Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 18, 2011

УДК 517.966

С. С. Платонов

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МЕДЛЕННОГО РОСТА НА СВЕТОВОМ КОНУСЕ В $\mathbb{R}^3$

В функциональных топологических векторных пространствах медленного роста на световом конусе X в $\mathbb{R}^3$ получено полное описание строения всех замкнутых линейных подпространств, инвариантных относительно естественного квазирегулярного представления группы $\mathbb{R}\oplus\mathrm{SO}_0(1,2)$. В частности, получено описание неприводимых и неразложимых инвариантных подпространств. Среди рассматриваемых функциональных пространств содержится пространство $\mathcal{S}'(X)$, состоящее из всех обобщенных функций медленного роста на X.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть группа Ли G действует транзитивно справа на гладком многообразии X. Для любого $g \in G$ и любой функции $f(x)$ на X положим

$$(\tau(g)f)(x) := f(xg). \tag{1.1}$$

Топологическое векторное пространство $\mathcal{F}$, состоящее из комплекснозначных функций на X (обычных или обобщенных), будем называть τ-инвариантным пространством, если из $f \in \mathcal{F}$ и $g \in G$ следует, что $\tau(g)f \in \mathcal{F}$ и отображение $g \mapsto \tau(g)f$ является непрерывным отображением из G в топологическое векторное пространство $\mathcal{F}$. Семейство операторов $\tau(g)\big|_{\mathcal{F}}$ (обычно будем обозначать их просто $\tau(g)$) определяет квазирегулярное представление группы G в топологическом векторном пространстве $\mathcal{F}$. Замкнутое линейное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$

называется инвариантным подпространством, если оно инвариантно относительно квазирегулярного представления τ.

Для каждой тройки $(G, X, \mathcal{F})$ возникает задача об описании строения всех инвариантных подпространств в пространстве $\mathcal{F}$. Эта задача является естественной задачей гармонического анализа на группах, но сложность и методы решения этой задачи сильно меняются в зависимости от тройки $(G, X, \mathcal{F})$. Здесь мы не будем рассматривать наиболее разработанные случаи, когда группа G компактная или когда $\mathcal{F}$ является гильбертовым пространством и квазирегулярное представление τ унитарное. Если пространство $\mathcal{F}$ совпадает с пространством $\mathcal{E}(X) = C^\infty(X)$ всех бесконечно дифференцируемых функций на X (все классические функциональные пространства рассматриваются с их обычными топологиями), то задачу об описании инвариантных подпространств часто называют задачей о спектральном синтезе на однородном многообразии X (см. [1–3]).

В работе [4] Л. Шварц решил задачу об описании инвариантных подпространств для случая $G = X = \mathbb{R}$, когда $\mathbb{R}$ действует на себе сдвигами, а пространство $\mathcal{F}$ совпадает с пространством $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$ или с пространством $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$. В этом случае линейное замкнутое подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ является инвариантным подпространством, если H инвариантно относительно преобразований $f(x) \mapsto f(x+a)$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

Приведем более подробное описание инвариантных подпространств в этом случае, так как оно служит образцом для решения других задач по описанию инвариантных подпространств.

Для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $V_{\lambda,r}$ r-мерное линейное подпространство, порожденное функциями

$$e^{i\lambda x}, xe^{i\lambda x}, \dots, x^{r-1}e^{i\lambda x}, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{1.2}$$

или, эквивалентно, $V_{\lambda,r}$ есть множество всех решений дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d}{dx} - i\lambda\right)^r f = 0.$$

Дополнительно обозначим

$$V_{\lambda,\infty} := \bigcup_{r\in\mathbb{N}} V_{\lambda,r}. \tag{1.3}$$

Пусть H — инвариантное подпространство в пространстве $\mathcal{F}$, где $\mathcal{F} = C(\mathbb{R})$ или $\mathcal{F} = \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Будем говорить, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит спектру инвариантного подпространства H, если $V_{\lambda,r} \subseteq H$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Обозначим $r_\lambda := \sup\{r : V_{\lambda,r} \subseteq H\}$. Число r_λ будем называть кратностью числа λ в спектре (r_λ может принимать значения из множества $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Обозначим через $\sigma = \sigma_H$ спектр инвариантного подпространства H, причем будем считать, что каждое число λ входит в σ с кратностью r_λ.

Теорема 1.1 (Л. Шварц, 1947). *Пусть $\mathcal{F}$ — одно из топологических векторных пространств $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ или $C(\mathbb{R})$, H — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$, σ — его спектр. Тогда H допускает спектральный синтез, т. е. совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки подпространств $V_{\lambda,r}$, где λ пробегает спектр σ, а $r = r_\lambda$ — кратность числа λ в σ.*

Из теоремы 1.1 вытекает, что каждое инвариантное подпространство H однозначно восстанавливается по его спектру σ. Можно дать и полное описание всевозможных спектров инвариантных подпространств в терминах нулей некоторых целых функций экспоненциального типа (см. [4] или [31]), но здесь мы не будем приводить это описание. Отметим только, что если $H \neq \mathcal{F}$, то его спектр σ_H не более чем счетный и все кратности r_λ конечные. Если $H = \mathcal{F}$, то его спектр σ состоит из всех комплексных чисел, причем каждое число входит в σ с бесконечной кратностью. Отметим также, что если $H = \{0\}$, то его спектр σ пустой.

Теорема 1.1 вместе с описанием спектров дает полное описание инвариантных подпространств в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ и $C(\mathbb{R})$. Гораздо более сложным оказался случай, когда $X = G = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $(\tau(y)f)(x) = f(x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Л. Шварц [4] высказал гипотезу, что любое инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с замыканием линейной оболочки содержащихся в H квазиполиномов, т. е. функций вида $P(x)e^{\lambda x}$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, $P(x)$ — полином от x. Эта гипотеза оказалась неверной. В 1975 г. Д. И. Гуревич [5] построил пример инвариантного подпространства $H \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, которое не содержит ни одного квазиполинома. Описание всех инвариантных подпространств в этом случае неизвестно, хотя имеется много работ, в которых описывается строение специальных классов инвариантных подпространств, таких как подпространства решений однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами или некоторых уравнений в свертках (см., например, [6–8]). Тем не менее задачу об описании всех инвариантных подпространств в пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (и в некоторых других функциональных пространствах на $\mathbb{R}^n$) можно решить, если в качестве группы G взять группу $\mathrm{ISO}(n)$ всех сохраняющих ориентацию изометрий пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [9–11]). В работах [12–16] описание инвариантных подпространств в пространстве $\mathcal{E}(X)$ и в некоторых других функциональных пространствах получено для случая, когда X — произвольное риманово симметрическое пространство ранга 1, G — группа всех сохраняющих ориентацию изометрий многообразия X. В [17, 18] получено описание инвариантных подпространств для случая, когда многообразие X совпадает с группой $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ и группа G действует на X левыми и правыми сдвигами, т. е.

$$\begin{aligned} &x(g_1, g_2) := g_1^{-1} x g_2, \quad x \in X = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \\ &(g_1, g_2) \in G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Другие случаи решения задачи об описании инвариантных подпространств см. в [19–21].

В настоящей работе рассматривается новый случай, когда можно получить решение задачи об описании инвариантных подпространств: X — верхняя пола светового конуса в $\mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R} \oplus \mathrm{SO}_0(1,2)$, $\mathcal{F}$ — произвольное функциональное пространство медленного роста на X. В частности, возможен случай, когда $\mathcal{F}$ совпадает с пространством $\mathcal{S}'(X)$ обобщенных функций медленного роста на X. Перейдем к более подробному описанию результатов.

Пространство $\mathbb{R}^3$ будем рассматривать как псевдоевклидово пространство с билинейной формой

$$\langle x, y\rangle := x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2, \quad x = (x_0, x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть X — верхняя пола светового конуса, т. е.

$$X := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, x\rangle = 0, x_0 > 0\}.$$

Через $\mathrm{SO}_0(1,2)$ обозначим группу псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$ (точнее говоря ее связную компоненту единицы). Если

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то $\mathrm{SO}_0(1,2)$ состоит из всех матриц $u = (u_{ij})$, $0 \le i,j \le 2$, таких, что

$$uJu^t = J, \quad \det u = 1, \quad u_{00} > 0,$$

где u^t — матрица, транспонированная к матрице u.

Пусть $G = \mathbb{R} \oplus \mathrm{SO}_0(1,2)$. Группа G действует справа на X: если $g = (t,u)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathrm{SO}_0(1,2)$, $x \in X$, то

$$xg := e^t xu. \tag{1.4}$$

Каждый элемент $u \in \mathrm{SO}_0(1,2)$ будем отождествлять с элементом $(0,u) \in G$ и тем самым считать, что $\mathrm{SO}_0(1,2)$ является подгруппой группы G. Элемент (t,e) ($t \in \mathbb{R}$, e — единичный элемент группы $\mathrm{SO}_0(1,2)$) будем обозначать $\gamma(t)$. Подмножество $\Gamma := \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ является подгруппой в группе G изоморфной $\mathbb{R}$. Будем называть Γ подгруппой растяжений в G. Если $x = (x_0, x_1, x_2) \in X$, то

$$x\gamma(t) = e^t x = (e^t x_0, e^t x_1, e^t x_2). \tag{1.5}$$

Отметим, что каждую точку $x \in X$ можно единственным образом представить в виде

$$x = (x_0, x_0 \cos\varphi, x_0 \sin\varphi), \quad x_0 > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

Числа (x_0, φ) можно назвать полярными координатами точки x.

Через $C(X)$, $C^m(X)$ и $\mathcal{E}(X) = C^\infty(X)$ будем обозначать пространства непрерывных, m-раз непрерывно дифференцируемых и бесконечно дифференцируемых функций соответственно (все классические пространства рассматриваются с обычными топологиями). Пусть $\mathcal{D}(X)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на X с компактным носителем, $\mathcal{D}'(X)$ — пространство обобщенных функций на X, т. е. множество всех линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(X)$. Снабженное слабой топологией $\sigma(\mathcal{D}'(X), \mathcal{D}(X))$ множество $\mathcal{D}'(X)$ является полным локально выпуклым пространством. Для $f \in \mathcal{D}'(X)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ будем обозначать через $\langle f, \varphi \rangle$ значение функционала f на функции φ. Легко видеть, что $\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{D}'(X)$ (вложение непрерывное), если отождествить функцию $f \in \mathcal{E}(X)$ с линейным функционалом на $\mathcal{D}(X)$ по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_X f(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{1.7}$$

где $f \in \mathcal{E}(X)$, $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, dx — элемент G-инвариантной меры на пространстве X. Оператор $\tau(g)$ (см. (1.1)) естественным образом распространяется на обобщенные функции по формуле

$$\langle \tau(g)f, \varphi\rangle := \langle f, \tau(g^{-1})\varphi\rangle, \quad f \in \mathcal{D}'(X), \varphi \in \mathcal{D}(X). \tag{1.8}$$

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $U(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Обычным образом действие группы G на X индуцирует действие алгебры Ли на функциях на X, т. е. если $f \in C^n(X)$, $\xi \in \mathfrak{g}$, то по определению

$$(\xi f)(x) := \left.\frac{d}{ds} f(x \exp(s\xi))\right|_{s=0}, \tag{1.9}$$

где $\exp : \mathfrak{g} \mapsto G$ — экспоненциальное отображение. При этом $\xi f \in C^{m-1}(X)$. Действие (1.8) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ продолжается до действия универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, которое будем обозначать af, $a \in U(\mathfrak{g})$.

Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ — произвольный базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ ($\dim \mathfrak{g} = 4$). Будем называть мультииндексом любой упорядоченный набор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Число $|\alpha| := n$ назовем длиной мультииндекса α. Дополнительно будем считать, что мультииндексом длины 0 является пустой набор. Будем использовать обозначение

$$\partial^\alpha f := \xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_n} f,$$

а при $\alpha = \emptyset$ полагаем $\partial^\alpha f := f$.

Для любой точки $x = (x_0, x_1, x_2) \in X$ определим число $|x|$ формулой

$$|x| := |\ln x_0|. \tag{1.10}$$

Для любого $\nu \in \mathbb{R}$ обозначим через $\mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$ множество всех функций $f \in C(X)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x)|(1 + |x|)^{-\nu} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{1.11}$$

Множество $\mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{(\nu)} := \sup_{x\in X} |f(x)|(1 + |x|)^{-\nu}. \tag{1.12}$$

Для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $\mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$ множество всех функций $f \in C^m(X)$, таких, что $\partial^\alpha f \in C_{(\nu)}(X)$ для любого мультииндекса α

с $|\alpha| \le m$. Множество $C^m_{(\nu)}(X)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|^{(m)}_{(\nu)} := \max_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha f\|_{(\nu)}. \tag{1.13}$$

Для банаховых пространств $\mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$ имеются вложения (непрерывные)

$$\mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X) \subseteq \mathfrak{C}^{m'}_{(\nu')}(X), \quad m \ge m',\, \nu' \ge \nu.$$

Пространство

$$\mathfrak{C}^\infty_{(\nu)}(X) := \bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+} \mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$$

является полным локально выпуклым пространством с топологией, порожденной семейством норм $\|\cdot\|^{(m)}_{(\nu)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, что

$$\mathfrak{C}^\infty_{(\nu)}(X) \subseteq \mathfrak{C}^\infty_{(\nu')}(X), \quad \nu' \ge \nu,$$

причем вложения непрерывные. Определим пространства

$$\mathcal{S}(X) := \bigcap_{\nu\in\mathbb{R}} \mathfrak{C}^\infty_{(\nu)}(X), \quad \mathcal{O}(X) := \bigcup_{\nu\in\mathbb{R}} \mathfrak{C}^\infty_{(\nu)}(X). \tag{1.14}$$

Пространства $\mathcal{S}(X)$ и $\mathcal{O}(X)$ являются полными локально выпуклыми пространствами с топологиями индуктивного и проективного пределов топологических векторных пространств $\mathfrak{C}^\infty_{(\nu)}(X)$. Пространство $\mathcal{S}(X)$ можно назвать пространством Шварца, так как оно состоит из бесконечно дифференцируемых функций, которые стремятся к нулю вместе со всеми производными при $|x| \to \infty$ быстрее любой функции $(1+|x|)^{-\nu}$, $\nu > 0$. Пространство $\mathcal{O}(X)$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, которые могут расти вместе со всеми производными не быстрее некоторой функции $|x|^\nu$, $\nu = \nu(f) > 0$.

Пусть $\mathcal{S}'(X)$ — сопряженное к $\mathcal{S}(X)$ пространство, т. е. множество линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{S}(X)$. Снабженное слабой топологией $\sigma(\mathcal{S}'(X), \mathcal{S}(X))$ множество $\mathcal{S}'(X)$ является полным локально выпуклым пространством. Пространство $\mathcal{S}'(X)$ естественно назвать пространством обобщенных функций на X медленного роста или пространством Шварца. Для $f \in \mathcal{S}'(X)$ и $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ будем обозначать через $\langle f, \varphi\rangle$ значение функционала f на функции φ.

Легко видеть, что $\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{S}'(X)$ (вложение непрерывное), если отождествить функцию $f \in \mathcal{O}(X)$ с линейным функционалом на $\mathcal{S}(X)$ по формуле (1.7), и что пространства $\mathcal{O}(X)$ и $\mathcal{S}'(X)$ являются τ-инвариантными (доказательство этих фактов см. в § 2).

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное τ-инвариантное функциональное пространство на X.

Определение 1.1. *τ-инвариантное функциональное пространство $\mathcal{F}$ на X называется функциональным пространством медленного роста, если*

$$\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}'(X),$$

причем вложения непрерывные.

Примерами пространств экспоненциального роста являются пространства $\mathcal{O}(X)$, $\mathcal{S}'(X)$, а также пространства

$$\mathfrak{C}_*^m := \bigcup_{\nu \in \mathbb{R}} \mathfrak{C}_{(\nu)}^m, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.15}$$

при этом пространство $\mathfrak{C}_*^m$ снабжается топологией индуктивного предела банаховых пространств $\mathfrak{C}_{(\nu)}^m$. Пространство $\mathfrak{C}_*^0$ будем также обозначать $\mathfrak{C}_*$, т. е.

$$\mathfrak{C}_* := \bigcup_{\nu \in \mathbb{R}} \mathfrak{C}_{(\nu)}, \tag{1.16}$$

при этом пространство $\mathfrak{C}_*$ снабжается топологией индуктивного предела банаховых пространств $\mathfrak{C}_{(\nu)}$. Другие примеры пространств экспоненциального роста будут приведены в § 2.

Обозначим через K следующую подгруппу в группе $\mathrm{SO}_0(1,2) \subset G$:

$$K := \left\{ k(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}. \tag{1.17}$$

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное τ-инвариантное функциональное пространство на X. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\mathcal{F}^{(n)}$ подмножество в $\mathcal{F}$, состоящее из всех функций $f(x)$, удовлетворяющих условию:

$$f(xk(\theta)) = e^{in\theta} f(x) \quad \forall k(\theta) \in K \quad (i = \sqrt{-1}). \tag{1.18}$$

Подмножество $\mathcal{F}^{(n)}$ является замкнутым линейным подпространством пространства $\mathcal{F}$. Снабженное индуцированной из пространства $\mathcal{F}$ топологией подмножество $\mathcal{F}^{(n)}$ является полным локально выпуклым пространством. В частности, определены пространства $\mathcal{E}(X)^{(n)}$, $\mathcal{E}_*(X)^{(n)}$, $\mathcal{O}(X)^{(n)}$, $\mathcal{S}'(X)^{(n)}$.

Определение 1.2. *Замкнутое линейное подпространство $H^{(n)} \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$ назовем инвариантной ячейкой (или просто ячейкой), если существует инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$, такое, что*

$$H^{(n)} = H \cap \mathcal{F}^{(n)}. \tag{1.19}$$

Инвариантное подпространство H, для которого выполняется (1.19), вообще говоря, не единственное. Будем говорить, что ячейка $H^{(n)}$ соответствует инвариантному подпространству H. Если H — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$ и известны все ячейки $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствующие H, то H однозначно восстанавливается по набору ячеек $H^{(n)}$, а именно, H совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ суммы ячеек $H^{(n)}$.

Далее описание инвариантных подпространств в $\mathcal{F}$ проводится по следующей схеме:
1) для каждого $n \in \mathbb{Z}$ описывается строение всевозможных инвариантных ячеек в $\mathcal{F}^{(n)}$;
2) определяются условия, при которых семейство ячеек $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствует одному инвариантному подпространству.

Определим дифференциальный оператор $\delta : \mathcal{E}(X) \mapsto \mathcal{E}(X)$ по формуле

$$(\delta f)(x) := \frac{d}{ds} f(x\gamma(s))\bigg|_{s=0}, \tag{1.20}$$

где $x\gamma(s)$ определено в (1.5). Для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{N}$ пусть

$$V_{\lambda,r}^{(n)} := \{f \in \mathcal{E}^{(n)}(X) : (\delta - i\lambda)^r f = 0\}, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{1.21}$$

Множество $V_{\lambda,r}^{(n)}$ является r-мерным линейным подпространством в $\mathcal{E}(X)^{(n)}$. Базис в пространстве $V_{\lambda,r}^{(n)}$ образуют функции

$$e_{\lambda,k}^{(n)}(x) := x_0^{i\lambda}(\ln x_0)^k e^{in\varphi}, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{1.22}$$

где (x_0, φ) — полярные координаты точки x (см. (1.6)). В частности, $\dim V_{\lambda,r}^{(n)} = r$.

При $r = 0$ и $r = \infty$ дополнительно полагаем

$$V^{(n)}_{\lambda,0} := \{0\}, \qquad V^{(n)}_{\lambda,\infty} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V^{(n)}_{\lambda,k}. \tag{1.23}$$

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное τ-инвариантное функциональное пространство на X, $n \in \mathbb{Z}$, $H^{(n)}$ — инвариантная ячейка в $\mathcal{F}^{(n)}$. Для любого подмножества $A \subseteq \mathcal{F}$ через $[A]$ или $[A]_{\mathcal{F}}$ будем обозначать замыкание множества A в пространстве $\mathcal{F}$.

Определение 1.3. *Будем говорить, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит спектру инвариантной ячейки $H^{(n)}$, если $V^{(n)}_{\lambda,r} \subseteq H^{(n)}$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Пусть $r_\lambda := \sup\{r : V^{(n)}_{\lambda,r} \subseteq H^{(n)}\}$. Число r_λ будем называть кратностью числа λ в спектре (r_λ может принимать значения из множества $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$).*

Обозначим через σ или $\sigma^{(n)}_H$ спектр инвариантной ячейки $H^{(n)}$, причем будем считать, что каждое число λ входит в σ с кратностью r_λ.

Определение 1.4. *Будем говорить, что инвариантная ячейка $H^{(n)} \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$ допускает спектральный синтез, если*

$$H^{(n)} = \left[\sum_{\lambda\in\sigma} V^{(n)}_{\lambda,r_\lambda}\right],$$

т. е. $H^{(n)}$ совпадает с замыканием в $\mathcal{F}^{(n)}$ суммы всех подпространств $V^{(n)}_{\lambda,r_\lambda}$, $\lambda \in \sigma$.

Таким образом, если ячейка $H^{(n)}$ допускает спектральный синтез, то она однозначно восстанавливается по своему спектру.

Далее пусть $\mathcal{F}$ — произвольное функциональное пространство на X медленного роста. $n \in \mathbb{Z}$. Строение всевозможных инвариантных ячеек $H^{(n)} \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$ описывается следующей теоремой.

Теорема 1.2.
1) *Любая инвариантная ячейка $H^{(n)} \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$ допускает спектральный синтез. Спектр σ инвариантной ячейки $H^{(n)}$ состоит только из действительных чисел, кратности r_λ чисел $\lambda \in \sigma$ могут быть как конечными, так и бесконечными.*

2) *Для того чтобы подмножество $\sigma \subseteq \mathbb{R}$ (каждое число λ может входить в σ с некоторой кратностью $r_\lambda \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) было спектром некоторой инвариантной ячейки $H^{(n)} \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(i) *подмножество $\sigma_\infty := \{\lambda \in \sigma : r_\lambda = \infty\}$ замкнуто в $\mathbb{R}$;*

(ii) *подмножество $\sigma_{fin} := \sigma \setminus \sigma_\infty$ не более чем счетное, причем все предельные точки этого множества (если они существуют) принадлежат множеству σ_∞.*

Пусть в каждом пространстве $\mathcal{F}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, фиксирована инвариантная ячейка $H^{(n)}$. Пусть $\sigma^{(n)}$ — спектр ячейки $H^{(n)}$ и $r_\lambda^{(n)}$ — кратность числа λ в наборе $\sigma^{(n)}$. Если $\lambda \notin \sigma^{(n)}$, то будем считать, что $r_\lambda^{(n)} = 0$.

В следующей теореме приводятся условия, при которых ячейки $H^{(n)}$ соответствуют единому инвариантному подпространству в $\mathcal{F}$, т. е. когда существует инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ такое, что $H^{(n)} = H \cap \mathcal{F}^{(n)}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Разумеется, такое инвариантное подпространство может быть только одно (оно должно совпадать с замыканием в $\mathcal{F}$ суммы всех ячеек $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$).

Теорема 1.3. *Набор ячеек $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствует единому инвариантному подпространству тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) *Если $\lambda \neq 0$, то кратности $r_\lambda^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, не зависят от n.*

2) *Если $\lambda = 0$, то кратности $r_0^{(n)}$ будут принимать постоянные значения, когда n изменяется на промежутках*

$$I_- = (-\infty, -1], \quad I_+ = [1, +\infty).$$

Обозначим эти кратности через $r_0^{(-)}$ и $r_0^{(+)}$ соответственно (т. е. $r_0^{(n)} = r_0^{(-)}$ при $n \leq -1$ и $r_0^{(n)} = r_0^{(+)}$ при $n \geq 1$). Числа $r_0^{(-)}$, $r_0^{(0)}$ и $r_0^{(+)}$ должны удовлетворять условию:

$$r_0^{(-)}, r_0^{(+)} \in \{r_0^{(0)}, r_0^{(0)} - 1\}$$

(если $r_0^{(0)} = 0$, то условие заменяется на $r_0^{(-)} = r_0^{(+)} = 0$).

В совокупности теоремы 1.2 и 1.3 дают полное описание инвариантных подпространств в функциональных пространствах медленного роста: каждое инвариантное подпространство описывается набором спектров $\sigma^{(n)}$, которые удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 1.3. Если ввести обозначения $s_- := r_0^{(0)} - r_0^{(-)}$ и $s_+ := r_0^{(0)} - r_0^{(+)}$, то можно также сказать, что каждое инвариантное подпространство в функциональном пространстве медленного роста описывается спектром $\sigma^{(0)}$ и, если $r_0^{(0)} \neq 0, \infty$, то еще дополнительной парой чисел (s_-, s_+), где числа s_- и s_+ могут принимать значения 0 или (-1).

Доказательство теорем 1.2 и 1.3 является основной целью работы. В качестве применения этих теорем получим описание неприводимых и неразложимых инвариантных подпространств в функциональных пространствах медленного роста на X. Инвариантное подпространство $H \subseteq \ Fc$ называется *неприводимым*, если любое инвариантное подпространство $H_1 \subseteq H$ совпадает с H или с нулевым подпространством $\{0\}$. Инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ называется *неразложимым*, если H нельзя представить в виде $H = [H_1 + H_2]$, где H_1 и H_2 — ненулевые инвариантные подпространства, такие, что $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ (здесь $[H_1 + H_2]$ — замыкание алгебраической суммы подпространств H_1 и H_2).

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное функциональное пространство медленного роста на X. $\lambda \in \mathbb{R}$. Через $\mathcal{F}(\lambda)$ обозначим инвариантное подпространство, соответствующее набору спектров $\sigma^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, где каждый спектр $\sigma^{(n)}$ состоит из одного числа λ с кратностью 1. Легко видеть, что $\mathcal{F}(\lambda)$ состоит из всех функций $f(x) \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих условию

$$f(x\gamma(s)) = e^{i\lambda s} f(x) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1.24}$$

Условие (1.24) можно записать в эквивалентном виде

$$f(ax) = a^{i\lambda} f(x) \quad \forall a > 0 \tag{1.25}$$

($ax := (ax_0, ax_1, ax_2)$), откуда вытекает, что $\mathcal{F}(\lambda)$ — подпространство в $\mathcal{F}$, состоящее из всех однородных функций степени $i\lambda$.

Из теоремы 1.3 вытекает, что подпространство $\mathcal{F}(\lambda)$ неприводимо при $\lambda \neq 0$. При $\lambda = 0$ в пространстве $\mathcal{F}(0)$ содержится единственное неприводимое одномерное инвариантное подпространство, состоящее из всех постоянных функций на X. Обозначим это подпространство через $\mathcal{F}_0(0)$. Подпространство $\mathcal{F}_0(0)$ соответствует набору спектров $\sigma_0^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\sigma_0^{(0)}$ состоит из числа 0 с кратностью 1 и $\sigma_0^{(n)} = \emptyset$ при $n \neq 0$. Подпространствами $\mathcal{F}(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\mathcal{F}_0(0)$ исчерпываются все неприводимые инвариантные подпространства в $\mathcal{F}$.

Если $H = [H_1 + H_2]$, H_1 и H_2 — инвариантные подпространства, то тогда $\sigma^{(n)} = \sigma_1^{(n)} \cup \sigma_2^{(n)}$, где $\sigma_k^{(n)}$ — спектр ячейки $H_k^{(n)}$ подпространства H_k. Легко видеть, что инвариантное подпространство H неразложимо тогда и только тогда, когда спектры $\sigma^{(n)}$ удовлетворяют одному из двух условий:

(а) Каждый спектр $\sigma^{(n)}$ состоит только из единственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ (не зависящего от n) с некоторой кратностью $r_\lambda^{(n)}$. При $\lambda \neq 0$ эти кратности обязательно одинаковые, а при $\lambda = 0$ кратности могут меняться в зависимости от n так, чтобы выполнялись условия 2) и 3) теоремы 1.3.

(б) Существует замкнутое связное подмножество $\sigma \subseteq \mathbb{R}$ такое, что $\sigma^{(n)} = \sigma$ для всех n и все точки из $\sigma^{(n)}$ имеют бесконечную кратность.

Отметим также, что любое замкнутое подмножество $\sigma \subseteq \mathbb{R}$ совпадает либо с отрезком $[a, b]$ $(a \leq b)$, либо с полуинтервалом $(-\infty, a]$ или $[a, +\infty)$, либо с $\mathbb{R}$.

Если все спектры $\sigma^{(n)}$ одинаковые и состоят из одного числа λ с кратностью r, то соответствующее инвариантное подпространство (обозначим его $\mathcal{F}(\lambda, r)$) можно описать в более явном виде. Для любого $a > 0$ определим оператор *растяжения*

$$(\Delta_a f)(x) := f(ax).$$

Функция $f(x)$ называется присоединенной однородной функцией r-го порядка степени ν $(r \in \mathbb{N},\ \nu \in \mathbb{C})$, если для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_r$

$$\left(\prod_{j=1}^{r} \left(\Delta_{a_j} - a_j^{\nu} I\right)\right) f = 0,$$

где I — тождественный оператор (см., например, [22, гл. IV, § 1]). Неразложимое инвариантное подпространство $\mathcal{F}(\lambda, r)$ состоит из всех присоединенных однородных функций r-го порядка степени $i\lambda$, которые принадлежат пространству $\mathcal{F}$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Пусть группа Ли G транзитивно действует справа на гладком многообразии X. Через $C(G)$ и $\mathcal{E}(G) = C^\infty(G)$ будем обозначать пространства непрерывных функций и бесконечно дифференцируемых функций на группе G, а через $C_c(G)$ и $\mathcal{D}(G) = C_c^\infty(G)$ пространства непрерывных и бесконечно дифференцирумых функций на группе G с компактным носителем. Соответствующие пространства на многообразии X будем обозначать $C(X)$, $\mathcal{E}(X)$, $C_c(X)$ и $\mathcal{D}(X)$. Все эти пространства снабжаются обычными топологиями и являются полными локально выпуклыми пространствами.

Пусть dg — мера Хаара на группе G. Предположим, что группа G унимодулярная (т. е. мера Хаара инвариантна относительно правых и левых сдвигов) и пусть на многобразии X существует положительная G-инвариантная мера, которую будем обозначать dx.

Через $\mathcal{D}'(X)$ будем обозначать пространство обобщенных функций на X соответственно, т. е. множество линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{E}(X)$. Для $f \in \mathcal{D}'(X))$ и $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ пусть $\langle f, \varphi\rangle$ — значение линейного функционала f на функции φ. Обычным образом пространство $C(X)$ вкладывается в $\mathcal{D}'(X)$, если положить

$$\langle f, \varphi\rangle := \int\limits_X f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad f \in C(X),\, \varphi \in \mathcal{D}(X). \tag{2.1}$$

Пространства $C_c(G)$ и $\mathcal{D}(G)$ являются ассоциативными топологическими алгебрами относительно свертки:

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(h) = \int\limits_G \varphi_1(hg^{-1})\,\varphi_2(g)\,dg, \quad h \in G. \tag{2.2}$$

Любое представление T группы G (представления групп Ли всегда предполагаются непрерывными) в полном локально выпуклом пространстве (ЛВП) V индуцирует действие алгебры $C_c(G)$ в пространстве V:

$$\varphi * v := \int\limits_G \varphi(g)\,T(g^{-1})v\,dg \quad \forall \varphi \in C_c(G),\, \forall v \in V, \tag{2.3}$$

интеграл в (2.3) можно понимать как интеграл Римана от функции со значениями в ЛВП V.

Предложение 2.1. *Пусть T и T_0 — представления группы G в полных ЛВП V и V_0 соответственно и пусть выполняются следующие условия:*

1) $V_0 \subseteq V$ и это вложение непрерывное;

2) $T(g)|_{V_0} = T_0(g) \quad \forall g \in G$;

3) для любых $v \in V$ и $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ вектор $\varphi * v \in V_0$ и отображение $v \mapsto \varphi * v$ из V в V_0 непрерывно.

Тогда между замкнутыми линейными G-инвариантными подпространствами в пространствах V и V_0 существует взаимно однозначное соответствие, которое получается сопоставлением каждому инвариантному подпространству $H_0 \subseteq V_0$ его замыкания $H = [H_0]$ в V. То же соответствие получается, если сопоставить каждому инвариантному подпространству $H \subseteq V$ подпространство $H_0 = H \cap V_0 \subseteq V_0$.

Доказательство. См. [14, предл. 2.1]. □

В дальнейшем предложение 2.1 будет применяться для случая, когда V и V_0 — τ-инвариантные функциональные пространства на X, X — верхняя пола светового конуса, $G = \mathbb{R} \oplus \mathrm{SO}_0(1,2)$, T и T_0 — ограничения квазирегулярного представления τ на пространства V и V_0 соответственно.

Функциональные пространства $\mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$ и $\mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$ ($\nu \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$) определены в § 1. В следующих предложениях будет показано, что эти пространства являются τ-инвариантными функциональными пространствами на X.

Предложение 2.2. *Пространство $\mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$, $\nu \in \mathbb{R}$, является τ-инвариантным функциональным пространством на X.*

Доказательство. 1) Чтобы доказать, что $\mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$ является τ-инвариантным функциональным пространством на X, нужно показать, что для любой функции $f(x) \in \mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$ и для любого $g \in G$ функция $(\tau(g)f)(x) = f(xg)$ также принадлежит пространству $\mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$, и отображение $g \mapsto \tau(g)f$ является непрерывным отображением из топологической группы G в банахово пространство $\mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$.

Для $x = (x_0, x_1, x_2) \in X$ число $|x|$ определено формулой (1.10). Если $g = (t, u) \in G$, $t \in \mathbb{R}$, $u = (u_{ij}) \in \mathrm{SO}_0(1,2)$, то определим число

$$|g| := |t| + \ln u_{00}. \tag{2.4}$$

Так как $u_{00} \geq 1$, то $\ln u_{00} \geq 0$ и $|g| \geq 0$. Проверим, что справедливы неравенства

$$|xg| \le \ln 2 + |x| + |g|, \quad x \in X,\ g \in G; \tag{2.5}$$
$$|g_1 g_2| \le \ln 2 + |g_1| + |g_2|, \quad g_1, g_2 \in G. \tag{2.6}$$

Если $x = (x_0, x_1, x_2)$, $g = (t, u)$, $u = (u_{ij})$, $0 \le i, j \le 2$, то

$$\begin{aligned}(xg)_0 &= e^t(x_0 u_{00} + x_1 u_{10} + x_2 u_{20}) \le \\ &\le e^t(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)^{1/2}(u_{00}^2 + u_{10}^2 + u_{20}^2)^{1/2} \le \\ &\le e^t(2x_0^2)^{1/2}(2u_{00}^2)^{1/2} = e^t 2x_0 u_{00}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

При этом использовано неравенство Коши – Буняковского и соотношения $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ и $u_{00}^2 - u_{10}^2 - u_{20}^2 = 1$.

Из (2.7) вытекает, что

$$|xg| = |\ln(xg)_0| \le \ln 2 + |\ln x_0| + |t| + \ln u_{00} = \ln 2 + |x| + |g|,$$

что доказывает неравенство (2.5). Неравенство (2.6) доказывается аналогично.

Отметим еще, что

$$|g^{-1}| = |g|, \quad g \in G, \tag{2.8}$$

и $|g| = 0$ тогда и только тогда, когда $g \in K$ (K — подгруппа в группе G, определенная в (1.3)).

Из неравенства (2.5) вытекает, что

$$(1 + |xg|) \le 2(1 + |x|)(1 + |g|). \tag{2.9}$$

Если в неравенство (2.9) подставить xg вместо x и g^{-1} вместо g, то с учетом (2.8) получим неравенство

$$(1 + |xg|) \ge \frac{1}{2}\frac{(1 + |x|)}{(1 + |g|)}. \tag{2.10}$$

2) Пусть $f \in \mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$, тогда $f(x)$ — непрерывная функция на X и

$$|f(x)|(1 + |x|)^{-\nu} \to 0 \tag{2.11}$$

при $|x| \to \infty$. Из (2.9) и (2.10) легко получить неравенство

$$(1 + |x|)^{-\nu} \le A(g, \nu)(1 + |xg|)^{-\nu}, \quad x \in X, g \in G, \nu \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

где
$$A(g,\nu) = 2^{|\nu|}(+|g|)^{|\nu|}. \tag{2.13}$$
Из (2.11) и (2.12) следует, что
$$|f(xg)|(1+|x|)^{-\nu} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty,$$
поэтому $\tau(g)f \in \mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$. Отметим также, что из (2.12) вытекает неравенство
$$\|\tau(g)f\|_{(\nu)} \le A(g,\nu)\|f\|_{(\nu)}, \quad f \in \mathfrak{C}_{(\nu)}(X), \tag{2.14}$$
где $\|\cdot\|_{(\nu)}$ — норма в пространстве $\mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$ (см. (1.12)).

3) Пусть $f \in \mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$. Докажем, что отображение $g \mapsto \tau(g)f$ из G в банахово пространство $\mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$ непрерывно. Так как операторы $\tau(g)$ образут топологическую группу, то достаточно доказать, что
$$\|\tau(g)f - f\|_{(\nu)} \to 0 \quad \text{при } g \to e, \tag{2.15}$$
где e — единичный элемент в группе G.

Пусть ε — произвольное положительное число. Из (2.11) следует, что существует число $R > 0$, такое, что при $|x| > R/2$ выполняется неравенство
$$|f(x)|(1+|x|)^{-\nu} < \frac{1}{3}\varepsilon 4^{-|\nu|}. \tag{2.16}$$
Так как $B_R := \{x \in X : |x| \le R\}$ является компактным подмножеством в X, то существует окрестность U единичного элемента в группе G, такая, что
$$|f(xg) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon(1+R)^{-|\nu|} \quad \text{при} \quad |x| \le R, g \in U. \tag{2.17}$$
Так как $|e| = 0$ и $|xg|$ непрерывно зависит от $x \in X$ и $g \in G$, то уменьшив, если это необходимо, окрестость U, можно считать, что выполняются следующие условия:
$$|g| < 1 \qquad \forall g \in U; \tag{2.18}$$
$$|xg| > R/2 \quad \text{при } |x| > R \text{ и } g \in U. \tag{2.19}$$
Из (2.17) вытекает, что
$$|f(xg) - f(x)|(1+|x|)^{-\nu} < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{при } |x| \le R, g \in U. \tag{2.20}$$

Используя формулы (2.12), (2.13), (2.16), (2.8) и (2.19), получим, что при $|x| > R$ и $g \in U$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |f(xg)|(1+|x|)^{-\nu} \le A(g,\nu)|f(xg)|(1+|xg|)^{-\nu} < \\ < A(g,\nu)\frac{1}{3}\varepsilon 4^{-|\nu|} \le \frac{1}{3}\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$|f(x)|(1+|x|)^{-\nu} < \frac{1}{3}\varepsilon 4^{-|\nu|} \le \frac{1}{3}\varepsilon, \tag{2.22}$$

а из (2.21) и (2.22) вытекает неравенство

$$|f(xg) - f(x)|(1+|x|)^{-\nu} \le \frac{2}{3}\varepsilon \quad \text{при } |x| > R, g \in U. \tag{2.23}$$

Окончательно из (2.17) и (2.23) получаем, что при $g \in U$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\tau(g)f - f\|_{(\nu)} \le \sup_{|x| \le R} |f(xg) - f(x)|(1+|x|)^{-\nu} + \\ + \sup_{|x| > R} |f(xg) - f(x)|(1+|x|)^{-\nu} < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

что доказывает (2.5) и завершает доказательство τ-инвариантности пространства $\mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$. □

Предложение 2.3. *Пространство $\mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$ ($\nu \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$) является τ-инвариантным функциональным пространством на X.*

Доказательство. 1) Чтобы доказать, что $\mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$ является τ-инвариантным функциональным пространством на X, нужно показать, что для любой функции $f(x) \in \mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$ и для любого $g \in G$ функция $(\tau(g)f)(x) = f(xg)$ также принадлежит пространству $\mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$ и отображение $g \mapsto \tau(g)f$ является непрерывным отображением из топологической группы G в банахово пространство $\mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$.

Пусть $f \in \mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, по определению, $\partial^\alpha f \in \mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$ для любого мультииндекса α с $|\alpha| \le m$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$ — присоединенное представление группы G на алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда для любых $\xi \in \mathfrak{g}$ и $g \in G$ справедливо равенство

$$\xi(\tau(g)f) = \tau(g)((\mathrm{Ad}(g)\xi)f). \tag{2.24}$$

Пусть $(r_{st}(g))$, $0 \le s,t \le 3$, — матрица оператора $\mathrm{Ad}(g)$ в базисе $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$. Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — мультииндексы, то положим по определению

$$r_{\alpha,\beta}(g) := r_{\alpha_1,\beta_1}(g) r_{\alpha_2,\beta_2}(g) \dots r_{\alpha_n,\beta_n}(g). \tag{2.25}$$

Из (2.24) следует

$$\xi_s(\tau(g)f) = \sum_{t=0}^{3} r_{st}(g)\tau(g)(\xi_t f), \tag{2.26}$$

а из (2.25) и (2.26) вытекает, что

$$\partial^\alpha(\tau(g)f) = \sum_{\beta:|\beta|=|\alpha|} r_{\alpha,\beta}(g)\tau(g)(\partial^\beta f). \tag{2.27}$$

Если $f \in \mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$, то $\partial^\beta f \in \mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$ для любого мультииндекса β с $|\beta| \le m$ и, по доказанному в предложении 2.2, $\tau(g)\partial^\beta f \in \mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$. Тогда из (2.27) вытекает, что $\partial^\alpha(\tau(g)f) \in \mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$ при $|\alpha| \le m$, откуда следует, что $\tau(g)f \in \mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$. Отметим также, что из (2.27) вытекает неравенство

$$\|\tau(g)f\|^{(m)}_{(\nu)} \le B(g,\nu)\|f\|_{(\nu)}, \tag{2.28}$$

где

$$B(g,\nu) = 4^m R(g) A(g,\nu), \quad R(g) = \max_{\alpha,\beta:|\alpha|=|\beta|\le m} |\tau_{\alpha,\beta}(g)|, \tag{2.29}$$

$\|\cdot\|^{(m)}_{\nu)}$ — норма в банаховом пространстве $\mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$ (см. (1.13)).

2) Пусть $f \in \mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда, по определению, $\partial^\alpha f \in \mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$ для любого мультииндекса α с $|\alpha| \le m$. Чтобы доказать, что отображение $g \mapsto \tau(g)f$ из G в $\mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$ непрерывно, достаточно доказать, что

$$\|\gamma(g)f - f\|^{(m)}_{(\nu)} \to 0 \quad \text{при } g \to e. \tag{2.30}$$

Далее заметим, что для доказательства (2.30) достаточно показать, что

$$\|\partial^\alpha(\tau(g)f - f)\|_{(\nu)} \to 0 \quad \text{при } g \to e \tag{2.31}$$

для любого мультииндекса α с $|\alpha| \le m$.

Пусть β — произвольный мультииндекс, удовлетворяющий условию $|\beta| = |\alpha|$. Из определения $r_{\alpha,\beta}(g)$ (см. (2.25)) следует, что

$$r_{\alpha,\beta}(e) = \begin{cases} 1 & \text{при } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{при } \beta \neq \alpha. \end{cases} \tag{2.32}$$

Используя формулу (2.27), можно написать, что

$$\partial^\alpha(\tau(g)f - f) = \sum_{\beta\neq\alpha} r_{\alpha,\beta}(g)\tau(g)\partial^\beta f + r_{\alpha,\alpha}(g)\tau(g)\partial^\alpha f - \partial^\alpha f,$$

откуда вытекает неравенство

$$\|\partial^\alpha(\tau(g)f - f)\|_{(\nu)} \leq \sum_{\beta\neq\alpha} |\tau_{\alpha,\beta}(g)|\,\|\tau(g)\partial^\beta f\|_{(\nu)} + \\ + |\tau_{\alpha,\alpha}(g) - 1|\,\|\tau(g)\partial^\alpha f\|_{(\nu)} + \|\tau(g)\partial^\alpha f - \partial^\alpha f\|_{(\nu)}. \tag{2.33}$$

Так как функции $\tau_{\alpha,\beta}(g)$ являются непрерывными функциями от g, то из (2.32) следует, что $|\tau_{\alpha,\beta}(g)| \to 0$ при $\beta \neq \alpha$ и $|\tau_{\alpha,\alpha}(g) - 1| \to 0$, а так как $\partial^\alpha f \in \mathfrak{C}_{(\nu)}(X)$, то, по предложению 2.2, $\|\tau(g)\partial^\alpha f - \partial^\alpha f\|_{(\nu)} \to 0$ при $g \to e$. Тогда из (2.33) вытекает (2.31), что завершает доказательство предложения 2.3. □

Из τ-инвариантности пространств $\mathfrak{C}^m_{(\nu)}(X)$, $m \in \mathbb{N}$, и из определения топологий в пространствах $\mathfrak{C}^\infty_{(\nu)}(X)$, $\mathcal{S}(X)$, $\mathcal{O}(X)$ и $\mathcal{S}'(X)$ вытекает, что эти пространства также являются τ-инвариантными функциональными пространствами на X.

Если $\mathcal{F}$ — любое функциональное пространство медленного роста на X (т. е. $\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}'(X)$), то пара пространств $V_0 = \mathcal{O}(X)$ и $V = \mathcal{F}$ удовлетворяет условиям предложения 2.1. Условия 1) и 2) очевидны, а для проверки условия 3) достаточно показать, что для любых $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, $f \in \mathcal{S}'(X)$ функция $\varphi * f$ принадлежит пространству $\mathcal{E}_*(X)$ и непрерывно зависит от φ. Это доказывается аналогично тому, как в теории обобщенных функций доказывается, что свертка обобщенной функции медленного роста и основной функции является функцией класса C^∞, растущей вместе со всеми производными не быстрее некоторого полинома (см., например, [26, гл. I, п. 6]). Из предложения 2.1 вытекает, что между инвариантными подпространствами в различных функциональных пространствах медленного роста на X имеется взаимно однозначное соответствие.

Приведем другие примеры функциональных пространств медленного роста. Пусть $1 \le p < \infty$, $k > 0$. Обозначим через $L^p_k(X)$ множество всех измеримых функций $f(x)$ на X, для которых

$$\mathfrak{n}_{p,k}(f) := \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, (1+|x|)^{-k} \, dx \right)^{1/p} < \infty \tag{2.34}$$

(во всех функциональных пространствах, не состоящих из непрерывных функций, функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль).

Пространство $L^p_k(X)$ является банаховым пространством относительно нормы $\mathfrak{n}_{p,k}$. Пространство

$$L^p_*(X) := \bigcup_{k>0} L^p_k(X)$$

снабдим топологией индуктивного предела банаховых пространств $L^p_K(X)$.

Проверим, что из $f \in L^p_k(X)$ следует $\tau(g)f \in L^p_k(X)$ для любого $g \in G$. Действительно, используя неравенство (2.12) и инвариантность меры dx, получим

$$\mathfrak{n}_{p,k}(\tau(g)f) = \left(\int\limits_X |f(xg)|^p (1+|x|)^{-k} \, dx \right)^{1/p} \le$$
$$\le \left(\int\limits_X A(g,k) \, |f(xg)|^p (1+|xg|)^{-k} \, dx \right)^{1/p} = \big(A(g,k)\big)^{1/p} \mathfrak{n}_{p,k}(f) < \infty.$$

Легко также проверить, что отображение $g \mapsto \tau(g)f$ из G в $L^p_k(X)$ непрерывные, т. е. $L^p_k(X)$ и $L^p_*(X)$ являются τ-инвариантными функциональными пространствами.

Пространство $L^p_*(X)$ является функциональным пространством медленного роста, т. е. $\mathcal{O}(X) \subseteq L^p_*(X) \subseteq \mathcal{S}'(X)$, причем вложения непрерывные (вложение $L^p_*(X) \subseteq \mathcal{S}'(X)$ задается формулой (1.7)).

Приведем необходимые для дальнейшего сведения из теории представлений групп Ли (см. [27–30]). Временно пусть G — произвольная связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, K — компактная подгруппа в группе G, $T : G \mapsto GL(\mathcal{F})$ — непрерывное представление группы G в полном локально выпуклом пространстве $\mathcal{F}$.

Вектор $v \in \mathcal{F}$ называется гладким (аналитическим), если отображение $g \mapsto T(g)v$ из G в $\mathcal{F}$ бесконечно дифференцируемое (соответственно аналитическое). Пусть $\mathcal{F}_\infty$ — множество гладких векторов пространства $\mathcal{F}$. На пространстве $\mathcal{F}_\infty$ определено действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которое задается формулой

$$\xi v := \frac{d}{ds} T(\exp(s\xi))v \Big|_{s=0}, \quad v \in \mathcal{F}_\infty, \quad \xi \in \mathfrak{g}, \tag{2.35}$$

где $\exp : \mathfrak{g} \mapsto G$ — экспоненциальное отображение.

Вектор $v \in \mathcal{F}$ называется K-финитным, если линейная оболочка векторов $T(u)v$ при $u \in K$ конечномерная. Пусть $\mathcal{F}_\sigma$ — множество всех гладких K-финитных векторов, а $\mathcal{F}_\#$ — множество всех аналитических K-финитных векторов пространства $\mathcal{F}$. Множества $\mathcal{F}_\sigma$ и $\mathcal{F}_\#$ являются линейными подпространствами (вообще говоря, не замкнутыми) пространства $\mathcal{F}$. Эти подпространства $\mathfrak{g}$-инвариантные, т. е. инвариантны относительно действия (2.35) алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а также K-инвариантные, т. е.

$$T(u)(\mathcal{F}_\sigma) \subseteq \mathcal{F}_\sigma, \quad T(u)(\mathcal{F}_\#) \subseteq \mathcal{F}_\# \qquad \forall u \in K.$$

Если H — замкнутое линейное T-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{F}$, то подпространства $H_\sigma := H \cap \mathcal{F}_\sigma$ и $H_\# := H \cap \mathcal{F}_\#$ являются $\mathfrak{g}$-инвариантными и K-инвариантными подпространствами в $\mathcal{F}_\sigma$ и $\mathcal{F}_\#$ соответственно. Подпространство H_σ плотно в H. Если $\mathcal{F}$ — банахово пространство, то и подпространство $H_\#$ плотно в H (см. [29, гл. 4, § 4]), но в общем случае, когда $\mathcal{F}$ — полное локально выпуклое пространство, $H_\#$ может и не быть плотным в H. Отметим также, что если W — произвольное $\mathfrak{g}$-инвариантное линейное подпространство в $\mathcal{F}_\#$, то его замыкание $[W]$ будет T-инвариантным подпространством в $\mathcal{F}$.

Обозначим через Λ множество классов эквивалентности неприводимых конечномерных представлений группы K. Для $\lambda \in \Lambda$ пусть $\rho^\lambda : K \mapsto GL(E^\lambda)$ — соответствующее неприводимое конечномерное представление группы K, E^λ — пространство представления. Если $\rho : K \mapsto GL(V)$ — произвольное представление группы K в пространстве V, то через $V^{(\lambda)}$ обозначим максимальное K-инвариантное линейное подпространство в V, представление в котором кратно ρ^λ. В частности, используя в качестве ρ ограничение представления T на подгруппу K, получаем подпространства $\mathcal{F}^{(\lambda)} \subseteq \mathcal{F}$. Подпространства

$\mathcal{F}^{(\lambda)}$ являются замкнутыми и K-инвариантными подпространствами пространства $\mathcal{F}$. Пусть

$$\mathcal{F}_{\sigma}^{(\lambda)} := \mathcal{F}^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_{\sigma}, \quad \mathcal{F}_{\#}^{(\lambda)} := \mathcal{F}^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_{\#}. \tag{2.36}$$

Для любого замкнутого T-инвариантного подпространства $H \subseteq \mathcal{F}$ полагаем:

$$H^{(\lambda)} := H \cap \mathcal{F}^{(\lambda)}, \quad H_{\sigma}^{(\lambda)} := H \cap \mathcal{F}_{\sigma}^{(\lambda)}, \quad H_{\#}^{(\lambda)} := H \cap \mathcal{F}_{\#}^{(\lambda)}. \tag{2.37}$$

Тогда подпространства H_{σ} и $H_{\#}$ раскладываются в алгебраическую прямую сумму:

$$H_{\sigma} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_{\sigma}^{(\lambda)}, \quad H_{\#} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_{\#}^{(\lambda)},$$

а так как H_{σ} плотно в H и $H_{\sigma}^{(\lambda)} \subseteq H^{(\lambda)}$, то H совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ суммы подпространств $H^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda$.

Вернемся к случаю, когда $G = \mathbb{R} \oplus \mathrm{SO}_0(1,2)$, X — верхняя пола светового конуса, $\mathcal{F}$ — функциональное пространство типа 1 или типа 2, $T = \tau$ — квазирегулярное представление группы G в пространстве $\mathcal{F}$. Компактная подгруппа K определена в (1.17). В этом случае множество Λ отождествляется с $\mathbb{Z}$, все неприводимые представления группы K одномерные и задаются формулами $\rho^n(k(\theta)) := e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ пространство $\mathcal{F}^{(n)}$ состоит из всех функций $f(x) \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих условию

$$f(x\,k(\theta)) = e^{in\theta} f(x) \quad \forall k(\theta) \in K. \tag{2.38}$$

Пусть H — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$. Как и ранее определяются подпространства $\mathcal{F}_{\sigma}$, $\mathcal{F}_{\#}$, H_{σ} и $Y_{\#}$. Подпространства $\mathcal{F}_{\sigma}^{(n)}$, $\mathcal{F}_{\#}^{(n)}$, $H^{(n)}$, $H_{\sigma}^{(n)}$ и $H_{\#}^{(n)}$ определяются формулами (2.36) и (2.37) с заменой λ на n.

Инвариантная мера на группе K задается формулой

$$\int\limits_K f(k)\,dk = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(k(\theta))\,d\theta. \tag{2.39}$$

Оператор проектирования пространства $\mathcal{F}$ на подпространство $\mathcal{F}^{(n)}$ имеет вид

$$\pi_n : f \mapsto \int\limits_K e^{-in\theta} \tau(k) f\,dk, \quad k = k(\theta), \tag{2.40}$$

где интеграл в правой части понимается как интеграл Римана от вектор-функции со значениями в локально выпуклом пространстве $\mathcal{F}$. Легко видеть, что

$$\pi_n(\mathcal{F}_\sigma) = \mathcal{F}_\sigma^{(n)}, \quad \pi_n(\mathcal{F}_\#) = \mathcal{F}_\#^{(n)}. \tag{2.41}$$

Если H — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$, то $\pi_n(H) = H^{(n)}$, $\pi_n(H_\sigma) = H_\sigma^{(n)}$, $\pi_n(H_\#) = H_\#^{(n)}$.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}$ — функциональные пространства медленного роста, причем $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ (вложение непрерывное). Пусть H_0 — произвольное инвариантное подпространство в $\mathcal{F}_0$, а $H = [H_0]$ — его замыкание в $\mathcal{F}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$*

$$H^{(n)} = [H_0^{(n)}], \tag{2.42}$$

где $[H_0^{(n)}]$ — замыкание $H_0^{(n)}$ в пространстве $\mathcal{F}$.

Доказательство. Очевидно, что $[H_0^{(n)}] \subseteq H^{(n)}$. Докажем обратное включение. Пусть $f \in H^{(n)}$. Так как $H^{(n)} \subseteq H = [H_0]$, то существует направленность $\{f_\alpha\}$ (α пробегает некоторое направленное множество), такая, что $f_\alpha \in H_0$ и $f_\alpha \to f$ в пространстве $\mathcal{F}$. Так как оператор проектирования π_n непрерывен в $\mathcal{F}$, то $\pi_n(f_\alpha) \to \pi_n(f) = f$, а так как π_n переводит H_0 в $H_0^{(n)}$, то $\pi_n(f_\alpha) \in H_0^{(n)}$. Следовательно, $f \in [H_0^{(n)}]$, откуда вытекает включение $H^{(n)} \subseteq [H_0^{(n)}]$. $\square$

Определение инвариантных ячеек в пространстве $\mathcal{F}^{(n)}$ дано в § 1 (см. определение 1.2). Пусть $s(\mathcal{F}^{(n)})$ — множество всех инвариантных ячеек в пространстве $\mathcal{F}^{(n)}$. Если выполняются условия леммы 2.1 и $H_0^{(n)} \in s(\mathcal{F}_0^{(n)})$, то из леммы 2.1 вытекает, что $[H_0^{(n)}] \in s(\mathcal{F}^{(n)})$. Определим отображения $\alpha : s(\mathcal{F}_0^{(n)}) \mapsto s(\mathcal{F}^{(n)})$ и $\beta : s(\mathcal{F}^{(n)}) \mapsto s(\mathcal{F}_0^{(n)})$ формулами

$$\alpha(H_0^{(n)}) := [H_0^{(n)}], \quad \beta(H^{(n)}) := H^{(n)} \cap \mathcal{F}_0,$$

где $H_0^{(n)} \in s(\mathcal{F}_0^{(n)})$, $H^{(n)} \in s(\mathcal{F}^{(n)})$.

Предложение 2.4. *Пусть выполняются условия леммы 2.1, тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$, отображения α и β являются взаимно обратными биективными отображениями.*

Доказательство. Пусть $H_0^{(n)}$ — инвариантная ячейка в $\mathcal{F}_0^{(n)}$, соответствующая инвариантному подпространству $H_0 \subseteq \mathcal{F}_0$, тогда, по лемме 2.1, $H^{(n)} = \alpha(H_0^{(n)})$ — инвариантная ячейка, соответствующая инвариантному подпространству $H = [H_0] \subseteq \mathcal{F}$. По предложению 2.1 $H \cap \mathcal{F}_0 = H_0$, поэтому

$$H^{(n)} \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = (H \cap \mathcal{F}_0) \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = H_0 \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = H_0^{(n)}.$$

Следовательно, $\beta(\alpha(H_0^{(n)})) = H_0^{(n)}$, т. е. $\beta \circ \alpha$ есть тождественное отображение множества $s(\mathcal{F}_0^{(n)})$ в себя.

Теперь пусть $H^{(n)}$ — произвольная инвариантная ячейка в $\mathcal{F}^{(n)}$, соответствующая инвариантному подпространству $H \subseteq \mathcal{F}$. Пусть инвариантное подпространство $H_0 = H \cap \mathcal{F}_0$ и $H_0^{(n)}$ — соответствующая ему ячейка в $\mathcal{F}_0^{(n)}$, тогда

$$H_0^{(n)} = H_0 \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = H \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = (H \cap \mathcal{F}^{(n)}) \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = H^{(n)} \cap \mathcal{F}_0^{(n)}.$$

По предложению 2.1 $[H_0] = H$, откуда по лемме 2.1 $[H_0^{(n)}] = H^{(n)}$, т. е. $\alpha(\beta(H^{(n)})) = H^{(n)}$. Следовательно, $\alpha \circ \beta$ является тождественным отображением множества $s(\mathcal{F}^{(n)})$ в себя. □

В следующем предложении дается внутреннее описание инвариантных ячеек в $\mathcal{F}^{(n)}$. Определим операторы $A_n(g)$, $n \in \mathbb{Z}$, $g \in G$, в пространстве $\mathcal{F}$ формулой

$$A_n(g)f := \pi_n(\tau(g)f), \quad f \in \mathcal{F}. \tag{2.43}$$

Очевидно, что $A_n(g)$ являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{F}$ и $A_n(g)(\mathcal{F}^{(n)}) \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$.

Предложение 2.5. *Замкнутое линейное подпространство $U \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$ является инвариантной ячейкой тогда и только тогда, когда*

$$A_n(g)(U) \subseteq U \quad \forall g \in G. \tag{2.44}$$

Доказательство. Если $U = H^{(n)}$ для некоторого инвариантного подпространства $H \subseteq \mathcal{F}$, то (2.44) очевидно.

Обратно, пусть U — замкнутое линейное подпространство в $\mathcal{F}^{(n)}$ и выполняется условие (2.44). Обозначим через H замыкание линейной оболочки всех функций вида $\tau(g)f$, $f \in U$, $g \in G$. Очевидно, что H является инвариантным подпространством в $\mathcal{F}$. Так как $\pi_n(\tau(g)f) = A_n(g)f \in U$ для всех $f \in U$, $g \in G$, то $H^{(n)} = \pi_n(H) = U$, т. е. U является инвариантной ячейкой, соответствующей инвариантному подпространству H. $\square$

Напомним, что для любых чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$ подпространство $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq \mathcal{E}^{(n)}(X)$ определено в (1.21). Из явного вида базиса в пространстве $V_{\lambda,r}^{(n)}$ (см. (1.22)) и из определения пространства $\mathcal{O}(X)$ (см. (1.14)) следует, что $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq \mathcal{O}(X)^{(n)}$ при $\lambda \in \mathbb{R}$. В дальнейшем будем всюду предполагать, что $\lambda \in \mathbb{R}$.

Следствие 2.1. *При $\lambda \in \mathbb{R}$ подпространство $V_{\lambda,r}^{(n)}$ является инвариантной ячейкой в пространстве $\mathcal{F}^{(n)}$ для любого пространства $\mathcal{F}$ медленного роста.*

Доказательство. Так как $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq \mathcal{O}(X)^{(n)}$, то подпространство $V_{\lambda,r}^{(n)}$ содержится в $\mathcal{F}^{(n)}$ для любого пространства $\mathcal{F}$ медленного роста. Так как пространство $V_{\lambda,r}^{(n)}$ конечномерное, то оно является замкнутым подпространством в $\mathcal{F}^{(n)}$. Из того, что оператор δ коммутирует с операторами $A_n(g)$, следует, что

$$A_n(g)(V_{\lambda,r}^{(n)}) \subseteq V_{\lambda,r}^{(n)},$$

поэтому, по предложению 2.3, $V_{\lambda,r}^{(n)}$ является инвариантной ячейкой в $\mathcal{F}^{(n)}$. $\square$

Предложение 2.6. *Пусть $\mathcal{F}$ — функциональное пространство медленного роста на X. Если теорема 1.2 справедлива для пространства $\mathcal{F}$, то она справедлива и для всех функциональных пространств медленного роста.*

Доказательство. 1) Предположим, что теорема 1.2 справедлива для функционального пространства медленного роста $\mathcal{F}$. Докажем, что теорема 1.2 будет справедлива и для функционального пространства $\mathcal{O}(X)$.

Пусть $H_0^{(n)}$ — произвольная инвариантная ячейка в пространстве $\mathcal{O}(X)^{(n)}$ и пусть $H^{(n)} = \left[H_0^{(n)}\right]_{\mathcal{F}}$ — замыкание ячейки $H_0^{(n)}$ в пространстве $\mathcal{F}$. По предложению 2.2 $H^{(n)}$ является инвариантной ячейкой в

$\mathcal{F}^{(n)}$. Так как теорема 1.2 справедлива для пространства $\mathcal{F}$, то ячейка $H^{(n)}$ имеет вид

$$H^{(n)} = \left[\sum_{\lambda\in\sigma} V_{\lambda,r_\lambda}\right]_{\mathcal{F}},$$

где σ — спектр ячейки $H^{(n)}$. Обозначим

$$W = \left[\sum_{\lambda\in\sigma} V_{\lambda,r_\lambda}\right]_{\mathcal{O}(X)}.$$

Так как каждое подпространство V_{λ,r_λ} является инвариантной ячейкой в $\mathcal{O}(X)^{(n)}$ (следствие 2.1), то и подпространство W будет инвариантной ячейкой в $\mathcal{O}(X)^{(n)}$. Так как $[W]_{\mathcal{F}} = H^{(n)} = [H_0^{(n)}]_{\mathcal{F}}$, то из предложения 2.2 следует, что $W = H_0^{(n)}$, т. е. теорема 1.2 справедлива для пространства $\mathcal{O}(X)$, причем спектры ячеек $H_0^{(n)}$ и $H^{(n)} = [H_0^{(n)}]_{\mathcal{F}}$ совпадают.

2) Докажем теперь, что теорема 1.2 справедлива для произвольного функционального пространства $\mathcal{F}_1$ медленного роста.

Пусть $H^{(n)}$ — инвариантная ячейка в пространстве $\mathcal{F}_1^{(n)}$. Положим $H_0^{(n)} := H^{(n)} \cap \mathcal{O}(X)^{(n)}$. Тогда $H_0^{(n)}$ — инвариантная ячейка в $\mathcal{O}(X)^{(n)}$ и, поскольку теорема 1.2 справедлива в пространстве $\mathcal{O}(X)$,

$$H_0^{(n)} = \left[\sum_{\lambda\in\sigma} V_{\lambda,r_\lambda}\right]_{\mathcal{O}(X)},$$

где σ — спектр ячейки $H_0^{(n)}$. По предложению 2.2 $[H_0^{(n)}]_{\mathcal{F}_1} = H^{(n)}$, поэтому

$$H^{(n)} = \left[\sum_{\lambda\in\sigma} V_{\lambda,r_\lambda}\right]_{\mathcal{F}_1}.$$

Следовательно, теорема 1.2 справедлива для пространства $\mathcal{F}_1$, причем спектры инвариантных ячеек $H^{(n)} \subseteq \mathcal{F}_1^{(n)}$ и $H_0^{(n)} = H^{(n)} \cap \mathcal{E}^{(n)}(X) \subseteq \mathcal{E}^{(n)}(X)$ совпадают. $\square$

Предложение 2.7. *Пусть $\mathcal{F}$ — функциональное пространство медленного роста. Если теорема 1.3 справедлива для пространства $\mathcal{F}$, то эта теорема справедлива и для всех функциональных медленного роста на X.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}$ — функциональные пространства медленного роста, причем $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ (вложение непрерывное). По предложению 2.1 между инвариантными подпространствами в $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}$ имеется взаимно однозначное соответствие. Пусть $H_0 \subseteq \mathcal{F}_0$ и $H \subseteq \mathcal{F}$ — соответствующие друг другу инвариантные подпространства, тогда $[H_0]_{\mathcal{F}} = H$ и $H \cap \mathcal{F}_0 = H_0$. Пусть $H_0^{(n)}$ и $H^{(n)}$ — ячейки инвариантных подпространств H_0 и H. По предложению 2.2 $[H_0^{(n)}]_{\mathcal{F}} = H^{(n)}$ и $H^{(n)} \cap \mathcal{F}_0^{(n)} = H_0^{(n)}$, откуда следует, что спектры ячеек $H_0^{(n)}$ и $H^{(n)}$ совпадают. Из совпадения спектров ячеек $H_0^{(n)}$ и $H^{(n)}$ легко получить, что теорема 1.3 справедлива для пространства $\mathcal{F}_0$ тогда и только тогда, когда она справедлива для пространства $\mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_1$ — произвольные функциональные пространства медленного роста, то существует пространство $\mathcal{F}_0$ медленного роста, такое, что $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1$ (вложения непрерывные). В качестве пространства $\mathcal{F}_0$ можно взять $\mathcal{O}(X)$. Если теорема 1.3 справедлива для пространства $\mathcal{F}$, то она будет справедлива и для пространства $\mathcal{F}_0$, а из справедливости для $\mathcal{F}_0$ вытекает справедливость теоремы 1.3 для пространства $\mathcal{F}_1$, что доказывает предложение 2.5. □

Из предложений 2.4 и 2.5 вытекает, что теоремы 1.2 и 1.3 достаточно доказать для какого-нибудь одного пространства медленного роста. В следующем параграфе эти теоремы будут доказаны для пространства $\mathfrak{C}_*(X)$ (см. (1.16)).

Приведем еще один результат, который будет использоваться при доказательстве теоремы 1.2. Через $\mathfrak{C}_k(\mathbb{R})$ обозначим множество всех непрерывных функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$|f(x)|\,(1+x^2)^{-k/2} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{2.45}$$

Множество $\mathfrak{C}_k(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{\infty,k} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\,(1+x^2)^{-k/2}. \tag{2.46}$$

Пространство

$$\mathfrak{C}_*(\mathbb{R}) := \bigcup_{k>0} \mathfrak{C}_k(\mathbb{R})$$

снабжается топологией индуктивного предела банаховых пространств $\mathfrak{C}_k(\mathbb{R})$ и становится полным локально выпуклым пространством.

Замкнутое линейное подпространство $H \subseteq \mathfrak{C}_*(\mathbb{R})$ будем называть инвариантным подпространством, если оно инвариантно относительно сдвигов, т. е. из $f(x) \in H$ следует $f(x+a) \in H$ для любого $a \in \mathbb{R}$. В следующем предложении дается описание инвариантных подпространств в пространстве $\mathfrak{C}_*(\mathbb{R})$. Как и в § 1, для любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$ пусть $V_{\lambda,r}$ — линейное подпространство, порожденное функциями (1.2). Очевидно, что $V_{\lambda,r} \subset \mathfrak{C}_*(\mathbb{R})$. Дополнительно обозначим

$$V_{\lambda,\infty} := \bigcup_{r\in\mathbb{N}} V_{\lambda,r}.$$

Пусть H — инвариантное подпространство в пространстве $\mathfrak{C}_*(\mathbb{R})$. Будем говорить, что число $\lambda \in \mathbb{R}$ принадлежит спектру инвариантного подпространства H, если $V_{\lambda,r} \subseteq H$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Обозначим $r_\lambda := \sup\{r : V_{\lambda,r} \subseteq H\}$. Число r_λ будем называть кратностью числа λ в спектре (r_λ может принимать значения из множества $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Обозначим через $\sigma = \sigma_H$ спектр инвариантного подпространства H, причем будем считать, что каждое число λ входит в σ с кратностью r_λ.

В [31] получено описание инвариантных подпространств в некоторых топологических векторных функциональных пространствах на $\mathbb{R}$. Среди этих пространств содержится, в частности, пространство $\mathfrak{C}_*(\mathbb{R})$. Следующее предложение является частным случаем теоремы 4.2 из [31].

Предложение 2.8. *1) Любое инвариантное подпространство $H \subseteq \mathfrak{C}_*(\mathbb{R})$ допускает спектральный синтез, т. е. совпадает с замыканием в $\mathfrak{C}_*(\mathbb{R})$ линейной оболочки подпространств $V_{\lambda,r}$, где λ пробегает спектр σ, а $r = r_\lambda$ — кратность числа λ в σ.*

2) Для того чтобы подмножество $\sigma \subseteq \mathbb{R}$ (каждое число λ может входить в σ с некоторой кратностью $r_\lambda \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) было спектром некоторого инвариантного подпространства $H \subseteq \mathcal{F}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 2) из теоремы 1.2.

§ 3. Доказательства основных теорем

В группе $\mathrm{SO}_0(1,2) \subset G$ определим 1-параметрические подгруппы

$$A := \left\{ a(t) := \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R} \right\};$$

$$N := \left\{ \mathfrak{n}(t) := \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} & t \\ -\frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & -t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Две другие 1-параметрические подгруппы группы G определены в § 1: подгруппа растяжений $\Gamma = \{\gamma(t), t \in \mathbb{R}\}$ (см. (1.5)) и подгруппа $K = \{k(\theta), \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ (см. (1.17)).

Каждый элемент ξ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G будем отождествлять с дифференциальным оператором на многообразии X, определенным формулой (1.9). В качестве базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ возьмем следующие дифференциальные операторы ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$\xi_0 f(x) := \delta f(x) = \left. \frac{d}{ds} f(x\gamma(s)) \right|_{s=0}, \qquad \xi_1 f(x) := \left. \frac{d}{d\theta} f(xk(\theta)) \right|_{\theta=0},$$

$$\xi_2 f(x) := \left. \frac{d}{ds} f(xa(s)) \right|_{s=0}, \qquad \xi_3 f(x) := \left. \frac{d}{ds} f(x\mathfrak{n}(s)) \right|_{s=0}.$$

Пусть $p_0 = (1,1,0) \in X$. Отображение

$$(t, \varphi) \mapsto x = p_0 \gamma(t) k(\varphi) = (e^t, e^t \cos\varphi, e^t \sin\varphi)$$

является диффеоморфизмом многообразия $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ ($\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) на многообразие X. Числа (t, φ) будем использовать в качестве параметров точки x на X. Легко видеть, что в параметрах (t, φ) дифференциальные операторы ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют вид:

$$\xi_0 = \partial_t,\ \xi_1 = \partial_\varphi,\ \xi_2 = (\cos\varphi)\partial_t - (\sin\varphi)\partial_\varphi,\ \xi_3 = (\sin\varphi)\partial_t + (\cos\varphi - 1)\partial_\varphi.$$

Введем еще другой базис Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, который немного отличается от базиса $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$. Пусть $Y_j := \xi_j$ при $j = 0, 1, 2$ и

$$Y_3 := \xi_3 + \xi_1 = (\sin\varphi)\partial_t + (\cos\varphi)\partial_\varphi.$$

Определим также операторы

$$Y_+ := Y_2 + iY_3, \quad Y_- := Y_2 - iY_3.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное функциональное пространство типа 1 или типа 2. Пространства $\mathcal{F}_\sigma$ и $\mathcal{F}_\#$ определены в § 1. Если H — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$, то $H_\sigma := H \cap \mathcal{F}_\sigma$, $H_\# := H \cap \mathcal{F}_\#$. Если $\xi \in \mathfrak{g}$, то $\xi(H_\sigma) \subseteq H_\sigma$ и $\xi(H_\#) \subseteq H_\#$. Как в § 2, для любого $n \in \mathbb{Z}$ определяются пространства $\mathcal{F}^{(n)}$, $\mathcal{F}_\sigma^{(n)}$, $\mathcal{F}_\#^{(n)}$, $H^{(n)}$, $H_\sigma^{(n)}$, $H_\#^{(n)}$.

Любую функцию $f(x) \in \mathcal{F}_\sigma^{(n)}$ можно представить в виде

$$f(x) = e^{in\varphi}\tilde{f}(t), \tag{3.1}$$

где $x = p_0\gamma(t)k(\varphi)$, $\tilde{f}(t) = f(p_0\gamma(t)) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Из (3.1) вытекает, что

$$Y_0 f(x) = \delta f(x) = e^{in\varphi}\partial_t\tilde{f}(t), \tag{3.2}$$

$$Y_1 f(x) = ine^{in\varphi}\tilde{f}(t), \tag{3.3}$$

$$Y_+ f(x) = e^{i(n+1)\varphi}\left(\partial_t\tilde{f}(t) - n\tilde{f}(t)\right), \tag{3.4}$$

$$Y_- f(x) = e^{i(n-1)\varphi}\left(\partial_t\tilde{f}(t) + n\tilde{f}(t)\right), \tag{3.5}$$

откуда следует, что операторы Y_0 и Y_1 переводят пространства $\mathcal{F}_\sigma^{(n)}$ и $\mathcal{F}_\#^{(n)}$ в себя, а операторы Y_+ и Y_- переводят пространства $\mathcal{F}_\sigma^{(n)}$ и $\mathcal{F}_\#^{(n)}$ в $\mathcal{F}_\sigma^{(n\pm1)}$ и в $\mathcal{F}_\#^{(n\pm1)}$ соответственно. Если $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, — инвариантные ячейки, соответствующие одному инвариантному подпространству $H \subseteq \mathcal{F}$, то операторы $Y_0 = \delta$ и Y_1 переводят $H_\sigma^{(n)}$ и $H_\#^{(n)}$ в себя, а операторы Y_+ и Y_- переводят $H_\sigma^{(n)}$ и $H_\#^{(n)}$ в $H_\sigma^{(n\pm1)}$ и $H_\#^{(n\pm1)}$ соответственно. Будем обозначать через $Y_+^{(n)}$ и $Y_-^{(n)}$ ограничения операторов Y_+ и Y_- на пространство $\mathcal{F}_\sigma^{(n)}$, тогда

$$Y_+^{(n)} : \mathcal{F}_\sigma^{(n)} \mapsto \mathcal{F}_\sigma^{(n+1)}, \qquad Y_-^{(n)} : \mathcal{F}_\sigma^{(n)} \mapsto \mathcal{F}_\sigma^{(n-1)}.$$

Из явного вида операторов δ, $Y_+^{(n)}$, $Y_-^{(n)}$ (см. (3.2), (3.4), (3.5)) вытекают следующие соотношения:

$$\delta\, Y_\pm^{(n)} = Y_\pm^{(n)}\delta, \tag{3.6}$$

$$Y_-^{(n+1)}Y_+^{(n)} = \delta^2 + \delta - n(n+1)I, \tag{3.7}$$

$$Y_+^{(n-1)}Y_+^{(n)} = \delta^2 + \delta - n(n-1)I, \tag{3.8}$$

где I — тождественный оператор.

Если функция $f(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{F}^{(n)}$, то ее можно представить в виде (3.1), где $x = p_0\gamma(t)k(\varphi)$, $\tilde{f}(t) = f(p_0\gamma(t))$ — функция на $\mathbb{R}$. Определим отображение

$$\alpha_n : f(x) \mapsto \tilde{f}(t)$$

из пространства $\mathcal{F}^{(n)}$ на некоторое функциональное пространство $\alpha_n(\mathcal{F}^{(n)})$, состоящее из функций на $\mathbb{R}$. В следующей лемме описывается образ $\alpha_n(\mathcal{F}^{(n)})$ для случаев, когда $\mathcal{F} = C(X)$ или $\mathcal{F} = \mathfrak{C}_*(X)$.

Лемма 3.1. *Отображение α_n является изоморфизмом топологических векторных пространств $C(X)^{(n)}$ на $C(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{C}_*(X)^{(n)}$ на $\mathfrak{C}_*(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Так как (t, φ) являются гладкими (и тем более непрерывными) параметрами на X, то функция $f(x) = e^{in\varphi}\tilde{f}(t)$ непрерывна на X тогда и только тогда, когда функция $\tilde{f}(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Поэтому α_n биективно отображает $C(X)^{(n)}$ на $C(\mathbb{R})$ и, как легко видеть, является изоморфизмом этих топологических векторных пространств.

Пусть $f(x) \in \mathfrak{C}_*(X)^{(n)}$. Заметим, что $|x| = |t|$ при $x = p_0\gamma(t)k(\varphi) \in X$, где $|x|$ определяется формулой (1.10). Поэтому функция $f(x)$ удовлетворяет условию (1.11) тогда и только тогда, когда функция $\tilde{f}(t)$ удовлетворяет условию (2.45) и при этом

$$\|f\|_{(k)} = \|\tilde{f}\|_{\infty,k}.$$

Следовательно, отображение α_n является изоморфизмом топологических векторных пространств $\mathfrak{C}_*(X)^{(n)}$ и $\mathfrak{C}_*(\mathbb{R})$. □

Лемма 3.2. *Функции из пространства $V_{\lambda,r}^{(n)}$ являются аналитическими векторами квазирегулярного представления τ в топологическом векторном пространстве $\mathfrak{C}_*(X)$, т. е.*

$$V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq \mathfrak{C}_*(X)_{\#}^{(n)}.$$

Доказательство. Базис в пространстве $V_{\lambda,r}^{(n)}$ образуют функции (1.22), которые можно также записать в виде

$$e_{\lambda,j}^{(n)}(x) := t^j e^{\lambda t} e^{in\varphi}, \quad j = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{3.9}$$

при $x = p_0\gamma(t)k(\varphi) \in X$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на пространстве $C^\infty(X)$ по формуле (1.9), и это действие естественным образом продолжается до действия универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Будем обозначать это действие через af при $a \in U(\mathfrak{g})$, $f \in C^\infty(X)$. С другой стороны, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на гладких функциях на группе G по формуле

$$(\mathfrak{R}_\xi \Phi)(g) := \left.\frac{d}{ds}\Phi(g\exp(s\xi))\right|_{s=0}, \tag{3.10}$$

$\xi \in \mathfrak{g}$, $\Phi(g) \in C^\infty(G)$. Это действие также продолжается до действия универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Будем обозначать это действие $\mathfrak{R}_a\Phi$, $a \in U(\mathfrak{g})$, при этом

$$\mathfrak{R}_{ab}\Phi = \mathfrak{R}_a(\mathfrak{R}_b\Phi) \qquad \forall a, b \in U(\mathfrak{g}).$$

Для любой функции $f \in C^\infty(X)$ определим функцию $\Phi_f(g) := \tau(g)f$. Функция Φ_f является гладкой (класса C^∞) функцией на группе G со значениями в топологическом векторном пространстве $C^\infty(X)$. Легко видеть, что справедливо равенство

$$\mathfrak{R}_a\Phi_f = \varphi_{af} \qquad \forall f \in C^\infty(X), a \in U(\mathfrak{g}). \tag{3.11}$$

Определим следующий элемент $\Delta \in U(\mathfrak{g})$:

$$\Delta := \frac{1}{2}(Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - Y_0), \tag{3.12}$$

где Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 — введенный ранее базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Если рассматривать Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 как дифференциальные операторы на X, то

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad f \in C^\infty(X), \quad x = p_0\gamma(t)k(\varphi). \tag{3.13}$$

Из (3.9) и (3.13) легко получить, что каждая функция $u(x) = e^{(n)}_{\lambda,j}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\Delta - \lambda^2 + n^2)^j u = 0. \tag{3.14}$$

Возьмем произвольное число d, удовлетворяющее условию $d > |\lambda|$. Тогда все функции $e^{(n)}_{\lambda,j}$, $n \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, принадлежат пространству

$\mathfrak{C}_d^\infty(X)$ и, в частности, банахову пространству $\mathfrak{C}_d(X)$. Пусть $u(x) = e_{\lambda,j}^{(n)}(x)$. Рассмотрим функцию $\Phi_u(g) := \tau(g)u$ на группе G со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{C}_d(X)$. Из (3.11) и (3.14) вытекает, что

$$(\mathfrak{R}_\Delta - \lambda^2 + n^2)^j \Phi_u = \Phi_{(\Delta-\lambda^2+n^2)^j u} = 0.$$

Оператор $\mathfrak{R}_\Delta$ является эллиптическим дифференциальным оператором на группе Ли G, поэтому функция Φ_u удовлетворяет эллиптическому дифференциальному уравнению

$$(\mathfrak{R}_\Delta - \lambda^2 + n^2)^j \Phi_u = 0.$$

Из теоремы регулярности для решений эллиптических дифференциальных уравнений (см., например, [32, приложения 4 и 5]) следует, что функция $\Phi_u(g)$ является аналитической функцией на многообразии G, т. е. функция $u(x)$ является аналитическим вектором представления τ в банаховом пространстве $\mathfrak{C}_d(X)$. Следовательно, $u \in \mathfrak{C}_d(X)_\#^{(n)} \subset \mathfrak{C}_*(X)_\#^{(n)}$. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Из предложения 2.4 вытекает, что теорему 1.2 достаточно доказать для пространства $\mathfrak{C}_*(X)$. Пусть $\mathcal{F} = \mathfrak{C}_*(X)$, через $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство $\mathfrak{C}_*(\mathbb{R})$. По лемме 3.1 для любого $n \in \mathbb{Z}$ отображение α_n является изоморфизмом топологического векторного пространства $\mathcal{F}^{(n)}$ на $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Пусть $H^{(n)}$ — некоторая инвариантная ячейка в $\mathcal{F}^{(n)}$. Если $f(x) \in H^{(n)}$, то $f(x\gamma(s)) \in H^{(n)}$ при любом $s \in \mathbb{R}$. Очевидно, что, если $\alpha_n(f(x)) = \widetilde{f}(t)$, то $\alpha_n(f(x\gamma(s)) = \widetilde{f}(t+s)$. Пусть $\widetilde{H}^{(n)} = \alpha_n(H^{(n)})$, тогда $\widetilde{H}^{(n)}$ является замкнутым линейным подпространством в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, инвариантным относительно преобразований $\widetilde{f}(t) \mapsto \widetilde{f}(t+s)$ для любого $s \in \mathbb{R}$. По теореме 1.1 и предложению 2.6 пространство $\widetilde{H}^{(n)}$ описывается своим спектром $\sigma \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющим условиям (i) и (ii) из теоремы 1.2, и при этом $\widetilde{H}^{(n)}$ совпадает с замыканием в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ суммы подпространств V_{λ,r_λ}, где λ пробегает σ, r_λ — кратность числа λ в σ. Так как $\alpha_n(V_{\lambda,r}^{(n)}) = V_{\lambda,n}$, то подпространство $H^{(n)}$ совпадает с замыканием в $\mathcal{F}^{(n)}$ суммы подпространств $V_{\lambda,r_\lambda}^{(n)}$. Тем самым доказан пункт 1) теоремы 1.2.

Пусть σ — произвольный набор действительных чисел, удовлетворяющий условиям (i) и (ii) из теоремы 1.2. Для доказательства пункта

2) теоремы 1.2 достаточно доказать, что найдется инвариантная ячейка $H^{(n)} \subset \mathcal{F}^{(n)}$, спектр которой совпадает с σ.

Пусть $\widetilde{U}$ — замыкание в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ суммы подпространств V_{λ,r_λ}, где λ пробегает множество σ, а r_λ — кратность числа λ в σ. По теореме 1.1 и предложению 2.6 $\widetilde{U} \neq \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Пусть $U = \alpha_n^{-1}(\widetilde{U})$. Тогда U является замкнутым линейным подпространством в $\mathcal{F}^{(n)}$, совпадающим с замыканием суммы подпространств $V_{\lambda,r_\lambda}^{(n)}$, $\lambda \in \sigma$. Так как каждое подпространство $V_{\lambda,r}^{(n)}$ является инвариантной ячейкой в $\mathcal{F}^{(n)}$ (следствие 2.1), то, по предложению 2.3, U также будет инвариантной ячейкой в $\mathcal{F}^{(n)}$. Спектр инвариантной ячейки U совпадает со спектром подпространства $\widetilde{U} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$, т. е. совпадает с σ. □

Доказательство теоремы 1.3.

1) Из предложения 2.5 вытекает, что теорему 1.3 достаточно доказать для пространства $\mathfrak{C}_*(X)$. Далее пусть $\mathcal{F} = \mathfrak{C}_*(X)$. Операторы

$$Y_{\pm}^{(n)} : \mathcal{F}_{\#}^{(n)} \mapsto \mathcal{F}_{\#}^{(n\pm1)}, \quad \delta : \mathcal{F}_{\#}^{(n)} \mapsto \mathcal{F}_{\#}^{(n)} \tag{3.15}$$

задаются формулами (3.4), (3.5) и (3.2). Из этих формул и из явного вида базиса в пространстве $V_{\lambda,r}^{(n)}$ (см. (3.9)) легко получить, что для любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$ выполняются равенства:

$$Y_{+}^{(n)}\left(V_{\lambda,r}^{(n)}\right) = V_{\lambda,r}^{(n+1)} \quad \text{и} \quad Y_{-}^{(n)}\left(V_{\lambda,r}^{(n)}\right) = V_{\lambda,r}^{(n-1)}, \tag{3.16}$$

если $n \neq 0$ и $\lambda \neq 0$, а при $n = 0$ и $\lambda = 0$ будет

$$Y_{+}^{(0)}\left(V_{0,r}^{(0)}\right) = V_{0,r-1}^{(1)} \quad \text{и} \quad Y_{-}^{(0)}\left(V_{0,r}^{(0)}\right) = V_{0,r-1}^{(-1)}. \tag{3.17}$$

При этом мы по определению полагаем, что $V_{\lambda,0}^{(n)} := \{0\}$. Из определения пространств $V_{\lambda,\infty}^{(n)}$ (см. (1.23)) и из формул (3.16) и (3.17) следует также, что

$$Y_{+}^{(n)}\left(V_{\lambda,\infty}^{(n)}\right) = V_{\lambda,\infty}^{(n+1)} \quad \text{и} \quad Y_{-}^{(n)}\left(V_{\lambda,\infty}^{(n)}\right) = V_{\lambda,\infty}^{(n-1)}, \tag{3.18}$$

для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}$.

2) Пусть H — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$, $H^{(n)}$ — соответствующие ему ячейки, $H_{\#}^{(n)} = H^{(n)} \cap \mathcal{F}_{\#}^{(n)}$. Так как ячейки $H^{(n)}$,

$n \in \mathbb{Z}$, соответствуют одному инвариантному подпространству, то $Y_\pm(H_\#^{(n)}) \subset H_\#^{(n\pm1)}$ и $\delta(H_\#^{(n)}) \subset H_\#^{(n)}$. Пусть $\sigma(n)$ — спектр ячейки $H^{(n)}$ и пусть $r_\lambda^{(n)}$ — кратность числа λ в $\sigma(n)$. Число λ входит в $\sigma(n)$ с кратностью r тогда и только тогда, когда $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq H^{(n)}$, а так как $V_{\lambda,r}^{(n)} \subset \mathcal{F}_\#^{(n)}$ (по лемме 3.2), то $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq H_\#^{(n)}$.

Определим, как связаны кратности числа $\lambda \in \mathbb{R}$ в спектрах соседних ячеек $H^{(m)}$ и $H^{(m+1)}$, $m \in \mathbb{Z}$. Пусть r — кратность числа λ в $\sigma(m)$, s — кратность числа λ в $\sigma(m+1)$. Так как $Y_+^{(m)}(H_\#^{(m)}) \subseteq H_\#^{(m+1)}$, то $Y_+^{(m)}(V_{\lambda,m}^{(m)}) \subseteq V_{\lambda,s}^{(m+1)}$, откуда с учетом (3.16) вытекает, что $r \le s$, если $m \ne 0$ или $\lambda \ne 0$, и $r-1 \le s$, если $m=0$ и $\lambda = 0$. Аналогично, так как $Y_-^{(m+1)}(H_\#^{(m+1)}) \subseteq H_\#^{(m)}$, то $Y_-^{(m+1)}(V_{\lambda,s}^{(m+1)}) \subseteq V_{\lambda,r}^{(m)}$, откуда с учетом (3.17) вытекает, что $s \le r$, если $m \ne (-1)$ или $\lambda \ne 0$, и $s-1 \le r$, если $m=(-1)$ и $\lambda=0$. Эквивалентно можно сказать, что спектры $\sigma(m)$ и $\sigma(m+1)$ должны полностью совпадать при $m \ne 0, -1$, а при $m=0$ или $m=-1$ совпадать за исключением числа 0, кратности которого могут отличаться: кратность $r_0^{(1)}$ может равняться $r_0^{(0)}$ или $r_0^{(0)}-1$, кратность $r_0^{(-1)}$ может равняться $r_0^{(0)}$ или $r_0^{(0)}-1$.

Из полученных условий на спектры соседних ячеек $H^{(m)}$ и $H^{(m+1)}$ вытекает, что при $\lambda \notin 0$ кратности $r_\lambda^{(n)}$ числа λ в спектрах $\sigma(n)$ не зависят от n, а при $\lambda=0$ кратности $r_0^{(n)}$ могут изменяться в зависимости от n, но так, чтобы выполнялись условия 2) и 3) теоремы 1.3. Тем самым доказана необходимость условий 1), 2) и 3) теоремы 1.3.

3) Пусть в каждом подпространстве $\mathcal{F}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, задана инвариантная ячейка U_n, которая описывается спектром $\sigma(n)$. Предположим, что для спектров $\sigma(n)$ выполняются условия 1), 2) и 3) теоремы 1.3. Докажем, что найдется единое инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$, которому соответствуют все ячейки U_n (т. е. $U_n = H \cap \mathcal{F}^{(n)}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$).

В каждой ячейке U_n возьмем сумму (без замыкания) всех подпространств $V_{\lambda,r}^{(n)}$, где λ пробегает спектр $\sigma(n)$, а r — кратность числа λ в этом спектре. Обозначим это линейное подпространство W_n. Так как $V_{\lambda,r}^{(n)} \subseteq \mathcal{F}_\#^{(n)}$ (лемма 3.2), то $W_n \subseteq \mathcal{F}_\#^{(n)}$. Пусть

$$W = \sum_{n\in\mathbb{Z}} W_n,$$

тогда W является линейным подпространством в $\mathcal{F}_\#$. Так как выполнены условия 1), 2), 3) теоремы 1.3, то из равенств (3.16) и (3.17), а также из того, что $\delta(V_{\lambda,r}^{(n)}) \subseteq V_{\lambda,r}^{(n)}$, вытекает, что

$$Y_+^{(n)}(W_n) \subseteq W_{n+1}, \quad Y_-^{(n)}(W_n) \subseteq W_{n-1} \tag{3.18}$$

для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Из (3.18), с учетом того, что операторы $Y_\pm^{(n)}$ представляют собой ограничения операторов $Y_\pm$ на $\mathcal{F}_\#^{(n)}$, вытекает, что $Y_+(W) \subseteq W$ и $Y_-(W) \subseteq W$. Кроме того, $Y_0(W) = \delta(W) \subseteq W$ и из формулы (3.3) вытекает, что $Y_1(W) \subseteq W$. Так как базисные векторы X_0, X_1, X_2, X_3 алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются линейными комбинациями векторов Y_0, Y_1, Y_+, Y_-, то

$$X(W) \subseteq W \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \tag{3.19}$$

Пусть $H = [W]$ — замыкание W в пространстве $\mathcal{F}$. Из того, что $W \subseteq \mathcal{F}_\#$ и из (3.19) следует, что H является инвариантным подпространством в $\mathcal{F}$. Докажем, что U_n совпадает с ячейкой $H^{(n)}$ пространства H.

Заметим, что $H^{(n)} = \pi_n(H)$, где π_n — оператор проектирования пространства $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^{(n)}$ (см. (2.40)). Так как $U_n \subseteq H$, то $U_n = \pi_n(U_n) \subseteq H^{(n)}$. С другой стороны, пусть $f \in H^{(n)}$. Так как, в частности, $f \in H$, то найдется направленность $\{f_\alpha\} \subset W$, такая, что $f_\alpha \to f$ в пространстве $\mathcal{F}$. Если $f_\alpha \in W$, то $\pi_n(f_\alpha) \in W_n \subseteq U_n$. Из непрерывности проектора π_n вытекает, что $\pi_n(f_\alpha) \to \pi_n(f) = f$, а так как U_n — замкнутое подпространство в $\mathcal{F}$, то $f \in U_n$, т. е. $H^{(n)} \subseteq U_n$. Тем самым доказано, что $U_n = H^{(n)}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, т. е. ячейки U_n соответствуют одному инвариантному подпространству. $\square$

Résumé

We describe the structure of closed linear subspaces in tempered topological vector function spaces on the light cone X in $\mathbb{R}^3$ that are invariant with respect to the natural quasiregular representation of the group $\mathbb{R}\oplus\mathrm{SO}_0(1,2)$. In particular, we obtain a description of the irreducible and indecomposable invariant subspaces. The class of function spaces under consideration include, in particular, the space $\mathcal{S}'(X)$ of all tempered distributions on X.

Список литературы

[1] Berenstein C. A. *Spectral synthesis on symmetric spaces* // Contemp. Math. 1987. V. 63. P. 1–25.

[2] Berenstein C. A., Gay R. *Sur la synthèse spectrale dans les espaces symétriques* // J. Math. Pures Appl. 1986. V. 65. P. 323–333.

[3] Wawrzyńczyk A. *Spectral analysis and synthesis on symmetric spaces* // J. Math. Ann. Appl. 1987. V. 127. P. 1–17.

[4] Schvartz L. *Théorie générale des fonctions moynne-périodiques* // Ann. of Math. 1947. V. 48. P. 875–929.

[5] Гуревич Д. И. *Контрпримеры к гипотезе Шварца* // Функциональный анализ и его приложения. 1975. Т. 9, № 2. С. 29–35.

[6] Malgrange B. *Existence et approximation des solution des équations aux dérivées partiélles et des équations de convolution* // Ann. Inst. Fourier. 1956. V. 6. P. 271–355.

[7] Ehrenpreis L. *Fourier analysis in several complex variables.* New York: Wiley Interscience, 1970.

[8] Паламодов В. П. *Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.* М.: Наука, 1967.

[9] Platonov S. S. *Invariant subspaces in certain function spaces on Euclidean space* // Math. Scand. 1995. V. 76. P. 115–138.

[10] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на евклидовом пространстве* // Труды ПетрГУ. Сер. Математика. 1995. Вып. 2. С. 92–112.

[11] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах полиномиального роста на* $\mathbb{R}^n$ // Труды ПетрГУ. Сер. Математика. 1997. Вып. 4. С. 105–124.

[12] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на n-мерном пространстве Лобачевского* // Матем. сб. 1988. Т. 137, № 4. С. 435–461.

[13] Платонов С. С. *О спектральном синтезе на симметрических пространствах ранга 1* // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 174–187.

[14] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах: в 3 ч. Ч. I* // Известия РАН. Сер. математическая. 1995. Т. 59, № 5. С. 127–172.

[15] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах: в 3 ч. Ч. II* // Известия РАН. Сер. математическая. 1998. Т. 62, № 2. С. 131–168.

[16] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах: в 3 ч. Ч. III* // Известия РАН. Сер. математическая. 2002. Т. 66, № 1. С. 167–202.

[17] Ehrenpreis L., Mautner F. J. *Some properties of the Fourier-transform on semisimple Lie groups, III* // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 90. P. 431–484.

[18] Рашевский П. К. *Описание замкнутых инвариантных подпространств в некоторых функциональных пространствах* // Труды Московского математического общества. 1979. Т. 38. С. 139–185.

[19] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на группе* $SL(2,\mathbb{C})$ // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1983. Вып. 21. С. 191–258.

[20] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на группе движений евклидовой плоскости* // Сибирский мат. журнал. 1990. Т. 31, № 3. С. 135–146.

[21] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на простейшей разрешимой группе* // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 1. С. 19–30.

[22] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. *Обобщенные функции и действия над ними.* М.: ГИФМЛ, 1958.

[23] Wawrzyńczyk A. *Spectral analysis on upper light cone in* $\mathbb{R}^3$ *and the Radon transform* // Can. J. Math. 1988. V. 40, № 6. P. 1458–1481.

[24] Уорнер Ф. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли.* М.: Мир, 1987.

[25] Хелгасон С. *Группы и геометрический анализ.* М.: Мир, 1987.

[26] Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.

[27] Warner G. *Harmonic analysis on semisimple Lie groups. V. 1.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1972.

[28] Желобенко Д. П. *Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли.* М.: Наука, 1974.

[29] Varadarajan V. S. *Harmonic analysis on real reductive groups.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1977.

[30] Желобенко Д. П., Штерн А. И. *Представления групп Ли.* М.: Наука, 1983.

[31] Платонов С. С. *Спектральный синтез в некоторых функциональных топологических векторных пространствах* // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, вып. 5. С. 154–183.

[32] Ленг С. $SL_2(\mathbb{R})$. М.: Мир, 1977.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33