Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 17, 2010

УДК $511, 514.8, 530.1$

Н. Ю. Светова

СВОЙСТВО ВЫПУКЛОСТИ ВЗАИМНЫХ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В работе установлено свойство выпуклости взаимной мультифрактальной упаковочной размерности подмножества пересечения носителей вероятностых борелевских мер μ и ν. Также показано, что взаимная мультифрактальная хаусдорфова размерность подмножества множества $\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$ является слабо выпуклой.

Пусть X – произвольное метрическое пространство с заданной на нем метрикой d. Обозначим через $\mathcal{P}(X)$ семейство борелевских вероятностных мер, определенных на σ-алгебре всех борелевских подмножеств пространства X. *Носителем* $\operatorname{supp}\mu$ *меры* μ называется множество всех точек, окрестности которых имеют положительную меру. Через $B_r(x)$ обозначим открытый шар с центром в точке x и радиусом r. Для $q \in \mathbb{R}$ определим функцию $\varphi : [0;\infty) \to \bar{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$ следующим образом:

$$\varphi_q(x) = \begin{cases} \begin{array}{ll} \infty, & x = 0, \\ x^q, & x > 0, \end{array} & \text{для } q < 0; \\ 1, & \text{для } q = 0; \\ \begin{array}{ll} 0, & x = 0, \\ x^q, & x > 0, \end{array} & \text{для } q > 0. \end{cases}$$

Для μ, $\nu \in \mathcal{P}(X)$, $E \subseteq X$, q, t, $s \in \mathbb{R}$ рассмотрим

$$\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\delta}(E) = \inf\left\{\sum_i \varphi_q(\mu(B_{r_i}(x_i))) \cdot \varphi_t(\nu(B_{r_i}(x_i))) \cdot (2r_i)^s\right\}, \quad E \neq \emptyset,$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям множества E шарами с центрами из E и диаметрами, не превосходящими заданного числа δ,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\delta}(\emptyset) &= 0,\\ \mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(E) &= \sup_{\delta>0}\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\delta}(E),\\ \mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E) &= \sup_{F\subseteq E}\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(F).\end{aligned}$$

Функция $\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E)$ обладает всеми свойствами σ-субаддитивной внешней меры [6], и назовем такую меру *взаимной хаусдорфовой мерой.*

Пусть $\mathcal{F}$ – семейство подмножеств множества X, содержащее пустое множество. Предположим, что существуют две функции $\eta, \psi : F \to \mathbb{R}_+$, которые удовлетворяют условиям:

A1. $\eta(\emptyset) = 0$ и $\psi(\emptyset) = 0$; $\eta(U) > 0$ и $\psi(U) > 0$ для всех непустых $U \in \mathcal{F}$;

A2. Для всякого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\eta(U) \le \delta$ для всех $U \in \mathcal{F}$ таких, что $\psi(U) \le \varepsilon$;

A3. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется конечное или счетное подсемейство $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, покрывающее X, и такое, что

$$\psi(\mathcal{G}) = \sup\{\psi(U) : U \in \mathcal{G}\} \le \varepsilon.$$

Пусть $\xi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ – функция множества. Говорят, что семейство подмножеств $\mathcal{F}$ и функции множеств ξ, η, ψ, удовлетворяющие условиям A1, A2 и A3, задают на множестве X *структуру Каратеодори* (или C-структуру τ) и пишут $\tau = (\mathcal{A}, \xi, \eta, \psi)$ [1].

Внешняя мера, отвечающая семейству $\mathcal{F}$ и функциям множества ξ, η, ψ, называется *внешней мерой Каратеодори* [1].

Пусть $\mathcal{A}$ – семейство конечных или счетных центрированных δ-покрытий множества E, а функции

$$\xi = \varphi_q(\mu(B_{r_i}(x_i))) \cdot \varphi_t(\nu(B_{r_i}(x_i))), \qquad \eta = \psi = \mathrm{diam}(B_{r_i}(x_i)).$$

Легко проверить, что семейство $\mathcal{A}$ и функции ξ, η, ψ удовлетворяют условиям A1, A2, A3 и задают структуру Каратеодори $(\mathcal{A}, \xi, \eta, \psi)$, а функция $\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E)$ является мерой Каратеодори. Поэтому по предложению 1.2 [1] существует критическое значение $\dim^{q,t}_{\mu,\nu}(E)$:

$$\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E) = \begin{cases}\infty, & \text{для} \quad s < \dim^{q,t}_{\mu,\nu}(E),\\ 0, & \text{для} \quad s > \dim^{q,t}_{\mu,\nu}(E).\end{cases}$$

Назовем $\dim_{\mu,\nu}^{q,t}$ *взаимной мультифрактальной хаусдорфовой* размерностью множества E.

Напомним, что счетное семейство $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ дизъюнктных замкнутых шаров с центрами x_i из E и диаметрами, не превосходящими заданного числа δ для любого i, называется центрированной *δ-упаковкой* множества E.

Для непустого множества $E \subseteq X$, $q, t \in \mathbb{R}$, $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ — центрированной δ-упаковки множества E определим функции

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu,\delta}^{q,t,s}(E) = \sup \left\{ \sum_i \varphi_q(\mu(B_{r_i}(x_i))) \cdot \varphi_t(\nu(B_{r_i}(x_i))) \cdot (2r_i)^s \right\},$$

где точная верхняя грань берется по всем конечным или счетным упаковкам множества E шарами с диаметрами, не превосходящими δ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu,\nu,\delta}^{q,t,s}(\emptyset) &= 0, \\ \mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q,t,s}(E) &= \inf_{\delta>0} \mathcal{P}_{\mu,\nu,\delta}^{q,t,s}(E), \\ \mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(E) &= \inf_{E \subseteq \bigcup\limits_i E_i} \sum_i \mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q,t,s}(E_i). \end{aligned}$$

Для функции $\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(E)$ также выполнены условия σ-субаддитивной внешней меры [6], и назовем такую меру *взаимной упаковочной мерой* множества E, а $\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q,t,s}(E)$ – *взаимной предупаковочной мерой.*

Из определений взаимной упаковочной и предупаковочной мер следует, что существуют такие критические значения $\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q,t}(E)$ и $\Delta_{\mu,\nu}^{q,t}(E)$, что

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q,t,s}(E) = \begin{cases} \infty, & \text{для} \quad s < \mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q,t}(E), \\ 0, & \text{для} \quad s > \mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q,t}(E), \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q,t,s}(E) = \begin{cases} \infty, & \text{для} \quad s < \Delta_{\mu,\nu}^{q,t}(E), \\ 0, & \text{для} \quad s > \Delta_{\mu,\nu}^{q,t}(E). \end{cases}$$

Конечная борелевская мера μ называется *диаметрально регулярной* [6], если существуют такие константы $\gamma_0 > 1$ и $C_0 > 0$, что для всех точек x и всех $r > 0$ верно неравенство

$$\mu(B_{\gamma_0 r}(x)) \leq C_0 \mu(B_r(x)).$$

Если $\gamma_0 = 2$, то говорят, что мера μ удовлетворяет свойству удвоения, и называют такую меру удваивающей [2]. Известно, что если μ является вероятностной борелевской и диаметрально регулярной мерой для любого x, принадлежащего носителю меры, и некоторого $\gamma_0 > 1$, то эта мера является и диаметрально регулярной для всех $\gamma > 1$ [7, 5, 2].

Из определений взаимных упаковочной и предупаковочной мер вытекает, что для непустого множества E справедливо

$$\mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E) \leq \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(E).$$

Если меры μ, ν являются диаметрально регулярными, то из леммы Витали о покрытиях [6] следует неравенство $\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E) \leq \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E)$.

Для множества $E \subseteq \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$ из определений взаимной хаусдорфовой и взаимной упаковочной мер вытекает

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E) \geq \mathcal{H}^{p,t,s}_{\mu,\nu}(E), \quad \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu} \geq \mathcal{P}^{q,r,s}_{\mu,\nu}(E), \quad \text{если} \quad q \leq p, \\ \mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E) \geq \mathcal{H}^{q,r,s}_{\mu,\nu}(E), \quad \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu} \geq \mathcal{P}^{p,t,s}_{\mu,\nu}(E), \quad \text{если} \quad t \leq r. \end{aligned}$$

Поэтому функции $\dim^{q,t}_{\mu,\nu}(E)$ и $\operatorname{Dim}^{q,t}_{\mu,\nu}(E)$ являются невозрастающими по переменным q и t.

При доказательстве следующих утверждений используется техника доказательств Л. Олсена [7, 8], К. Фальконера [6], Я. Б. Песина [1].

Лемма. *Для произвольного множества $E \subseteq X$, вещественных чисел $q_1, q_2, t_1, t_2, a, b, s_1, s_2$, $0 \leq s_1, s_2 \leq 1$ и $s_1 + s_2 = 1$ справедливо неравенство*

$$\mathcal{P}^{s_1 q_1 + s_2 q_2, s_1 t_1 + s_2 t_2, s_1 a + s_2 b + \varepsilon}_{\mu,\nu,0}(E) \leq \left(\mathcal{P}^{q_1,t_1,a}_{\mu,\nu,0}(E)\right)^{s_1} \cdot \left(\mathcal{P}^{q_2,t_2,b}_{\mu,\nu,0}(E)\right)^{s_2}.$$

Доказательство. Пусть для $\delta > 0$ семейство $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ является центрированной δ-упаковкой множества E. Рассмотрим сумму

$$\sum_i \varphi_{s_1 q_1 + s_2 q_2}(\mu B_{r_i}(x_i)) \varphi_{s_1 t_1 + s_2 t_2}(\nu B_{r_i}(x_i)) (2r)^{s_1 a + s_2 b + \varepsilon} \leq$$
$$\leq \left(\sum_i \varphi_{q_1}(\mu B_{r_i}(x_i)) \varphi_{t_1}(\nu B_{r_i}(x_i)) (2r)^{a + \frac{\varepsilon}{2 s_1}} \right)^{s_1} \times$$

$$\times \left(\sum_i \varphi_{q_2}(\mu B_{r_i}(x_i)) \varphi_{t_2}(\nu B_{r_i}(x_i))(2r)^{b+\frac{\varepsilon}{2s_2}} \right)^{s_2} \leq$$
$$\leq \left(\mathcal{P}_{\mu,\nu,\delta}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2s_1}}(E) \right)^{s_1} \cdot \left(\mathcal{P}_{\mu,\nu,\delta}^{q_2,t_2,b+\frac{\varepsilon}{2s_2}}(E) \right)^{s_2}.$$

Тогда для произвольного $\delta > 0$ получим

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2,s_1a+s_2b+\varepsilon}(E) \leq \mathcal{P}_{\mu,\nu,\delta}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2,s_1a+s_2b+\varepsilon}(E) \leq$$
$$\leq \left(\mathcal{P}_{\mu,\nu,\delta}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2s_1}}(E) \right)^{s_1} \cdot \left(\mathcal{P}_{\mu,\nu,\delta}^{q_2,t_2,b+\frac{\varepsilon}{2s_2}}(E) \right)^{s_2}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2,s_1a+s_2b+\varepsilon}(E) \leq \left(\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2s_1}}(E) \right)^{s_1} \cdot \left(\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_2,t_2,b+\frac{\varepsilon}{2s_2}}(E) \right)^{s_2},$$

откуда и получим доказываемое неравенство.

Теорема 1. *Функция* $\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q,t}(E)$ *является выпуклой на множестве* $E \subseteq \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$.

Доказательство. Действительно, в силу неравенства Йенсена достаточно показать, что для $q_1, q_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $s_1, s_2 \in [0,1]$ и $s_1 + s_2 = 1$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2}(E) \leq s_1 \,\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q_1,t_1}(E) + s_2 \,\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q_2,t_2}(E).$$

Положим $a = \mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q_1,t_1}(E)$, $b = \mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q_2,t_2}(E)$. Поскольку для произвольных положительных чисел ε' и ε''

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q_1,t_1,a+\varepsilon'}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu) = 0, \qquad \mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q_1,t_1,b+\varepsilon''}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu) = 0,$$

то можно найти такие конечные или счетные покрытия $\{A_i\}_i$ и $\{B_i\}_i$ множества E, для каждого элемента которых выполнено

$$\sum_i \mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2s_1}}(A_i) \leq 1, \qquad \text{где} \quad \frac{\varepsilon}{2s_1} = \varepsilon',$$
$$\sum_i \mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_2,t_2,b+\frac{\varepsilon}{2s_2}}(B_i) \leq 1, \qquad \text{где} \quad \frac{\varepsilon}{2s_2} = \varepsilon''.$$

Зафиксируем натуральное число n и пусть множество

$$E_n = \bigcup_{i,j=1}^{n} (A_i \cap B_j)$$

для любого натурального n. Тогда, используя свойства взаимной упаковочной меры, получим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2,s_1a+s_2b+\varepsilon}(E_n) = \\
&= \mathcal{P}_{\mu,\nu}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2,s_1a+s_2b+\varepsilon}\left(\bigcup_{i,j=1}^{n}(A_i\cap B_j)\right) \le \\
&\le \sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2,s_1a+s_2b+\varepsilon}(A_i\cap B_j) \le \\
&\le \sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2,s_1a+s_2b+\varepsilon}(A_i\cap B_j) = K.
\end{aligned}$$

Применяя лемму и свойства предупаковочной меры, продолжим оценку упаковочной меры множества E_n

$$\begin{aligned}
K &\le \sum_{i,j=1}^{n}\left(\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2s_1}}(A_i\cap B_j)\right)^{s_1}\cdot\left(\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_2,t_2,b+\frac{\varepsilon}{2s_2}}(A_i\cap B_j)\right)^{s_2} \le \\
&\le \left(\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2s_1}}(A_i\cap B_j)\right)^{s_1}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_2,t_2,b+\frac{\varepsilon}{2s_2}}(A_i\cap B_j)\right)^{s_2} \le \\
&\le \left(\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2s_1}}(A_i)\right)^{s_1}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_2,t_2,b+\frac{\varepsilon}{2s_2}}(B_j)\right)^{s_2} \le \\
&\le \left(n\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2s_1}}(A_i)\right)^{s_1}\cdot\left(n\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_2,t_2,b+\frac{\varepsilon}{2s_2}}(B_j)\right)^{s_2} \le n^{s_1}\cdot n^{s_2} = n.
\end{aligned}$$

Тогда для любого $n\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2}(E_n) \le s_1a+s_2b+\varepsilon.$$

Поскольку $E\subseteq\bigcup\limits_{n}E_n$, то

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2}(E) \le \mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2}\left(\bigcup_{n}E_n\right) \le \\
&\le \sup_{n}\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2}(E_n) \le s_1a+s_2b+\varepsilon.
\end{aligned}$$

Так как эта оценка справедлива для любого положительного ε, то выпуклость функции $\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q,t}(E)$ установлена.

Итак, функция $\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q,t}(E)$ является выпуклой на любом подмножестве $\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$, более того она является собственной: ее надграфик непустой и не содержит вертикальных прямых.

Следующая теорема показывает, что функция $\dim_{\mu,\nu}^{q,t}(E)$ удовлетворяет условию слабой выпуклости.

Теорема 2. *Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$, множество $E \subseteq \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$, числа $q_1, q_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $s_1, s_2 \in [0,1]$ и $s_1 + s_2 = 1$, то взаимная хаусдорфова размерность множества E обладает свойством*

$$\dim_{\mu,\nu}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2}(E) \leq s_1 \mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q_1,t_1}(E) + s_2 \dim_{\mu,\nu}^{q_2,t_2}(E)$$

в следующих случаях:

а) если оба числа $s_1q_1 + s_2q_2$, $s_1t_1 + s_2t_2$ неположительные;

б) если $s_1q_1 + s_2q_2 \leq 0$, $s_1t_1 + s_2t_2 > 0$ и мера ν является диаметрально регулярной;

в) если $s_1q_1 + s_2q_2 > 0$, $s_1t_1 + s_2t_2 \leq 0$ и мера μ является диаметрально регулярной;

г) если $s_1q_1+s_2q_2 > 0$, $s_1t_1+s_2t_2 > 0$ и меры μ, ν диаметрально регулярные.

Доказательство. Пусть задано множество $E \subseteq \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$. Рассмотрим случай, когда $s_1q_1+s_2q_2 \leq 0$, $s_1t_1+s_2t_2 > 0$ и мера ν является диаметрально регулярной. Для удобства введем следующие обозначения:

$$a = \mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q_1,t_1}(E), \quad b = \dim_{\mu,\nu}^{q_2,t_2}(E).$$

Пусть для произвольного положительного достаточно малого δ задано центрированное покрытие $\{O_i\}_i$ множества E открытыми шарами диаметрами, не превосходящими δ. Для каждого элемента покрытия O_i можно подобрать такую центрированную δ_i-упаковку шара O_i, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu,\delta_i}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2}}(O_i) \leq \mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2}}(O_i) + \frac{1}{2^i}.$$

Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ верно $\mathrm{Dim}_{\mu,\nu}^{q_1,t_1}(E) = a < a + \varepsilon$, то из определения взаимной упаковочной размерности вытекает

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2}}(E) = 0.$$

Для любого положительного числа ε также очевидно, что

$$\dim_{\mu,\nu}^{q_2,t_2}(O_i \cap E) \leq \dim_{\mu,\nu}^{q_2,t_2}(E) = b < b + \varepsilon,$$

поэтому

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}^{q_2,t_2,b+\frac{\varepsilon}{2}}(O_i \cap E) = 0.$$

Тогда какое бы мы ни взяли центрированное γ-покрытие множества $O_i \cap E$, получим

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu,\gamma}^{q_2,t_2,b+\frac{\varepsilon}{2}}(O_i \cap E) = 0.$$

Возьмем теперь такое центрированное покрытие $\{B_{r_{ij}}(x_{ij})\}_{j\in J}$ множества $O_i \cap E$ открытыми шарами диаметрами, не превосходящими $\gamma_i = \min\left\{\dfrac{\delta}{4}, \delta_i\right\}$, чтобы

$$\sum_j \varphi_{q_2}(\mu B_{r_{ij}}(x_{ij}))\varphi_{t_2}(\nu B_{r_{ij}}(x_{ij}))(2r_{ij})^{b+\frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{1}{2^i}. \tag{1}$$

По лемме Витали о покрытиях [6] из семейства $\{B_{r_{ij}}(x_{ij})\}_{j\in J}$ шаров, содержащихся в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^d$, можно выбрать конечное или счетное подсемейство $\{B_{r_{ij}}(x_{ij})\}_{j\in J'}$ непересекающихся шаров таких, что

$$\bigcup_{j\in J} B_{r_{ij}}(x_{ij}) \subseteq \bigcup_{j\in J'} B_{4r_{ij}}(x_{ij}).$$

Таким образом, в нашем распоряжении имеется центрированная γ_i-упаковка $\{B_{r_{ij}}(x_{ij})\}_{j\in J'}$ множества O_i и соответствующее ему центрированное $4\gamma_i$-покрытие $\{B_{4r_{ij}}(x_{ij})\}$ множества $O_i \cap E$, при этом справедливо

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu,\gamma_i}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2}}(O_i) \leq \mathcal{P}_{\mu,\nu,\delta_i}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2}}(O_i) \leq \mathcal{P}_{\mu,\nu,0}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2}}(O_i).$$

Используя условие диаметральной регулярности меры ν, найдется некоторая константа C_0, для которой $\nu B_{4r_{ij}}(x_{ij}) \leq C_0 \cdot \nu B_{r_{ij}}(x_{ij})$.

Тогда для $q_1, q_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $s_1, s_2 \in [0,1]$, $s_1 + s_2 = 1$, $s_1 q_1 + s_2 q_2 \le 0$ и $s_1 t_1 + s_2 t_2 > 0$ оценим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2,s_1a+s_2b+\varepsilon}_{\mu,\nu,\delta}(E) \le \sum_i \sum_{j\in J'} \varphi_{s_1q_1+s_2q_2}\big(\mu B_{4r_{ij}}(x_{ij})\big)\times \\
&\times \varphi_{s_1t_1+s_2t_2}\big(\nu B_{4r_{ij}}(x_{ij})\big)(8r_{ij})^{s_1a+s_2b+\varepsilon} \le (4C_0)^{s_1a+s_2b+\varepsilon}\times \\
&\times \sum_i \sum_{j\in J'} \varphi_{s_1q_1+s_2q_2}\big(\mu B_{r_{ij}}(x_{ij})\big)\,\varphi_{s_1t_1+s_2t_2}\big(\nu B_{r_{ij}}(x_{ij})\big)(2r_{ij})^{s_1a+s_2b+\varepsilon} \le \\
&\le (4C_0)^{s_1a+s_2b+\varepsilon}\left(\sum_i \sum_{j\in J'} \varphi_{q_1}\big(\mu B_{r_{ij}}(x_{ij})\big)\varphi_{t_1}\big(\nu B_{r_{ij}}(x_{ij})\big)(2r_{ij})^{a+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{s_1}\times \\
&\times \left(\sum_i \sum_{j\in J'} \varphi_{q_2}\big(\mu B_{r_{ij}}(x_{ij})\big)\varphi_{t_2}\big(\nu B_{r_{ij}}(x_{ij})\big)\,(2r_{ij})^{b+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{s_2} \le M.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание условие (1) выбора покрытия множества $O_i \cap E$ и соответствующей центрированной γ_i-упаковки $\{B_{r_{ij}}\}_{j\in J'}$, получим

$$\left(\sum_i \sum_{j\in J'} \varphi_{q_2}\big(\mu B_{r_{ij}}(x_{ij})\big)\varphi_{t_2}\big(\nu B_{r_{ij}}(x_{ij})\big)\,(2r_{ij})^{b+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{s_2} \le \left(\sum_i \frac{1}{2^i}\right)^{s_2} \le 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&M \le (4C_0)^{s_1a+s_2b+\varepsilon}\left(\sum_i \sum_{j\in J'} \varphi_{q_1}\big(\mu B_{r_{ij}}(x_{ij})\big)\varphi_{t_1}\big(\nu B_{r_{ij}}(x_{ij})\big)(2r_{ij})^{a+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{s_1} \le \\
&\le (4C_0)^{s_1a+s_2b+\varepsilon}\left(\sum_i \mathcal{P}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2}}_{\mu,\nu,\gamma_i}(O_i)\right)^{s_1} \le (4C_0)^{s_1a+s_2b+\varepsilon}\times \\
&\times\left(\sum_i \left(\mathcal{P}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2}}_{\mu,\nu,0}(O_i) + \frac{1}{2^i}\right)\right)^{s_1} \le (4C_0)^{s_1a+s_2b+\varepsilon}\left(\sum_i \mathcal{P}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2}}_{\mu,\nu,0}(O_i) + 1\right)^{s_1}.
\end{aligned}$$

Переходя к точной верхней грани по всем $\delta > 0$ и по всем подмножествам множества E, получим

$$\mathcal{H}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2,s_1a+s_2b+\varepsilon}_{\mu,\nu}(E) \le (4C_0)^{s_1a+s_2b+\varepsilon}\left(\sum_i \mathcal{P}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2}}_{\mu,\nu,0}(O_i) + 1\right)^{s_1}.$$

Поскольку центрированное покрытие $\{O_i\}_i$ множества E выбрано произвольно, то

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2,s_1a+s_2b+\varepsilon}(E) \leq (4C_0)^{s_1a+s_2b+\varepsilon}\Big(\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q_1,t_1,a+\frac{\varepsilon}{2}}(E)+1\Big)^{s_1} = \\ = (4C_0)^{s_1a+s_2b+\varepsilon} < \infty.$$

Поэтому для любого положительного ε получим неравенство

$$\dim_{\mu,\nu}^{s_1q_1+s_2q_2,s_1t_1+s_2t_2}(E) \leq s_1a+s_2b+\varepsilon,$$

из которого вытекает доказываемое неравенство.

Доказательство остальных случаев проводится аналогично.

Résumé

It has received that the mutual packing dimension of subset E of set $\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$ for Borel probability measures μ and ν is convex, but the mutual Hausdorff dimension of E satisfies the condition of weak convexity.

Список литературы

[1] Песин Я. Б. *Теория размерностей и динамические системы: современный взгляд и приложения.* М.; Ижевск: Изд-во института компьютерных исследований, 2002. 404 с.

[2] Богачев В. И. *Основы теории меры:* В 2 т. Т. 1. М.; Ижевск: Изд-во НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2003. 544 с.

[3] Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир, 1973. 471 с.

[4] Светова Н. Ю. *Взаимные мультифрактальные спектры I. Точные спектры* // Труды ПетрГУ. Сер. Математика. Вып. 11. 2004. С. 42–47.

[5] Федерер Г. *Геометрическая теория меры.* М.: Наука, 1987. 760 с.

[6] Falconer K. J. *Fractal geometry. Mathematical Foundations and Applications.* New York: John Wiley & Sons, 1990. 337 p.

[7] Olsen L. *A multifractal formalism* // Advances in mathematics. 1995. № 116. P. 82–195.

[8] Olsen L. *Multifractal geometry* // Progress in probability. 2000. V. 46. P. 3–37.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: nsvetova@petrsu.ru