представлении соответствуют ступенчатые функции $\beta_2(t)$.

Отметим, что требование ступенчатости функций $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ в определении классов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ при рассмотрении поставленной задачи вполне естественно, поскольку, как доказано в [6], множество функций (1), которым в их интегральном представлении соответствуют ступенчатые функции $\mu(t)$, всюду плотно в U_α' в топологии равномерной сходимости внутри Δ.

Обозначим $l_0 = \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$. Если $l_0 \neq \varnothing$, то функция $q(z) \in l_0$ будет экстремальной в задаче о нахождении:

$$\max_{f \in U'_\alpha} \operatorname{Re}\left\{ \frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\gamma + \frac{f''(z_2)}{f'(z_2)} \right\} \tag{6}$$

для $\gamma > 0$. И мы сможем легко найти максимум в (6).

Из вышесказанного вытекает естественность постановки следующих двух задач.

1) Найти вид экстремальной функции в задаче (6) для произвольного $\gamma \in \mathcal{C}$.
2) Описать множество l_0.

Решению этих задач посвящены нижеприведенные теоремы 1 и 2 соответственно.

В дальнейшем нам понадобятся следующие факты. Рассмотрим класс функций G_α:

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} g(z,t)\, d\mu(t), \mu \in I_\alpha,$$

$g(z,t)$ регулярна в Δ по z, 2π-периодична и непрерывно дифференцируема по t. Класс G_α компактен в топологии равномерной сходимости внутри Δ (см. [7]). Пусть $\mathfrak{F}$ — дифференцируемый по Фреше функционал. В [7] рассматривалась следующая экстремальная задача:

$$\max_{\varphi \in G_\alpha} Re\{\mathfrak{F}(\varphi)\}, \quad \alpha \in [1, \infty). \tag{7}$$

Обозначим

$$\varphi_0(z) = \int_0^{2\pi} g(z,t)\, d\mu_0(t)$$

экстремальную функцию в этой задаче (она может быть не единственной). Пусть $I_\alpha(n) \in I_\alpha$ класс n-ступенчатых функций (подкласс I_α кусочно-постоянных функций, имеющих не более n разрывов на промежутке $[0, 2\pi)$).

$$G_\alpha(n) = \{\varphi \in G_\alpha : \varphi(z) = \int_0^{2\pi} g(z,t)\, d\mu(t), \mu \in I_\alpha(n)\}.$$

Класс функций $G_\alpha(n)$ также как и G_α компактен в топологии равномерной сходмости внутри Δ (см. [7]). Наряду с задачей (7) рассматривалась также экстремальная задача

$$\max_{\varphi \in G_\alpha(n)} Re\{\mathfrak{F}(\varphi)\}, \quad \alpha \in [1, \infty), \tag{8}$$

где n — фиксированное натуральное число.

Пусть максимум в (8) достигается на функции

$$\varphi_n(z) = \int_0^{2\pi} g(z,t)\, d\mu_n(t).$$

Из последовательности $\varphi_n(z)$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри Δ к $\varphi^0(z) \in G_\alpha$, причем $\varphi_0(z)$ дает решение экстремальной задачи (7) (см. [7]).

В работе [7] было получено, что если $t_j,\ j = 1, ..., k \geq 3$ — точки разрыва функции $\mu_n(t)$ и этим точкам соответствуют $\theta_j = \arg d\mu_n(t_j)$, $2\pi + \theta_k > \theta_1 > \theta_2 > ... > \theta_k \geq 0$, то точки разрыва функции $\mu_n(t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} |L_{\varphi_n}[g(z,t_j)] - c_n|^2 = |L_{\varphi_n}[g(z,t_k)] - c_n|^2 \\ (|L_{\varphi_n}[g(z,t)] - c_n|^2)'_t|_{t=t_j} = 0 \text{ для всех j}, \end{cases} \tag{9}$$

где L_{φ_n} — дифференциал $\mathfrak{F}$ в точке φ_n.

Теорема 1. *Максимум функционала:*

$$Re\left\{\gamma \frac{z_1 f''(z_1)}{f'(z_1)} + \frac{z_2 f''(z_2)}{f'(z_2)}\right\}, \quad f(z) \in U'_\alpha, \tag{10}$$

где $\gamma \in \mathcal{C}$ фиксированное, достигается на функции $f_0(z)$, для которой

$$f_0'(z) = \prod_{k=1}^{3} \left(1 - ze^{-i\tau_k}\right)^{-2a_k},$$

где τ_k — действительные числа, $|a_1|+|a_2|+|a_3|=\alpha$ и $|a_1+a_2+a_3|=1$.

Доказательство. Так как $f(z)\in {U'}_\alpha$, то по формуле (1):

$$\frac{z_1 f''(z_1)}{f'(z_1)}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{2e^{-it}d\mu(t)}{1-z_1e^{-it}},\quad \frac{z_2 f''(z_2)}{f'(z_2)}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{2e^{-it}d\mu(t)}{1-z_2e^{-it}}.$$

Тогда функционал (10) примет вид:

$$\mathrm{Re}\left\{\gamma\int\limits_0^{2\pi}\frac{2z_1e^{-it}d\mu(t)}{1-z_1e^{-it}}+\int\limits_0^{2\pi}\frac{2z_2e^{-it}d\mu(t)}{1-z_2e^{-it}}\right\}.$$

Следовательно, максимум функционала (10) в U_α равен:

$$\max_{f\in U'_\alpha}\left[Re\left\{2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{z_1\gamma}{e^{it}-z_1}+\frac{z_2}{e^{it}-z_2}\right)d\mu(t)\right\}:\mu(t)\in I_\alpha\right]. \tag{11}$$

Обозначим

$$g(t)=2\left(\frac{z_1\gamma}{e^{it}-z_1}+\frac{z_2}{e^{it}-z_2}\right).$$

Для решения экстремальной задачи (11) рассмотрим промежуточную экстремальную задачу:

$$\max_{\nu_n(t)\in I_\alpha} Re\left\{\mathfrak{F}\left(\int_0^{2\pi}g(t)\,d\nu_n(t)\right)\right\}=$$
$$=\max\left[Re\{\mathfrak{F}(\varphi)\}:\ \varphi=\int_0^{2\pi}g(t)\,d\nu_n(t)\right]. \tag{12}$$

Роль дифференцируемого по Фреше функционала $\mathfrak{F}$ в нашем случае играет $\mathfrak{F}(\varphi)=\varphi$. Значит, дифференциал Фреше рассматриваемого функционала равен $L_{\varphi_n}(g(t))=g(t)$. Таким образом, для нашего случая имеем:

$$L_{\varphi_n}(g(t_j))=\frac{2z_1\gamma}{e^{it_j}-z_1}+\frac{2z_2}{e^{it_j}-z_2}.$$

Запишем систему (9) для дифференциала $L_{\varphi_n}(g(t_j))$:

$$\begin{cases}\left|\dfrac{2z_1\gamma}{e^{it_j}-z_1}+\dfrac{2z_2}{e^{it_j}-z_2}-c_n\right|^2=\left|\dfrac{2z_1\gamma}{e^{it_k}-z_1}+\dfrac{2z_2}{e^{it_k}-z_2}-c_n\right|^2\\ \left(\left|\dfrac{2z_1\gamma}{e^{it}-z_1}+\dfrac{2z_2}{e^{it}-z_2}-c_n\right|^2\right)'_t\Big|_{t=t_j}=0.\end{cases} \tag{13}$$

Перепишем второе уравнение системы в виде:

$$\left((\frac{2z_1\gamma}{e^{it}-z_1} + \frac{2z_2}{e^{it}-z_2} - c_n)(\frac{2\gamma\overline{z_1}}{e^{-it}-\overline{z_1}} + \frac{2\overline{z_2}}{e^{-it}-\overline{z_2}} - \overline{c_n}) \right)'_t = 0,$$

что равносильно уравнению

$$\frac{(C_3e^{3it} + C_2e^{2it} + C_1e^{it} + C_0 + D_1e^{-it})(e^{-it} - \overline{z_1})(e^{-it} - \overline{z_2})}{|e^{it}-z_1|^2|e^{it}-z_2|^2} +$$
$$+ \frac{(E_3e^{-3it} + E_2e^{-2it} + E_1e^{-it} + E_0 + G_1e^{it}) - (e^{it}-_1)(e^{it}-z_2)}{|e^{it}-z_1|^2|e^{it}-z_2|^2} =$$
$$= 0,$$

где $C_i,\ E_i,\ i = 0,1,2,3$ и $D_1,\ G_1$ — некоторые комплексные числа, не зависящие от t. Отсюда получаем:

$$ae^{3it} + be^{2it} + ce^{it} + de^{-3it} + le^{-2it} + ve^{-it} + m = 0,$$

где a, b, c, d, l, v, m — также некоторые комплексные числа. Умножим обе части уравнения на e^{3it}, получим следующее алгебраическое уравнение относительно e^{it}:

$$ae^{6it} + be^{5it} + ce^{4it} + me^{3it} + ve^{2it} + le^{it} + d = 0.$$

Следовательно, решений t_j такого уравнения может быть не более 6. А значит, точек разрыва t_j у функции $\nu_n(t)$ не более 6. Рассмотрим функцию

$$w(t) = \left| \frac{2z_1\gamma}{e^{it_j}-z_1} + \frac{z_2}{e^{it_j}-z_2} - c_n \right|^2.$$

Выберем две соседние точки t_j и t_{j+1}, которые удовлетворяют второму условию из системы (13). В этих точках значения функции совпадают. Тогда, по теореме Ролля, существует точка $t_* \in (t_j, t_{j+1})$ такая, что $w'(t_*) = 0$. Поэтому второе уравнение системы может иметь не более трех решений. То есть число точек разрыва у функции $\nu_n(t)$ не более 3.

Получаем следующий вид экстремальной функции в поставленной задаче:

$$f_0'(z) = \prod_{k=1}^{3}(1 - ze^{-i\tau_k})^{-2a_k},$$

где a_1, a_2, a_3 — скачки функции $\mu_n(t)$, а τ_k — ее точки разрыва. Теорема доказана.

Возвращаемся к исследованию l_0. Пусть $q(z) \in l_0$. Тогда $q = l_1' \in \mathfrak{A}_1$ и $q = l_2' \in \mathfrak{A}_2$.

Обозначим: $\{t_k\}$ — точки разрыва $\beta_1(t)$, а $\{a_k\}$ — ее скачки, тогда

$$\sum_k a_k = \alpha,\ a_k > 0.$$

Тогда для соответствующего интеграла Стилтьеса получим:

$$\int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{i(\theta_1 - t)}) \frac{(e^{it} - r_1)^2 d\beta_1(t)}{|e^{it} - r_1|^2 e^{it}} = \\ = \sum_k \log(1 - ze^{i(\theta_1 - t_k)}) \frac{(e^{it_k} - r_1)^2 a_k}{|e^{it_k} - r_1|^2 e^{it_k}}.$$

По аналогии обозначим $\{\tau_k\}$ — точки разрыва $\beta_2(t)$, а $\{b_k\}$ — ее скачки. Тогда

$$\sum_k b_k = \alpha,\ b_k > 0$$

и

$$\int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{i(\theta_2 - t)}) \frac{(e^{it} - r_2)^2 d\beta_2(t)}{|e^{it} - r_2|^2 e^{it}} = \\ = \sum_k \log(1 - ze^{i(\theta_2 - \tau_k)}) \frac{(e^{i\tau_k} - r_2)^2 b_k}{|e^{i\tau_k} - r_2|^2 e^{i\tau_k}},$$

причем здесь мощность множества $\{k\}$, вообще говоря, не совпадает с мощностью множества точек разрыва функции β_1. Тогда

$$q(z) = l_1'(z) = \\ = \exp\left[-2\left(\sum_k \log(1 - ze^{i(\theta_1 - t_k)}) \frac{(e^{it_k} - r_1)^2 a_k}{|e^{it_k} - r_1|^2 e^{it_k}}\right)\right] = \\ = l_2'(z) = \exp\left[-2\left(\sum_k \log(1 - ze^{i(\theta_2 - \tau_k)}) \frac{(e^{i\tau_k} - r_2)^2 b_k}{|e^{i\tau_k} - r_2|^2 e^{i\tau_k}}\right)\right].$$

Следовательно,

$$\sum_k \log(1 - ze^{i(\theta_1 - t_k)})\frac{(e^{it_k} - r_1)^2 a_k}{|e^{it_k} - r_1|^2 e^{it_k}} =$$

$$= \sum_k \log(1 - ze^{i(\theta_2 - \tau_k)})\frac{(e^{i\tau_k} - r_2)^2 b_k}{|e^{i\tau_k} - r_2|^2 e^{i\tau_k}}. \tag{14}$$

Пусть $z \to e^{-i(\theta_1 - t_k)}$ при фиксированном k. Тогда из (14) вытекает, что k в правой и левой частях этого равенства пробегает одно и то же множество значений, причем для любого k справедливо равенство $\theta_1 - t_k = \theta_2 - \tau_k$ и

$$\frac{(e^{it_k} - r_1)^2 a_k}{|e^{it_k} - r_1|^2 e^{it_k}} = \frac{(e^{i\tau_k} - r_2)^2 b_k}{|e^{i\tau_k} - r_2|^2 e^{i\tau_k}}.$$

Следовательно, для любого k, $a_k = b_k$, $\theta_1 - t_k = \theta_2 - \tau_k$ и

$$\frac{(e^{it_k} - r_1)^2}{|e^{it_k} - r_1|^2 e^{it_k}} = \frac{(e^{i\tau_k} - r_2)^2}{|e^{i\tau_k} - r_2|^2 e^{i\tau_k}}. \tag{15}$$

Формулы (4) и (5) примут вид:

$$\sum_k \frac{(e^{it_k} - r_1)^2 a_k}{|e^{it_k} - r_1|^2 e^{it_k}} = 1, \ \sum_k \frac{(e^{i\tau_k} - r_2)^2 b_k}{|e^{i\tau_k} - r_2|^2 e^{i\tau_k}} = 1.$$

Из (15), в частности, следует, что

$$\arg \frac{e^{it_k}}{(e^{it_k} - r_1)^2} = \arg \frac{e^{i\tau_k}}{(e^{i\tau_k} - r_2)^2}.$$

Под $\arg\zeta$ понимаем главное значение аргумента в промежутке $(-\pi, \pi]$. При фиксированном k обозначим: $\theta = \theta_2 - \theta_1$, $\tau_k = \tau$, $t_k = t$. Тогда из (12) вытекает: $\tau = t + \theta$ и

$$\arg \frac{e^{it}}{(e^{it} - r_1)^2} = \arg \frac{e^{i(t+\theta)}}{(e^{i(t+\theta)} - r_2)^2}.$$

Можно считать, что $(\theta_2 - \theta_1) \in (-\pi, \pi]$. Тогда $\arg \dfrac{(e^{i(t+\theta)} - r_2)^2}{(e^{it} - r_1)^2} = \theta$ и

$$\frac{\theta}{2} = \arg\left(\frac{e^{i(t+\theta)} - r_2}{e^{it} - r_1}\right), \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{16}$$

Обозначим:

$$\varphi(t) = \arg\left(\frac{e^{i(t+\theta)} - r_2}{e^{it} - r_1}\right) = \operatorname{Im}\ln\left(\frac{e^{i(t+\theta)} - r_2}{e^{it} - r_1}\right).$$

Эта функция 2π-периодична. Вычислим ее производную:

$$\varphi'(t) = \operatorname{Re}\left\{\frac{r_2e^{it} - e^{i(t+\theta)}r_1}{(e^{i(t+\theta)} - r_2)(e^{it} - r_1)}\right\}.$$

Найдем критические точки функции $\varphi(t)$:

$$\varphi'(t) = \operatorname{Re}\left[\frac{r_2e^{it} - e^{i(t+\theta)}r_1}{(e^{i(t+\theta)} - r_2)(e^{it} - r_1)}\right] = 0 \tag{17}$$

тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re}\{(r_2 - r_1e^{i\theta})(e^{-it}e^{-i\theta} - (r_2 + r_1e^{-i\theta}) + r_1r_2e^{it})\} = 0,$$

что равносильно равенству:

$$\begin{gathered}\left\{(r_2 - r_1e^{i\theta})(e^{-it}e^{-i\theta} - r_2 - r_1e^{-i\theta} + r_1r_2e^{it})\right\} + \\ + \left\{(r_2 - r_1e^{-i\theta})(e^{it}e^{i\theta} - r_2 - r_1e^{i\theta} + r_1r_2e^{-it})\right\} = 0,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}e^{2it}(r_2^2r_1 - r_1^2r_2e^{i\theta} + r_2e^{i\theta} - r_1) + e^{it}(2r_1^2 - 2r_2^2) + (r_2e^{-i\theta} - \\ - r_1 + r_1r_2^2 - r_1^2e^{-i\theta}r_2) = 0.\end{gathered}$$

Получили квадратное уравнение относительно e^{it}. Следовательно, уравнение (17) имеет не более двух корней. А поскольку гладкая 2π-периодическая функция $\varphi(t)$, отличная от тождественной константы, имеет на $[0, 2\pi)$ максимум и минимум, то (17) имеет единственный максимум и единственный минимум. Поэтому (16) может иметь не более двух корней. Обозначим их t' и t''. Поскольку в этих рассуждениях t_k, τ_k пробегают все точки разрывов функций $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$, то t_k может принимать значения или t', или t'', так как решений только два. Таким образом, функции l_0 в ее интегральном представлении может соответствовать ступенчатая функция $\beta_1(t)$ (или $\beta_2(t)$), имеющая только две точки разрыва.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Функциям $q \in l_0$ в их интегральном представлении*

$$q'(z) = \exp[-2 \int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{-it})\, d\mu(t)]$$

могут соответствовать только ступенчатые функции $\mu(t)$ с двумя точками разрыва.

Résumé

Research extremal problem for linear functional in U'_α is studied. In particular, a form of extremal function is got.

Список литературы

[1] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analuyischer Functionen* // Math. Ann. 1964. Hf. 155. P. 108–154.

[2] Campbell D. M. *Locally univalent functions with locally univalent derivatives* // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 162.

[3] Годуля Я. *Линейно-инвариантные семейства* // Труды ПетрГУ. 1998. Вып. 5. С. 3–96.

[4] Bieberbach L. *Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, sitzungsber* // Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. 1916. V. 138. P. 940–955.

[5] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1996. 628 с.

[6] Старков В. В. *О некоторых подклассах линейно-инвариантных семейств, имеющих интегральное представление* // Рукопись деп. в ВИНИТИ, є 3341–81.

[7] Старков В. В. *О некоторых подклассах линейно-инвариантных семейств, имеющих интегральное представление* // Известия вузов. Серия Математика. 1983. № 5. С. 82–85.

[8] Александров И. А. *Методы геометрической теории аналитических функций.* Томск: Изд-во Томского государственного университета, 2001.

[9] Колмогоров А. П., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1968.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: irish_a@inbox.ru