Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 17, 2010

УДК 517.954

И. А. Чернов

СХОДИМОСТЬ СЕТОЧНО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ОТРЕЗКЕ

В статье рассматривается квазилинейная параболическая краевая задача III рода на отрезке: коэффициенты уравнения и правые части граничных условий нелинейно зависят от времени, точки и предыстории решения. Доказана сходимость разностной схемы к обобщенному решению задачи.

Постановка задачи. *Рассматриваем следующую краевую задачу для параболического уравнения в частных производных в прямоугольнике* $\Pi = [0,T] \times [0,L]$*:*

$$\partial_t c = A\big(t,x,c(\cdot,\cdot)\big)\partial_x^2 c + B\big(t,x,c(\cdot,\cdot)\big)\partial_x c - \tag{1}$$

$$- \hat{B}\big(t,x,c(\cdot,\cdot)\big)\partial_x c - E\big(t,x,c(t,x),c(\cdot,\cdot)\big), \tag{2}$$

$$\partial_x c(t,x) = (-1)^{x/L} G\big(t,x,c(t,x),c(\cdot,\cdot)\big), \quad x = 0, L, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$c(0,x) = \varphi(x) \in C^2([0,L]), \quad 0 \le \varphi \le 1, \quad x \in [0,L]. \tag{4}$$

Коэффициент $A = A\big(t,x,c(\cdot,\cdot)\big)$ является непрерывным функционалом на метрическом пространстве $txC = \Pi \times C(\Pi)$ (здесь и далее C — банахово пространство непрерывных функций с нормой $\|\cdot\|$) со следующими свойствами:

1) $0 < A^- \le A \le 1$ (т. е. множество значений функционала отделено от нуля и ограничено);
2) $A\big(\zeta,x,c(\cdot,\cdot)\big) = A\big(\zeta,x,u(\cdot,\cdot)\big)$ для любых функций $c(t,x)$ и $u(t,x)$ из $C(\Pi)$ при условии $c(t,x) = u(t,x)$ при $t \le \zeta$ (независимость от будущего);

3) частные производные по t и x существуют на txC и тоже являются непрерывными на txC функционалами с ограниченным множеством значений.

Коэффициенты B и $\hat{B}$ также являются непрерывными функционалами на txC со свойствами, аналогичными A, но имеют ряд отличий:

1) нижняя граница множества значений может быть нулевой;
2) производная функционала по t является функционалом, непрерывным лишь на пространстве $txC^{1,0} = \Pi \times C^{1,0}(\Pi)$ (пространство $C^{1,0}$ состоит из непрерывных функций с непрерывной частной производной по t с нормой $\|c\|_{1,0} = \|c\| + \|\partial_t c\|$);
3) $|\partial_t B(t,x,c)| \leq K_{1(B)} + K_{2(B)}\|\partial_t c\|$ на txC для констант K_i, не зависящих от (t,x) и c;
4) $\partial_x B \leq 0$, $\partial_x \hat{B} \leq 0$;
5) $\partial_x \hat{B} \leq 0$ не зависит от x.

Функционал $E = E\big(t,x,c,u(\cdot,\cdot)\big)$ определен и непрерывен на пространстве $txRC = txC \times R^1$ и имеет частные производные по первым трем (конечномерным) аргументам, причем

1) $\partial_x E$ непрерывна на $txRC$;
2) $\partial_t E$ непрерывна на $txRC^{1,0} = \Pi \times R \times C^{1,0}(\Pi)$;
3) $\partial_c E$ непрерывна на $txRC$ и множество ее значений положительно, отделено от нуля и ограничено: $0 < K_{3(E)} \leq \partial_c E \leq K_{4(E)}$ (либо $E \equiv 0$);
4) $|\partial_t E(t,x,c)| \leq K_{1(E)} + K_{2(E)}\|\partial_t c\|$ на $txRC$ для констант $K_{i(E)}$, не зависящих от (t,x) и c.

Без ограничения общности можно считать, что $\partial_t A + K_{2(B)} + K_{2(\hat{B})} + K_{2(E)} + K_{4(E)} < 0$ (этого всегда можно достичь заменой переменных t и x, сохраняющей остальные свойства коэффициентов).

Граничные условия (3) — нелинейные III рода. В правой части получается знак «плюс» при $x = 0$ и «минус» — при $x = L$. Правые части $G\big(t,x,c,u(\cdot,\cdot)\big)$ и их производные $\partial_t G$ и $\partial_c G$ при $x = 0, L$ являются непрерывными функционалами на пространстве $tRC = [0,T] \times R \times C(\Pi)$. При этом множества значений G, $\partial_t G$ и $\partial_c G$ ограничены; значения функции $u(t,x)$ при $t > \zeta$ не существенны; $G\big(t,x,c,u(\cdot,\cdot)\big) \geq 0$ при достаточно больших c; $G\big(t,x,c,u(\cdot,\cdot)\big) < 0$ при $c \leq 0$ и $x = 0, L$; $\partial_c G\big(t,x,c,u(\cdot,\cdot)\big) > 0$.

К таким задачам сводятся многие модели взаимодействия водорода с металлами, включая модели формирования или распада гидридов [1, 2, 3]. При этом $c(t,x)$ — концентрация водорода в образце. Ограничения на коэффициенты оправданы физическим смыслом.

Примеры функционалов указанного вида доставляют подходящие ограниченные гладкие функции с ограниченными частными производными от t, x и $c(t,\xi)$ при фиксированном ξ или от интеграла от $c(t,x)$ (или от гладкой функции от c) по $x \in [0,L]$ (физический смысл — количество водорода в образце в данный момент времени), возможна зависимость от значения c в определенной точке (например, от значения концентрации на краях), запаздывание (зависимость от $c(t-\eta,\xi)$) и так далее.

Функционалы типа коэффициента A должны допускать дифференцирование по t, что более ограничительно: примерами являются функции от t, x и вектор-функции $\eta(t)$, где $d\eta = R(t, c(\cdot,\cdot))\,dt$ и компоненты R — функционалы типа коэффициента B. Смысл η — внутреннее состояние системы.

Ограничимся двумя содержательными примерами компонент η. Это температура образца, меняющаяся вследствие тепловыделения поверхностных процессов в зависимости от теплоемкости образца, зависящей от количества содержащегося в нем водорода, в связи с чем в уравнение для температуры входит интеграл от $c(t,x)$ по $[0,L]$ [4]. Также при выпрямлении подвижного фронта в задачах с фазовым переходом положение свободной границы — компонента η, причем в уравнении возникает слагаемое с коэффициентом $\hat{B}$, зависящим от $c(t,0)$. Слагаемое типа B возникает, например, при записи уравнения в криволинейных координатах [2].

Граничные условия указанного вида (квазилинейные III рода) описывают нелинейные процессы на границах. Поскольку нормальная производная на границе имеет смысл плотности диффузионного потока, то правая часть G описывает поток. Зависимость от времени связана с переменными условиями, а от предыстории процесса — с теми же причинами, что и зависимость коэффициентов уравнения от предыстории.

Указанные выше примеры применимы и для граничных условий: поток в общем случае зависит от температуры, а выпрямление подвижного фронта приводит к появлению свободной границы в G. Кроме того, G зависит и от значения решения в текущей точке, что имеет физический смысл. Необходимое для полученных ниже результатов свойство монотонности правых частей граничных условий также вполне естественно: повышение концентрации диффузанта (или теплоты) понижает поток.

Следует отметить, что во многих моделях решение предполагается положительным; примеры доставляют абсолютная температура или концентрация. В этих случаях зависимости плотности потока от решения могут описываться функциями, не обладающими монотонностью на R. Примерами являются закон излучения Стефана — Больцмана kT^4 (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура) и квадратичная десорбция bc^2 (b — константа десорбции, c — концентрация). Применению излагаемых в настоящей работе результатов это не противоречит, поскольку формально можно переопределить правые части для отрицательных значений (соответственно положив, например, $\operatorname{sgn}(T)kT^4$ и $\operatorname{sgn}(c)bc^2$). Полученные функции совпадают на положительной полуоси с исходными, также непрерывны вместе с первой производной и монотонны. Если окажется, что решение действительно положительно (а так оно и есть при условии, что начальные значения и граничные условия согласуются с физическим смыслом), то значения потоков при отрицательных аргументах не играют роли, и решение удовлетворяет исходной задаче.

Нелинейный член нулевого порядка E в уравнении в частных производных обобщает линейный случай; подобные линейные члены возникают в моделях при учете объемных процессов, зависящих от концентрации. Примером является формирование высших гидридов. Нелинейность этого члена незначительно усложняет результаты, полученные для линейного случая, но существенно меняет расчетный алгоритм, поскольку все уравнения разностной схемы (а не только соответствующие граничным условиям) становятся нелинейными. Тем не менее система уравнений имеет особую структуру, допускающую построение эффективного расчетного алгоритма.

Опишем кратко используемый в статье подход к поставленной задаче. Построим неявную разностную схему и докажем равномерную ограниченность сеточного решения и его сеточных производных, применив аналог принципа максимума. Это влечет предкомпактность непрерывных аппроксимаций — интерполяций сеточного решения в пространстве непрерывных функций и слабую предкомпактность в соболевском пространстве функций с первыми обобщенными производными. Предел удовлетворяет некоторому интегральному тождеству, то есть является обобщенным решением задачи. Метод заимствован из [5]. Констатируем существование обобщенного решения и сходимость к нему разностной схемы.

Разностные аппроксимации. Введем в Π равномерную сетку $\bar{D}_N$ с шагами h и τ, $0 \le n \le N$, $0 \le i \le I$. Узлы этой сетки (n,i) — это точки (t_n, x_i), где $t_n = n\tau$, $x_i = ih$. Совокупность узлов при одном n назовем слоем. Введем обозначения $c(t_n, x_i) = c_n^i$ и аналогичные. Пусть c_m^i задано в $\bar{D}_{n-1}$; построим в $[0, t_{n-1}] \times [0, L]$ непрерывную функцию $\tilde{c}_{n-1}(t,x)$ линейной интерполяцией точек c_m^i. Коэффициенты уравнения (2) на слое n аппроксимируем явно: $B_n^i = B\big(t_{n-1}, x_i, \tilde{c}_{n-1}(\cdot,\cdot)\big)$ и так же для A и $\hat{B}$. Коэффициент E и правые части (3) — явно-неявным образом: $E_n^i = E\big(t_{n-1}, x_i, c_n^i, \tilde{c}_{n-1}(\cdot,\cdot)\big)$, $G_n^i = G(t_n, x_i, c_n^i, \tilde{c}_{n-1}(\cdot,\cdot))$ при $i = 0, I$.

Исключая граничные узлы, получаем множество D_N узлов (n,i) при $1 \le n \le N$, $1 \le i \le I-1$. Границу обозначим $\partial \bar{D}_N = \bar{D}_N \setminus D_N$. Введем обозначения:

$$\partial_\tau c_n^i = \frac{c_n^i - c_{n-1}^i}{\tau}, \quad \partial_h c_n^i = \frac{c_n^{i+1} - c_n^i}{h}, \quad \partial_h^2 c_n^i = \partial_h(\partial_h c_n^{i-1}).$$

В дальнейшем будут использоваться формулы сеточного дифференцирования произведения

$$\partial_h\big(\Psi_n^i \Phi_n^i\big) = \partial_h\big(\Psi_n^i\big)\Phi_n^i + \partial_h\big(\Phi_n^i\big)\Psi_n^{i+1},$$
$$\partial_\tau\big(\Psi_n^i \Phi_n^i\big) = \partial_\tau\big(\Psi_n^i\big)\Phi_n^i + \partial_\tau\big(\Phi_n^i\big)\Psi_{n-1}^i.$$

Обозначим через $\bar{D}'_N$ и $\bar{D}^\circ_N$ подмножества $\bar{D}_N$, на которых определены сеточные производные $\partial_h c_n^i$ и $\partial_\tau c_n^i$. Введем также D'_N и D°_N аналогично D_N. Заменяя производные сеточными аналогами, получим неявную схему с погрешностью аппроксимации $O(h+\tau)$:

$$\partial_\tau c_n^i = A_n^i \partial_h^2 c_n^i + B_n^i \partial_h c_n^i - \hat{B}_n^i \partial_h c_n^{i-1} - E_n^i = \ell_n^i \vec{c}_n, \tag{5}$$
$$\partial_h c_n^{I-1} = -G_n^I, \quad \partial_h c_n^0 = G_n^0, \quad c_0^i = \varphi(x_i). \tag{6}$$

Принцип максимума для сеточной задачи. Докажем аналог принципа максимума для параболических задач и ряд следствий. Экстремумы далее могут быть нестрогими.

Утверждение 1. *Пусть сеточная функция c_n^i определена в $\bar{D}_N$, удовлетворяет* (5) *в D_N и достигает в узле $(n^*, i^*) \in D_N$ максимального или минимального в $\bar{D}_N$ значения c^*. Тогда c^* ограничено независимо от узлов сетки.*

Доказательство. Пусть максимальное значение c^* достигнуто в узле $(n^*, i^*) \in D_N$. Применим (5). Левая часть неотрицательна, первые три слагаемых правой части неположительны. Последнее слагаемое $E_{n^*}^{i^*}$ также неположительно, если c^* достаточно велико. Поэтому $\partial_\tau c_{n^*}^{i^*} = \partial_{hh} c_{n^*}^{i^*} = 0$ в частности, и потому $c_{n^*-1}^{i^*} = c_{n^*}^{i^*}$. Продолжаем рассуждение для узла $(n^* - 1, i^*)$ и далее, пока не получим, что $c_{n^*}^{i^*} = \varphi(x_{i^*})$. Для отрицательного минимума доказательство такое же. $\square$

Утверждение 2. *Пусть сеточная функция c_n^i определена в $\bar{D}_N$ и удовлетворяет* (5)–(6)*. Тогда c_n^i ограничена в $\bar{D}_N$ независимо от узлов сетки.*

Доказательство. Пусть c_n^i достигает максимума c^* в узле $(n^*, i^*) \in \bar{D}_N$. Если $(n^*, i^*) \in D_N$, то вывод следует из утверждения 1. Проверим граничные узлы $\partial \bar{D}_N$. Это узлы вида $(0, i)$, $(n, 0)$ и (n, I). Пусть в узле вида $(n^*, 0)$ достигнут максимум $c_{n^*}^0 = c^*$. Из (6) с учетом условий на G получаем, что $\partial_h c_{n^*}^0 \geq 0$, и потому $c_{n^*}^1 \geq c_{n^*}^0$ при достаточно больших c^*, что противоречит наличию максимума. Аналогично рассуждение для узлов вида (n^*, I). Начальное распределение $\varphi(x)$ ограничено, поэтому $c_0^{i^*}$ также ограничено. Следовательно, максимальное значение ограничено в $\bar{D}_N$ независимо от узлов сетки. Для нижней оценки рассуждения аналогичны. $\square$

Полученная оценка имеет физический смысл. Отметим, что параметры задачи можно переопределять для слишком больших по абсолютной величине значений c.

Утверждение 3. *Пусть c_n^i удовлетворяет* (5)–(6) *в $\bar{D}_N$ при достаточно малых h и τ. Тогда $|\partial_h c_n^i|$ ограничена в $\bar{D}_N$ независимо от узлов сетки.*

Доказательство. Произведем сеточное дифференцирование уравнения (5) по h с учетом равенства $\partial_h c_n^{i+1} = \partial_h c_n^i + \partial_h \partial_h c_n^i h$:

$$\partial_\tau \partial_h c_n^i + \partial_x \hat{B} \partial_h c_n^i = A_n^i \partial_h^2 \partial_h c_n^i + \big(\partial_x A + B_n^i + \partial_x B h\big) \partial_h \partial_h c_n^i - \\ - \hat{B}_n^i \partial_h \partial_h c_n^{i-1} + \big(\partial_x B - \partial_c E\big) \partial_h c_n^i - \partial_x E c_n^i. \quad (7)$$

Производные коэффициентов — в точках вида $x_i + \varepsilon h$. Введем сеточную функцию времени M_n рекуррентно: $M_n = M_{n-1}/(1 + \tau \partial_x \hat{B}_n)$,

$M_0 = 1$. Здесь используем независимость $\partial_x \hat{B}$ от x. Функция M_n — сеточный аналог экспоненты: $\partial_\tau M_n = -\partial_x \hat{B} M_n$. Рассмотрим левую часть (7), обозначая $U_n^i = \partial_h c_n^i / M_n$:

$$\partial_\tau \left(\frac{M_n}{M_n} \partial_h c_n^i \right) + \partial_x \hat{B} \partial_h c_n^i = \partial_\tau \left(M_n \partial_h \left(\frac{c_n^i}{M_n} \right) \right) + \partial_x \hat{B} \partial_h c_n^i =$$
$$M_{n-1} \partial_\tau U_n^i + U_n^i \partial_\tau M_n + \partial_x \hat{B} \partial_h c_n^i =$$
$$= M_{n-1} \partial_\tau U_n^i - M_n U_n^i \partial_x \hat{B} + \partial_x \hat{B} \partial_h c_n^i = M_{n-1} \partial_\tau U_n^i.$$

Поскольку $\partial_x \hat{B}$ отрицательна и ограничена, то при достаточно малом шаге τ (обеспечивающем положительность знаменателя) функция $M_n > 1$. Запишем (7) в виде

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} \partial_\tau U_n^i = A_n^i \partial_h^2 U_n^i - \hat{B}_n^i \partial_h U_n^{i-1} + \big(\partial_x B - \partial_c E\big) U_n^i - \frac{\partial_x E}{M_n} +$$
$$+ \big(\partial_x A + B_n^i + \partial_x B h\big) \partial_h U_n^i.$$

Пусть U_n^i — максимальное положительное значение в узле $(n, i) \in D_N$. Тогда левая часть неотрицательна; рассмотрим правую. Первые три слагаемых неположительны. По условиям либо $E \equiv 0$, либо $\partial_c E > 0$ и отделено от нуля, а следовательно, при достаточно больших U_n^i сумма первых четырех слагаемых неположительна. Если величина $P = \partial_x A + B_n^i + \partial_x B h \geq 0$, то последнее слагаемое также неположительно. Противоречие показывает, что положительный максимум функции U_n^i, если и достигается в D_N, то ограничен независимо от h и τ, а только от функционала E.

Рассмотрим случай $P < 0$. Заметим, что $\partial_h U_n^{i-1} \geq 0$ и $h \partial_h^2 U_n^i = \partial_h U_n^i - \partial_h U_n^{i-1} \leq \partial_h U_n^i$. Поэтому $P \partial_h U_n^i \leq P h \partial_h^2 U_n^i$ и

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} \partial_\tau U_n^i \leq \big(A_n^i + Ph\big) \partial_h^2 U_n^i - \partial_x \hat{B} \partial_h c_n^i + \big(\partial_x B - \partial_c E\big) U_n^i - \frac{\partial_x E}{M_n}.$$

Поскольку $A \geq \bar{A} > 0$, а P ограничено, то при достаточно малом h множитель в скобках при $\partial_h^2 U_n^i$ положителен; противоречие получается аналогично.

Теперь проверим ограниченность U_n^i в граничных узлах; в силу (6)

$$U_0^i = \partial_h c_0^i / M_0 = \partial_h c_0^i = \varphi'(x_i + \theta), \quad 0 \leq \theta \leq h$$

ограничена; а ограниченность G влечет ограниченность производных $\partial_h c_n^{I-1}$ и $\partial_h c_n^0$ и, следовательно, функций U_n^0 и U_n^I.

Итак, мы доказали, что максимальное положительное значение функции U_n^i в $\bar{D}'_N$ ограничено независимо от шагов сетки, если они достаточно малы. Отсюда следует и ограниченность положительного максимума функции $\partial_h c_n^i = M_n U_n^i$. В самом деле, при $\tau \le \tau_0$ (при некотором $\tau_0 > 0$)

$$M_n \le (1-\mu\tau)^{-\frac{T}{\tau}} \le (1-\mu\tau_0)^{-\frac{T}{\tau_0}},$$

где $\mu = \max|\partial_x \hat{B}|$. Здесь использована монотонность функции $(1-x)^{-1/x}$ при $x \in (0,1)$, а обозначение max означает оценку сверху множества значений функционала.

Для отрицательного минимума доказательство дословно такое же. $\square$

Утверждение 4. *Пусть* c_n^i *удовлетворяет* (5)–(6) *в* $\bar{D}_N$ *при достаточно малых* h *и* τ. *Тогда* $|\partial_\tau c_n^i|$ *ограничена в* $\bar{D}_N^\circ$ *независимо от узлов сетки.*

Доказательство. Пусть максимальное по модулю значение достигается в узле $(n,i) \in D_N$; предположим, что это максимум (для минимума рассуждение такое же) и продифференцируем (5) сеточно по τ:

$$\begin{aligned}\partial_\tau\partial_\tau c_n^i = A_n^i \partial_h^2 \partial_\tau c_n^i + B_n^i \partial_h \partial_\tau c_n^i - \hat{B}_n^i \partial_h \partial_\tau c_n^{i-1} - \partial_c E \partial_\tau c_n^i +\\ + \partial_t A \partial_h^2 c_n^i + \partial_t B \partial_h c_n^i - \partial_t \hat{B} \partial_h c_n^{i-1} - \partial_t E \le\\ \le \partial_t A \partial_h^2 c_n^i + \partial_t B \partial_h c_n^i - \partial_t \hat{B} \partial_h c_n^{i-1} - \partial_t E. \quad (8)\end{aligned}$$

Левая часть неотрицательна, поэтому последнее выражение не меньше нуля.

Без ограничения общности считаем, что $|\partial_h c_n^i| \le 1$ в D_N°. Для упрощения выкладок считаем $\hat{B} = E \equiv 0$ (общий случай рассматривается аналогично). Выразим $\partial_h^2 c_n^i$ из (5) и подставим в полученное неравенство:

$$\begin{aligned}0 \le \frac{\partial_t A}{A_n^i} \partial_\tau c_n^i - \frac{\partial_t A}{A_n^i} B_n^i \partial_h c_n^i + \partial_t B \partial_h c_n^i \le\\ \le \partial_t A \partial_\tau c_n^i - \frac{\partial_t A}{A_n^i} B_n^i \partial_h c_n^i + K_{1(B)} + K_{2(B)} \partial_\tau c_n^i.\end{aligned}$$

Учитывая отрицательность суммы $\partial_t A + K_{2(B)}$, получаем, что при достаточно больших $\partial_\tau c_n^i$ правая часть отрицательна, что приводит к противоречию. Следовательно, если максимальное в $\bar{D}_N^\circ$ значение функции $\partial_\tau c_n^i$ достигается в D_N°, то оно ограничено независимо от шагов сетки.

Проверим граничные узлы. Для $n = 1$ рассмотрим (5) с учетом $c_1^i = c_0^i + \tau\partial_\tau c_1^i$:
$$\partial_\tau c_1^i = \ell_1^i c_0^i + \tau\ell_1^i \partial_\tau c_1^i - \tau E_1^i.$$
Если $\partial_\tau c_1^i > 0$ — максимальное значение, то $\partial_\tau c_1^i \le \ell_1^i c_0^i - \tau E_1^i$. Однако правая часть ограничена независимо от шагов (это следует из ограниченности коэффициентов уравнения (2) и второй производной начального распределения $\varphi(x)$). Для $i = I$ или $i = 0$ продифференцируем на сетке соответствующее условие (6):
$$\partial_h \partial_\tau c_n^0 = \partial_t G + \partial_c G(t, 0, u, c)\partial_\tau c_n^0.$$
С учетом ограниченности частных производных и положительности $\partial_c G$ получаем, что $\partial_h \partial_\tau c_n^0 > 0$ при достаточно большом положительном максимальном значении $\partial_\tau c_n^0$, что противоречит максимальности. Второе граничное условие рассматривается аналогично.

В итоге сеточная производная $\partial_\tau c_n^i$ ограничена в $\bar{D}_N^\circ$ независимо от шагов сетки. □

Решение системы. Сеточная задача (5)–(6) представляет собой систему нелинейных уравнений особой структуры: подсистемы для каждого n можно решать последовательно (послойно), каждое уравнение содержит не более трех неизвестных (считаем, что c_m^i при $m < n$ уже известны), более того: лишь одна неизвестная входит в каждое уравнение нелинейно. Для решения этой системы применим нелинейный аналог метода прогонки.

Пусть все значения c_m^i при $m < n$ уже известны; тогда определены коэффициенты A_n^i, B_n^i и $\hat{B}_n^i$ сеточной задачи. Коэффициенты E_n^i, G_n^0 и G_n^I запишем, явно выделив значения на неизвестном слое: $e_n^i(c_n^i) = E_n^i$, $g_n^0(c_n^0) = G_n^0$, $g_n^I(c_n^I) = G_n^I$. Выразим из второго уравнения (6) c_n^1:
$$c_n^1 = hg_n^0(c_n^0) + c_n^0.$$
Эта зависимость — непрерывная. Уравнения (5) позволяют непрерывно выразить c_n^{i+1} через c_n^i и c_n^{i-1}:
$$c_n^{i+1} = \frac{h^2\partial_\tau c_n^i - A_n^i c_n^{i-1} + 2A_n^i c_n^i + hB_n^i c_n^i + h^2\hat{B}_n^i \partial_h c_n^{i-1} + h^2 e_n^i(c_n^i)}{A_n^i + hB_n^i},$$

что, с учетом предыдущей формулы, означает непрерывную зависимость всех c_n^i от c_n^0. Обозначим ее $c_n^i = \Theta_n^i(c_n^0)$. Подставляя эту функцию во второе граничное условие, имеем уравнение

$$\partial_h \Theta_n^{I-1}(c_n^0) + g_n^I(\Theta_n^I(c_n^0)) = 0. \tag{9}$$

Покажем, что уравнение (9) имеет решение. В самом деле, левая часть (9) — непрерывная функция от неизвестного c_n^0. Поскольку решение в $\bar{D}_{n-1}$ уже построено, оно ограничено константой, не зависящей от узлов сетки: $|c_m^i| \leq R$. Выберем произвольное $c_n^0 > R$; в силу (6) имеем $\partial_h c_n^0 > 0$ и потому $c_n^1 > c_n^0 > R$. Вычислим $c_n^2 = \Theta_n^2(c_n^0)$ из (5); если окажется, что $R < c_n^0 \leq c_n^1 \geq c_n^2$, то значение c_n^1 является максимумом в $\bar{D}_n$ и больше R, что невозможно в силу утверждения 1. Поэтому $c_n^2 \geq c_n^1 > R$. Рассуждая аналогично, получим, что $\Theta_n^I(c_n^0) = c_n^I \geq c_n^{I-1} > R$. Это означает, что $\partial_h c_n^{I-1} \geq 0$ и $g_n^I(\Theta_n^I(c_n^0)) > 0$, то есть левая часть уравнения принимает положительное значение. Выбрав произвольное значение $c_n^0 < -R$, аналогично покажем, что левая часть уравнения принимает отрицательное значение; по теореме Больцано, найдется хотя бы одно значение $c_n^0 \in (-R, R)$, удовлетворяющее уравнению. Далее находим все $c_n^i = \Theta_n^i(c_n^0)$ (по существу это рекуррентный алгоритм). Полученное решение в $\bar{D}_n$ попадает в условия доказанных выше утверждений и потому ограничено вместе с первыми сеточными производными.

Сходимость аппроксимаций и обобщенное решение. Итак, сеточные функции c_n^i, $\partial_h c_n^i$ и $\partial_\tau c_n^i$ равномерно ограничены независимо от шагов сетки. Построим в Π функцию $\tilde{c}(t,x)$ кусочно-линейной интерполяцией сеточной функции c_n^i. По построению $\tilde{c} \in H_1(\Pi)$ (соболевское пространство функций, обладающих первыми обобщенными производными из $L_2(\Pi)$ [5, 6, 7]) при любых (достаточно малых) шагах h и τ, причем семейство $\tilde{c}_\tau^h$ ограничено по норме $H_1(\Pi)$. Выберем последовательность шагов (τ_k, h_k), сходящуюся к нулю, и соответствующую последовательность $\tilde{c}_k(t,x)$ (она ограничена в $H_1(\Pi)$). Пространство H_1 гильбертово, поэтому из ограниченной последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, за которой сохраним прежнее обозначение; ее предел обозначим $c(t,x) \in H_1(\Pi)$. Эта функция непрерывна, так как равномерно ограниченные непрерывные $\tilde{c}_k(t,x)$, обладая равномерно ограниченными кусочно-постоянными производными, равностепенно непрерывны, что влечет равномерную сходимость (возможно, после перехода к подпоследовательности — теорема Арцела).

Назовем функцию $c(t,x) \in H_1(\Pi)$ обобщенным решением [5, 6, 7] краевой задачи (2)–(4), если $c(t,x)$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int_0^L v(0,x)\varphi(x)\,dx + \int_\Pi c\partial_t v\,dxdt -$$
$$- \int_0^T A\big(t,0,c(\cdot,\cdot)\big)v(t,0)G\big(t,0,c(t,0),c(\cdot,\cdot)\big)\,dt -$$
$$- \int_0^T A\big(t,L,c(\cdot,\cdot)\big)v(t,L)G\big(t,L,c(t,L),c(\cdot,\cdot)\big)\,dt -$$
$$- \int_\Pi \partial_x\big(A(t,x,c(\cdot,\cdot))v\big)\partial_x c\,dxdt +$$
$$+ \int_\Pi \big(B-\hat{B}\big)v\partial_x c\,dxdt - \int_\Pi E\big(t,x,c(t,x),c(\cdot,\cdot)\big)v\,dxdt$$

при любой непрерывной $v(t,x) \in H_1(\Pi)$, такой, что $v(T,x) = 0$. Мотивировка определения обычная: гладкое решение краевой задачи тождеству удовлетворяет, а удовлетворяющая тождеству гладкая функция $c(t,x)$ является решением краевой задачи.

Построенная функция $c(t,x)$ является решением в смысле данного определения: на аппроксимациях тождества выполняются с погрешностью $O(h,\tau)$, а равномерная сходимость аппроксимаций и непрерывность коэффициентов задачи позволяет перейти к пределу. Предложенный сеточный метод решения краевой задачи сходится к обобщенному решению, существование которого тем доказано.

Таким образом, доказано существование обобщенного решения для класса нелинейных параболических краевых задач и построена сходящаяся неявная разностная схема. Класс задач включает, в частности, задачи со свободной границей, возникающие при моделировании взаимодействия газов с твердым телом.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00642-а «Разрешимость параболических квазилинейных краевых задач с нелинейными граничными условиями и сходимость разностных схем».

Résumé

We consider the one-dimensional quazi-linear parabolic Neumann boundary-value problem: coefficients of the partial differential equation and right-hand sides of the boundary conditions depend on time, point, and the history of the solution. Convergence of difference approximations to a weak solution to the problem is proved.

Список литературы

[1] Castro F. J., Meyer G. *Thermal desorption spectroscopy (TDS) method for hydrogen desorption characterization (I): theoretical aspects* // Journal of Alloys and Compounds. 2002. V. 330–332. P. 59–63.

[2] Заика Ю. В., Родченкова Н. И. *Диффузионный пик ТДС-спектра дегидрирования: краевая задача с подвижными границами* // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 11. С. 67–79.

[3] Chernov I., Bloch J., Gabis I. *Mathematical modelling of* UH_3 *formation* // International Journal of Hydrogen Energy. 2008. V. 33. P. 5589–5595.

[4] Чернов И. А. *Математическое моделирование экзотермического формирования гидрида* // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 1. С. 3–16.

[5] Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973.

[6] Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1976.

[7] Evans L. C. *Partial differential equations.* Providence: Amer. Math. Soc., 1991.

Институт прикладных математических исследований
Карельского Научного Центра РАН,
185000, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11,
E-mail: iachernov@yandex.ru