Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 17, 2010

УДК 511

Б. М. Широков, Э. И. Ульянова

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ДЕДЕКИНДА В КЛАССАХ ВЫЧЕТОВ

В работе устанавливается критерий слабо равномерного распределения функции Дедекинда $\psi(n)$ и приводится асимптотический ряд для распределения ее значений по классам вычетов, взаимно простых с модулем.

Функция Дедекинда $\psi(n)$ мультипликативна, а на степенях простых чисел p определяется равенством:

$$\psi(p^k) = p^{k-1}(p+1).$$

Изучение слабо равномерного распределения целозначных арифметических функций берет начало с работы [1]. Далее этому вопросу были посвящены работы [2, 8] и другие. Авторы не ставили цели привести полный список работ по названной теме.

Напомним определение слабо равномерного распределения по Наркевичу целочисленной арифметической функции $f(n)$. Если обозначить через $|M|$ мощность конечного множества M, x — действительное число, то определение будет выглядеть так.

Определение 1. *Функция $f(n)$ слабо равномерно распределена в классах вычетов по модулю N, если для любых вычетов a и b, взаимно простых с N, справедлива асимптотическая формула при $x \to \infty$*

$$|\{n \le x | f(n) \equiv a \pmod N\}| \sim |\{n \le x | f(n) \equiv b \pmod N\}|$$

при условии, что множество $\{n | (f(n), N) = 1\}$ бесконечно.

Для дальнейшего нам потребуются еще следующие обозначения: $G(N)$ — мультипликативная группа вычетов по модулю N, взаимно простых с модулем; для произвольной арифметической целозначной функции $f(n)$ через $R_k(f, N)$ будем обозначать множество тех вычетов $x \in G(N)$, для которых существует такое простое число p, что $f(p^k) \equiv x \pmod N$; M — наименьшее натуральное число k, для которого $R_k(f, N) \neq \emptyset$; $\Lambda(f, N)$ — подгруппа группы $G(N)$, порожденная множеством $R_M(f, N)$; $\nu_a(x)$ — количество тех $n \leq x$, для которых $\psi(n) \equiv a \pmod N$.

В работе [1] приводится критерий слабо равномерного распределения функции по модулю N для полиномоподобных функций, то есть функций, значения которых на степенях простых чисел являются значениями полиномов, не зависящих от выбора простого числа, на этих простых числах. Например, функция Эйлера $\varphi(n)$ на p^k равна значению многочлена $x^{k-1}(x-1)$ при $x = p$. Для функции Дедекинда соответствующий многочлен равен $x^{k-1}(x+1)$. Приведем критерий в виде следующего предложения.

Предложение. *Мультипликативная целозначная функция $f(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда, когда для любого неглавного характера $\chi(n)$ по модулю N, равного 1 на подгруппе $\Lambda(f, N)$, существует такое простое число p, что*

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi(f(p^j)}{p^{j/M}} = 0. \tag{1}$$

Следствие. *Если $\Lambda(f, N) = G(N)$, то функция $f(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N.*

Для каждого характера χ по модулю N обозначим

$$\mu(N, \chi) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{a \in G(N)} \chi(a+1).$$

Для главного характера χ_0 это число обозначим через $\lambda(N)$.

В работе будут доказаны две теоремы.

Теорема 1. *Функция $\psi(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда, когда либо N — нечетное число, большее 1, либо $N = 2q^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $q > 3$ и 3 — первообразный корень по модулю N.*

Теорема 2. *Если N удовлетворяет условиям слабо равномерного распределения функции $\psi(n)$, то для любого натурального числа n*

и любого вычета $a \in G(N)$ при $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\nu_a(x) = \frac{x}{\varphi(N)(\ln x)^{1-\mu(N,\chi)}} \sum_{\chi} P_n\left(\frac{1}{\ln x}, \chi\right) + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1-\lambda(N)}}\right),$$

где

$$P_n(t,\chi) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\chi) \frac{(\mu(N,\chi)-1)\cdots(\mu(N,\chi)-k)}{\Gamma(\mu(N,\chi))} t^k,$$

а $\lambda(N)$ — мультипликативная арифметическая функция, определяемая равенством (q — простые числа)

$$\lambda(N) = \prod_{q|N} \frac{q-2}{q-1}.$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 работы [4], но ради полноты изложения коротко его воспроизведем.

Пусть N нечетно и $N = q^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Тогда $(\psi(p), N) = 1$ в том и только в том случае, когда $p \equiv x \pmod N$ и $x = a + bq$, $1 \le a \le q-2$, $0 \le b \le q^{\alpha-1} - 1$. Значит, $M = 1$ и $|R_1(\psi, N)| = q^{\alpha-1}(q-2)$. Множество $R_1(\psi, N)$ порождает группу $G(N)$, если

$$q^{\alpha-1}(q-2) > \frac{1}{2}\varphi(q^{\alpha}) = \frac{1}{2}q^{\alpha-1}(q-1),$$

то есть при $q > 3$. Если $N = 3^{\alpha}$, то $R_1(N)$ содержит число 2, являющееся первообразным корнем по модулю, и вновь порождает $G(N)$.

Пусть N нечетно и $N = q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$. Сначала допустим, что $q_i \ne 3$. Представим $G(N)$ в виде прямого произведения

$$G(N) = G(q_1^{\alpha_1}) \times \cdots \times G(q_k^{\alpha_k}).$$

Нам достаточно убедиться, что $(1, \ldots, 1, g_i, 1, \ldots, 1) \in \Lambda(\psi, N)$ с первообразным корнем g_i по модулю $q_i^{\alpha_i}$. Для удобства записи проделаем это для $i = 1$, обозначая $g = g_1$.

Заметим, что $R_1 = R_1(\psi, N)$ содержит элементы $(g, -1, \ldots, -1)$ и $(-1, \ldots, -1)$. Если a — решение сравнения

$$2a \equiv -1 \pmod{q_1^{\alpha_1}}, \tag{2}$$

то, так как $q_1 \neq 3$, то и $(a, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{R}_1$. Поэтому

$$(1, -1, \ldots, -1) = (2, -1, \ldots, -1)(a, -1, \ldots, -1)(-1, \ldots, -1) \in \Lambda(\psi, N).$$

Отсюда получаем, что

$$(g, 1, \ldots, 1) = (g, -1, \ldots, -1)(1, -1, \ldots, -1) \in \Lambda(\psi, N).$$

Теперь будем считать, что $N = 3^{\alpha_0} q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$. Принадлежность элементов вида $(1, \ldots, 1, g_i, 1, \ldots, 1)$ подгруппе Λ для $i \geq 1$ доказывается так же, как выше. Нам осталось показать, что $(2, 1, \ldots, 1) \in \Lambda$, так как число 2 — первообразный корень по модулю 3^{α_0}.

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — суть решения сравнений (2) по модулям $q_1^{\alpha_1}, \ldots, q_k^{\alpha_k}$ соответственно. Тогда

$$(2, 1, \ldots, 1) = (-1, a_1, \ldots, a_k)(2, 2, \ldots, 2)(-1, -1, \ldots, -1) \in \Lambda.$$

Таким образом, $\Lambda(\psi, N) = G(N)$ при любом нечетном N.

Пусть теперь N четно. Если $6|N$, то $R_i = \emptyset$ для всех i, так как $\psi(p)$ четно для нечетных p и $\psi(2) = 3$. Поэтому будем считать, что $3 \not| N$. Тогда $R_1(\psi, N) = \{3\}$ и порождает $G(N)$ лишь в том случае, когда число 3 — первообразный корень по модулю N, то есть $N = 2q^\alpha$, $q > 3$ и 3 — первообразный корень.

Покажем, что слабо равномерного распределения нет, если 3 не является первообразным корнем по модулю N. Для этого воспользуемся критерием Наркевича, приведенном как предложение. Пусть χ — неглавный характер по модулю N, равный 1 на подгруппе, порожденной числом 3. Если $p > 2$, то $\chi(\psi(p^j)) = 0$ для всех $j \geq 1$. Если $p = 2$, для $j > 1$ получаем тот же результат. Так что левая часть равенства (1) равна либо 1, либо 3/2. Таким образом, функция $\psi(n)$ не обладает слабо равномерным распределением. Теорема доказана. □

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется лемма, представляющая собой теорему тауберова типа.

Для комплекснозначной функции $f(n)$ (необязательно мультипликативной) обозначим

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{3}$$

а через $S(f,x)$ сумматорную функцию коэффициентов этого ряда:

$$S(f,x)=\sum_{n\le x} f(n).$$

Далее, для некоторых действительных чисел a и b обозначим

$$\sigma_a(t)=a-\frac{b}{\ln(2+|t|)},\ -\infty<t<+\infty;$$

$$\Omega(a)=\{s|\sigma\ge\max\left\{\sigma_a(t),\frac{3a}{4}\right\},\ -\infty<t<+\infty\}.$$

Лемма 1. *Если $|f(n)|\le 1$ и для некоторого числа $a>0$ существует такая константа $c_1>0$, что в $\Omega(a)$*

$$F(s)=O(\ln^{c_1}(2+|t|)),\qquad |t|\ge 1,$$

и существует такое комплексное число z и такая регулярная в $\Omega(a)$ функция с условием $G(a)\ne 0$, что в этой области

$$F(s)=\frac{G(s)}{(s-a)^z},$$

то существует такая константа c, что $0<c<1$ и

1) *если $z=0,-1,\ldots$, то*

$$S(x)=O(x^a e^{-c\sqrt{\ln x}});$$

2) *если $z=1$, то*

$$S(x)=\frac{G(a)}{a}x^a+O(x^a e^{-c\sqrt{\ln x}});$$

3) *если $z\notin\mathbb{Z}$, то для любого $n\in\mathbb{N}$*

$$S(x)=\frac{x^a}{(\ln x)^{1-z}}P_{n-1}\left(\frac{1}{\ln x}\right)+O\left(\frac{x^a}{(\ln x)^{n+1-\operatorname{Re} z}}\right),$$

где

$$P_n(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{(z-1)\cdots(z-k)}{\Gamma(z)}t^k,$$

а коэффициенты $\quad a_k=\dfrac{1}{k!}\dfrac{d^k}{(ds)^k}\left(\dfrac{G(s)}{s}\right)(a).$

Доказательство. Нам необходим видоизмененный вариант формулы Перрона. Для действительного числа $x > 1$ обозначим

$$\delta = \delta(x) = \frac{2}{\ln x},\ \sigma_0 = 1 + \delta(x),\ T = e^{\sqrt{\ln x}},\ \Gamma_0 = \{s | s = \sigma_0 + it,\ |t \le T\}.$$

Умножим ряд (3) на x^s/s и проинтегрируем его по контуру Γ_0:

$$J(x) \overset{def}{=} \frac{1}{2\pi i} \int \Gamma_0 F(s) \frac{x^s}{s}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \int \Gamma_0 \left(\frac{x}{n}\right)^{s-1} \frac{ds}{s}.$$

Пусть ε — пока произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \varepsilon \le 1/2$. Разобьем последнюю сумму на три части: S_1 — сумма по тем n, для которых $n \le (1-\varepsilon)x$, S_2 — $(1-\varepsilon)x < n \le (1+\varepsilon)x$ и S_3 — $n > (1+\varepsilon)x$. Оценим сумму S_2. Существует такая постоянная C, что

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int \Gamma_0 \left(\frac{x}{n}\right)^{s} \frac{ds}{s} \right| \le \frac{1}{2\pi} \int -TT \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma_0} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \le C\varepsilon x \sqrt{\ln x}. \qquad (4)$$

Для оценки сумм S_1 и S_3 нам потребуется следующее неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(1+\delta}} = \int 1{-}\infty \frac{d[u]}{u^{1+\delta-}} \le (1+\delta) \int 1\infty \frac{du}{u^{1+\delta}} \le \ln x. \qquad (5)$$

В сумме S_1 в каждом слагаемом добавим и вычтем интегралы по двум контурам

$$\Gamma_+ = \{s = \sigma + iT,\ -\infty < \sigma \le \sigma_0\}, \quad \Gamma_- = \{s = \sigma - iT,\ -\infty < \sigma \le \sigma_0\}.$$

Тогда интегралы по замкнутым контурам для каждого n будут равны $f(n)$. Таким образом,

$$S_1 = \sum_{n \le (1-\varepsilon)x} f(n) + \sum_{n \le (1+\varepsilon)x} \frac{f(n)}{2\pi i} \int \Gamma_- \cup \Gamma_+ \left(\frac{x}{n}\right)^{s} \frac{ds}{s}.$$

Оценим последнюю сумму:

$$\sum_{n \le (1+\varepsilon)x} \frac{f(n)}{2\pi i} \int \Gamma_- \cup \Gamma_+ \left(\frac{x}{n}\right)^{s} \frac{ds}{s} =$$

$$= O\left(\sum_{n \le (1+\varepsilon)x} \int -\infty\sigma_0 \left(\frac{x}{n}\right)^{u} \frac{du}{\sqrt{T^2+u}} \right) = \left(\frac{x}{\varepsilon T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \right).$$

Применяя неравенство (5), получим:

$$S_1 = S((1-\varepsilon)x) + O\left(\frac{x\ln x}{\varepsilon T}\right). \tag{6}$$

В сумме S_3 у интегралов в каждом слагаемом замкнем контур интегрирования, добавляя интегралы по контурам

$$\Gamma_1 = \{s = \sigma - iT,\ \sigma_0 \le \sigma < +\infty\}, \quad \Gamma_2 = \{s = \sigma + iT,\ \sigma_0 \le \sigma < +\infty\}.$$

В виду регулярности функций внутри контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_2$, каждое слагаемое равно 0. Учтем, что в этой сумме $\left|\ln\dfrac{x}{n}\right| = \ln\dfrac{n}{x} \ge \varepsilon$. Следовательно,

$$S_3 = \sum_{n>(1+\delta)x} O\left(\frac{1}{\varepsilon}\int \sigma_0 \infty \left(\frac{x}{n}\right)^u \frac{du}{\sqrt{u^2+T^2}}\right) = O\left(\frac{x}{\varepsilon T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}\right).$$

В силу неравенства (5), имеем:

$$S_3 = O\left(\frac{x\ln x}{\varepsilon T}\right). \tag{7}$$

Из оценок (4)–(7) следует

$$J(x) = S(x(1-\varepsilon)) + O\left(\frac{x\ln x}{\varepsilon T}\right) + O(\varepsilon x\sqrt{\ln x}).$$

Заметим, что $|S(x) - S(x(1-\varepsilon))| \le \varepsilon x$, положим $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{T}}$ и найдем такое число c, $0 < c < \frac{1}{2}$, что

$$S(x) = J(x) + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}). \tag{8}$$

Применяя теперь к интегралу $J(x)$ лемму из работы [6, с. 180] (см. также теорему Б в работе [7, с. 138]), получим утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 2. Исходя из свойств характеров $\chi(n)$ по модулю N, можем представить необходимое количество следующим образом

$$\nu_a(x) = \frac{1}{\varphi(N)}\sum_{\chi}\overline{\chi}(a)\sum_{n\le x}\chi(\psi(n)). \tag{9}$$

Тем самым задача сводится к асимптотической оценке суммы

$$S(x,\chi) \stackrel{def}{=} \sum_{n\le x} \chi(\psi(n)), \tag{10}$$

являющейся суммой коэффициентов ряда Дирихле

$$F(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(\psi(n))}{n^s}. \tag{11}$$

К этому ряду мы намерены применить лемму 1. Для этого нужно проверить ее условия.

Прежде всего, $|\chi(\psi(n))| \le 1$. Значит, ряд абсолютно сходится при $\sigma > 1$. Поэтому, на основании теоремы Эйлера,

$$F(s,\chi) = \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p+1)}{p^s} + \frac{\chi(p)\chi(p+1)}{p^{2s}} + \cdots\right).$$

Рассмотрим отдельно p-й член произведения. Просуммируем прогрессию и домножим и разделим результат на $1+\chi(p+1)p^{-s}$. Тогда p-й член примет вид

$$\left(1 + \frac{\chi(p+1)}{p^s}\right)\left(1 + \frac{\chi(p(p+1))}{p^{2s} + (\chi(p+1) - \chi(p))p^s - \chi(p(p+1))}\right).$$

Обозначим

$$\Phi(s,\chi) = \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p(p+1))}{p^{2s} + (\chi(p+1) - \chi(p))p^s - \chi(p(p+1))}\right).$$

Это произведение абсолютно и равномерно сходится при $\sigma \ge 1+\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому функция $\Phi(s,\chi)$ ограничена в каждой такой полуплоскости, регулярна при $\sigma > \dfrac{1}{2}$ и не обращается там в 0.

Теперь сумма ряда (11) при $\sigma > 1$ имеет вид

$$F(s,\chi) = \Phi(s,\chi) \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p+1}{p^s}\right). \tag{12}$$

Преобразуем последнее произведение, переходя к степенному ряду для его логарифма, причем фиксируем ту ветвь логарифма, которая действительна для действительного характера и $t = 0$:

$$\ln \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p+1}{p^s}\right) = \sum_p \frac{\chi(p+1)}{p^s} + \sum_{p,k\geq 2} \frac{(-1)^k \chi^k(p+1)}{kp^{ks}} =$$
$$= \sum_p \frac{\chi(p+1)}{p^s} + a(s,\chi).$$

Через $a(s,\chi)$ обозначена сумма двойного ряда. Эта функция регулярна в полуплоскости $\sigma > \dfrac{1}{2}$ и ограничена при $\sigma \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Обозначая через $X(n)$ произвольный характер Дирихле по модулю N, преобразуем ряд по простым числам следующим образом:

$$\sum_p \frac{\chi(p+1)}{p^s} = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{a\in G(N)} \chi(a+1) \sum_X \overline{X}(a) \sum_p \frac{X(p)}{p^s}.$$

Последний ряд по простым числам легко связать с L-функциями Дирихле. Представляя при $\sigma > 1$ функцию $L(s,X)$ в виде бесконечного произведения, преобразуем его тем же путем, что и произведение в формуле (12). Тогда найдется такая регулярная при $\sigma > \dfrac{1}{2}$ и ограниченная при $\sigma \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, функция $b(s,X)$, что

$$\sum_p \frac{X(p)}{p^s} = \ln L(s,X) + b(s,X).$$

Обозначим

$$z(N,\chi,X) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{a\in G(N)} \chi(a+1)\overline{X}(a).$$

Теперь функция $F(s,\chi)$ может быть представлена в виде

$$F(s,\chi) = \Phi(s,\chi) \prod_X e^{a(s,X)+b(s,X)} \left(L(s,X)\right)^{z(N,\chi,X)}.$$

Как уже было сказано, функция

$$\Phi(s,\chi) \prod_X e^{a(s,\chi)+b(s,\chi)}$$

ограничена при $\sigma \geq \dfrac{1}{2}+\varepsilon$ при любом $\varepsilon>0$, регулярна в полуплоскости $\sigma>\dfrac{1}{2}$ и не обращается там в 0. Следовательно, все сказанное относится и к области $\Omega(1)$. Функции $L(s,X)$ при $X\neq\chi_0$ также регулярны и не равны 0 в $\Omega(1)$ и при $|t|\geq 1$ с некоторой постоянной $c_1>0$ удовлетворяют условию $L(s,X)=O(\ln^{c_1}(|t|+2))$ (см., например, [9, глава IV]).

Последнее замечание справдливо и для функции $L(s,\chi_0)(s-1)$. Заметим, что $z(N,\chi,\chi_0)=\mu(N,\chi)$. Обозначим

$$G(s,\chi)=\Phi(s,\chi)\prod_{X\neq\chi_0}e^{a(s,\chi)+b(s,\chi)}\big(L(s,X)\big)^{z(N,\chi,X)}\big(L(s,\chi_0)(s-1)\big)^{\mu(N,\chi)}.$$

Тогда

$$F(s,\chi)=\frac{G(s,\chi)}{(s-1)^{\mu(N,\chi)}},$$

причем функция $G(s,\chi)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Применяя ее для каждого характера χ и для краткости обозначая $\mu(N,\chi)$ просто через μ, получим

$$S(x,\chi)=\frac{x}{(\ln x)^{1-\mu}}P_{n-1}\left(\frac{1}{\ln x},\chi\right)+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1-\operatorname{Re}\mu}}\right), \tag{13}$$

где

$$P_n(t,\chi)=\sum_{k=0}^{n}a_k(\chi)\frac{(\mu-1)\dots(\mu-k)}{\Gamma(\mu)}t^k.$$

Для главного характера χ_0 число $\mu(N,\chi_0)=\lambda(N)$ можно вычислить. Величина $\lambda(N)$ является мультипликативной функцией. Действительно, пусть $N=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}$. Для каждого вычета $x\in G(N)$ однозначно определяется пара вычетов x_1 и x_2 по модулю $q_1^{\alpha_1}$ и $q_2^{\alpha_2}$ соответственно таким образом, что

$$x\equiv x_1 \pmod{q_1^{\alpha_1}} \quad \text{и} \quad x\equiv x_2 \pmod{q_2^{\alpha_2}}.$$

Если χ_0' и χ_0'' — главные характеры по модулям $q_1^{\alpha_1}$ и $q_2^{\alpha_2}$ соответственно, то на $G(N)$

$$\chi_0(x)=\chi_0'(x_1)\chi''(x_2).$$

Таким образом,

$$\lambda(N) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{x \in G(N)} \chi_0(x+1) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(q_1^{\alpha_1})} \sum_{x_1 \in G(q_1^{\alpha_1})} \chi_0'(x_1+1) \frac{1}{\varphi(q_2^{\alpha_2})} \sum_{x_2 \in G(q_2^{\alpha_2})} \chi_0''(x_2+1) = \lambda(q_1^{\alpha_1})\lambda(q_2^{\alpha_2}).$$

Если же $N = q^\alpha$, то $\lambda(N)$ есть количество вычетов x в $G(N)$, для которых $q \not| \, (x+1)$. Это вычеты $x = mq + n$, $0 \le m \le q^{\alpha-1} - 1$ и $1 \le n \le q-2$. Таких вычетов $q^{\alpha-1}(q-2)$. Таким образом,

$$\lambda(N) = \prod_{q^\alpha || N} \frac{q^{\alpha-1}(q-2)}{\varphi(q^\alpha)} = \prod_{q|N} \frac{q-2}{q-1}.$$

Теперь учитывая, что $\mu(N, \chi) < \lambda(N)$, подставим для каждого характера $\chi(n)$ результат (13) в формулу (9) и получим утверждение теоремы. □

Résumé

It had beleaved the conditions of weak uniformly distribution and asimtotic row for values distribution of Dedekind function in residue classes in this paper.

Список литературы

[1] Narckiewicz W. *On distribution of values of multiplicative functions in residue classes* // Acta Arithm. 1967. V. 12. No 3. P. 269–279.

[2] Narckiewicz W., Rayner F. *Distribution of values of* $\sigma_2(n)$ *in residue classes* // Monatshefte für Mathematik. 1982. V. 94. P. 133–141.

[3] Scourfild E. J. *On divisibility of* $r_2(n)$ // Glasgov Math. J. 1977. V. 18. No 1. P. 109–111.

[4] Sliva J. *On distribution of values of* $\sigma(n)$ *in residue classes* // Colloq. Math. 1973. V. 27. F. 2. P. 283–292.

[5] Фоменко О. М. *Распределение значений мультипликативных функций по простому модулю* // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1980. Т. 83. С. 218–224.

[6] Широков Б. М. *Распределение значений арифметических в классах вычетов* // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1983. Т. 121. С. 176–186.

[7] Широков Б. М. *Распределение* $d(n, \omega)$ *в классах вычетов* // Труды ПетрГУ. Серия Математика. 1995. Вып. 2. С. 136–144.

[8] Широков Б. М. *Распределение значений обобщенной суммы делителей* // Труды ПетрГУ. Серия Математика. 1996. Вып. 3. С. 176–189.

[9] Прахар К. *Распределение простых чисел.* М.: Мир, 1967.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: shirokov@petrsu.ru