**Труды Петрозаводского государственного университета**
Серия “Математика” Выпуск 18, 2011

УДК 517.518.1

Н. Ю. Светова

# О ХАУСДОРФОВОЙ МЕРЕ ОДНОРОДНОГО ТРЕУГОЛЬНОГО $(C, \theta)$-КОВРА СЕРПИНСКОГО

В работе рассматривается однородный треугольный $(c, \theta)$-ковер Серпинского. Для значений параметра $c \in (0, 1/3]$ при $\theta \in (\pi/3, \pi)$ получено точное значение хаусдорфовой $s$-меры, а при $\theta \in (0, \pi/3]$ ее оценка.

В области фрактальной геометрии в последнее время особое внимание уделяется вопросу вычисления или оценки хаусдорфовой меры фрактальных множеств. Оказывается, что даже для самоподобных множеств, удовлетворяющих условию открытого множества, хаусдорфова размерность которых достаточно просто вычисляется, бывает очень трудно оценить хаусдорфову меру этих множеств. Одним из таких множеств является треугольный ковер Серпинского и его различные модификации. Для классического треугольного ковра Серпинского рядом авторов ([3], [4], [5], [8], [10]) предложены различные методы аппроксимации хаусдорфовой меры с использованием принципа распределения масс, построения последовательностей определенных покрытий и/или использования численных алгоритмов. На сегодняшний день нам известна наилучшая оценка хаусдорфовой меры классического треугольника Серпинского

$$0,77 \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 0,819161232881177,$$

полученная П. Мора и опубликованная в [8].

В работе [7] Д. Лиу и М. Дай предложили модификацию треугольного ковра Серпинского, так называемый $(1/3; \theta)$-ковер Серпинского, с коэффициентом подобия $c = 1/3$ и параметром $\theta$, в качестве которого выступает один из углов треугольника. Обобщим ситуацию, рассмотренную в [7], и покажем, что хаусдорфова мера однородного $(c,\theta)$-ковра Серпинского при условии $c \in (0;1/3]$ в точности равна $(2\sin\frac{\theta}{2})^{s/2}$, где $s$ – хаусдорфова размерность множества и $\theta \in (\pi/3,\pi)$, а при $\theta \in (0,\pi/3]$ хаусдорфова мера принимает значения из отрезка $[(2\sin\theta/\sqrt{5-4\cos\theta})^s, 1]$.

Пусть задано некоторое множество $E$ в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Через $|E| = \sup\{|x-y| : x,y \in E\}$, где $|x-y|$ – евклидово расстояние между точками $x$ и $y$, обозначим *диаметр* множества $E$. Отображение $S : E \to E$ называется *сжатием* множества $E$, если существует такое число $c \in (0,1)$, что $|S(x) - S(y)| \leq c \cdot |x-y|$ для всех $x,y \in E$, при этом константу $c$ называют *коэффициентом сжатия*. Очевидно, сжатие является непрерывным отображением. Отображение $S$ называется *подобием*, если для всех $x,y \in E$ верно $|S(x) - S(y)| = c \cdot |x-y|$, а $c$ называют *коэффициентом подобия*.

Конечное семейство сжатий $\{S_1,\ldots,S_m\}$ при $m \geq 2$ и коэффициентами $c_1,\ldots,c_m < 1$ определяет на непустом компактном множестве $F \subset E$ *преобразование Хатчинсона* $S : F \to F$ следующим образом

$$S(F) = S_1(F) \cup S_2(F) \cup \ldots \cup S_m(F).$$

*Системой итерированных функций* называется совокупность введенных выше отображений вместе с итерационной схемой:

$$F_n = S(F_{n-1}),$$

где $F_0$ – произвольное компактное подмножество $E$. По теореме 9.1 работы [2] найдется единственный аттрактор (непустой компакт) $K$, удовлетворяющий условию

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K) = S(K).$$

Если через $S^k$ обозначить $k$-ю итерацию отображения $S$:

$$S^0(F) = F, \quad \ldots, \quad S^k(F) = S(S^{k-1}(F)), \quad k \geq 1,$$

то аттрактор $K$ можно представить как

$$K = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(F),$$

при этом множество $K$ называется *самоподобным множеством*, определяемым системой итерированных функций $\{S_1, \ldots, S_m\}$.

Пусть $\mathcal{I}_k$ — множество всех последовательностей $(i_1, \ldots, i_k)$ длины $k$, где $1 \le i_1, \ldots, i_k \le m$. Обозначим через

$$F_{i_1,\ldots,i_k} = S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F).$$

Множество $F_{i_1,\ldots,i_k}$ называют *-копией* множества $F$. Очевидно, что

$$F = \bigcup_{\mathcal{I}_k} F_{i_1,\ldots,i_k} = \bigcup_{\mathcal{I}_k} -S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F).$$

Говорят, что множество $F$ удовлетворяет *условию открытого множества*, если существует непустое открытое ограниченное множество $V \subset \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i(V) \subset V \qquad \text{и} \qquad S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset, \quad 1 \le i < j \le m.$$

Допустим, что в $n$-мерном евклидовом пространстве задано ограниченное множество $E$. Счетное или конечное семейство $\{U_i\}$ открытых множеств с диаметрами, не превосходящими заданного числа $\delta$, покрывающих множество $E$, то есть

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \text{и} \quad 0 \le |U_i| \le \delta \quad \text{для любого} \quad i,$$

называется *$\delta$-покрытием* множества $E$.

Для $E \subset \mathbb{R}^n$, неотрицательного числа $s$ и произвольного положительного числа $\delta$ *хаусдорфовой внешней $s$-мерой* множества $E$ (или просто *хаусдорфовой $s$-мерой*) называют

$$\mathcal{H}^s(E) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s \right\},$$

где inf берется по всем конечным или счетным $\delta$-покрытиям $\{U_i\}$ множества $E$.

Предложение (см. [2]). *Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ и отображение $f : F \to \mathbb{R}^n$ такое, что для произвольных значений $x, y \in F$*

$$|f(x) - f(y)| \le c \cdot |x - y|^\alpha,$$

*где $c$ и $\alpha$ – положительные константы. Тогда для каждого $s$*

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}}\mathcal{H}^s(F).$$

*Хаусдорфова размерность* $\dim_H E$ множества $E$ определяется следующим образом

$$\dim_H E = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}.$$

По теореме 9.3 из монографии К. Фальконера [2] для системы итерированных функций $\{S_1, \ldots, S_m\}$, состоящей из подобий, с коэффициентами $0 < c_i < 1$, $i = 1, \ldots, m$ в предположении выполнения условия открытого множества хаусдорфова размерность $s = \dim_H F$ аттрактора $F$ данной системы является корнем уравнения

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1. \tag{1}$$

Более того, для этого значения $s$ хаусдорфова мера конечна. Упомянутая теорема К. Фальконера позволяет легко находить хаусдорфову размерность самоподобных множеств. Например, для классического треугольника Серпинского она равна $\log_2 3$.

Лемма 1 (см. [10]). *Пусть $F \subseteq \mathbb{R}^n$ является самоподобным множеством, удовлетворяющим условию открытого множества, и пусть хаусдорфова размерность $\dim_H(F) = s$. Тогда $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$.*

Лемма 2. *Для отображения ортогональной проекции* $\mathrm{proj}_l$ *множества $F \subset R^2$ на прямую $l$ справедливо*

$$\mathcal{H}^s(\mathrm{proj}_l F) \leq \mathcal{H}^s(F).$$

Лемма вытекает из того, что отображение ортогональной проекции является отображением Липшица и из предложения на с. 63.

Построим теперь *однородный $(c, \theta)$-ковер Серпинского $D_{c,\theta}$*. Для этого в качестве исходного множества $D_0$ возьмем равнобедренный треугольник на плоскости с двумя сторонами, равными 1, и углом между ними, равным $\theta$. Пусть параметр $c$ из $(0, \frac{1}{2}]$, а значение $\theta \in (0, \pi)$. Для произвольной точки с координатами $(x, y)$, выбранной из исходного треугольника $D_0$, определим систему итерированных функций

$$\begin{aligned} S_1(x,y) &= (cx, cy), \\ S_2(x,y) &= (cx+1-c, cy), \\ S_3(x,y) &= (cx+(1-c)\cos\theta, cy+(1-c)\sin\theta). \end{aligned} \tag{2}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} &S_k = S_{i_1}\circ\ldots\circ S_{i_k}, \text{ где } \quad i_k\in\{1,2,3\}, \qquad (i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{I}_k, \\ &D_{i_1,\ldots,i_k} = S_k(D_0), \qquad \Lambda_k = \bigcup_{\mathcal{I}_k} D_{i_1,\ldots,i_k}. \end{aligned}$$

Множество $\Lambda_k$ состоит из $3^k$ копий исходного множества $D_0$, уменьшенных в $(1/c)^k$ раз.

*Однородный* $(c,\theta)$*-ковер Серпинского* $D_{c,\theta}$ с параметрами $c$ и $\theta$ (рис. 1 и 2) определим как аттрактор системы итерированных функций (2), тогда

$$D_{c,\theta} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\Lambda_k.$$

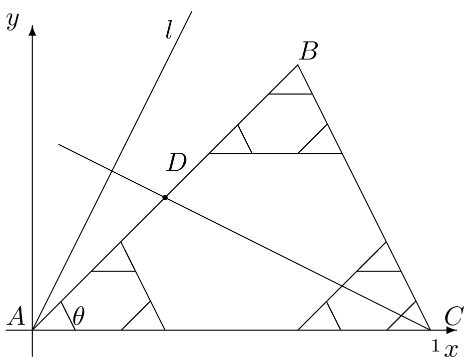


Рис. 1. Однородный $(c,\theta)$-ковер Серпинского для $\theta\in(0,\pi/3)$

Поскольку для значений $c\in(0,1/2]$ ковер $D_{c,\theta}$ удовлетворяет условию открытого множества, то хаусдорфову размерность $D_{c,\theta}$ легко получить как корень соответствующего уравнения (1), а именно

$$s = \dim_H(D_{c,\theta}) = -\log_c 3.$$

Теорема 1 (см. [9]). *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является самоподобным множеством для системы итерированных функций $\{S_1, \dots, S_m\}$, удовлетворяющее условию открытого множества с коэффициентами подобия $c_1 = \dots = c_m = c$ и $s = \dim_H E$. Если найдутся положительные целые числа $k_0$, $N_0$ $(1 \leq N_0 \leq m^{k_0})$ и группа $k$-копии множества $E$, состоящая из $N_0$ уменьшенных в $(1/c)^{k_0}$ раз копий множества $E$ (эту группу обозначим $B_{N_0}^{(k_0)}$), для которых*

$$\frac{m^{k_0}}{N_0} \left| B_{N_0}^{(k_0)} \right|^s \leq \frac{m^k}{N} \left| B_N^{(k)} \right|^s \tag{3}$$

*при всех целых $k \geq 0$, $N$ $(1 \leq N_0 \leq m^k)$ и каждого $B_N^{(k)}$, где $B_N^{(k)}$ обозначает объединение любых $N$ $k$-копий множества $E$, то хаусдорфова мера множества $E$ может быть вычислена по формуле*

$$\mathcal{H}^s(E) = \frac{m^{k_0}}{N_0} \left| B_{N_0}^{(k_0)} \right|^s. \tag{4}$$

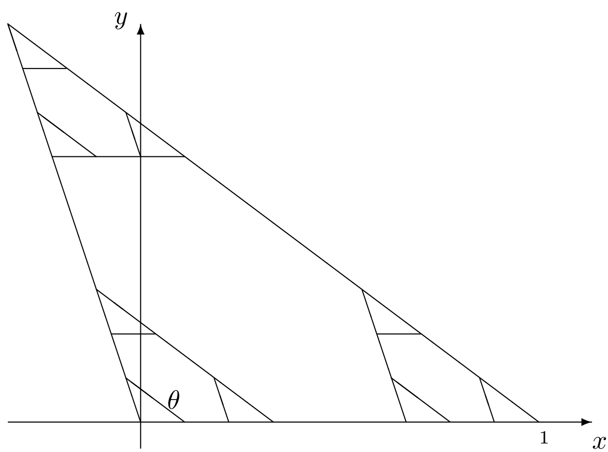


Рис. 2. Однородный $(c,\theta)$-ковер Серпинского для $\theta \in [\pi/3, \pi)$

Теорема 2. *Для однородного треугольного $(c,\theta)$-ковра Серпинского $D_{c,\theta}$ с хаусдорфовой размерностью $s$ при $c \in (0; 1/3]$ и $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$*

$$\mathcal{H}^s(D_{c,\theta}) = \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right)^s, \tag{5}$$

*а при* $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$ *справедлива оценка*

$$\left(\frac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\right)^{-s} \le \mathcal{H}^s(D_{c,\theta}) \le 1. \tag{6}$$

Доказательство. Для всех значений параметра $c \in (0, 1/3]$ однородный $(c,\theta)$-ковер $D_{c,\theta}$ удовлетворяет условию открытого множества, поэтому по лемме 1 верно $\mathcal{H}^s(D_{c,\theta}) \le |D_{c,\theta}|^s$ или

$$\mathcal{H}^s(D_{c,\theta}) \le \begin{cases} \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^s, & \text{при } \theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi); \\ 1, & \text{при } \theta \in (0, \frac{\pi}{3}). \end{cases} \tag{7}$$

Для доказательства неравенства в другую сторону спроектируем множество $D_{c,\theta}$ на определенную прямую. Сначала рассмотрим случай, когда значение $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$. Спроектируем $D_{c,\theta}$ на наибольшую сторону, пусть это будет сторона $BC$ треугольника $D_0$, длина которой равна $2\sin\frac{\theta}{2}$. Обозначим $E = \mathrm{proj_{BC} D_{c,\theta}}$. Множество $E$ является однородным канторовым множеством — аттрактором системы итерированных функций

$$\begin{aligned} f_1(x) &= cx, \\ f_2(x) &= cx + (1-c)\sin\frac{\theta}{2}, \\ f_3(x) &= cx + 2(1-c)\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

для $x \in [0, 2\sin\frac{\theta}{2}]$ с одинаковыми коэффициентами подобия, равными значению $c$. Причем, очевидно, что при $c \in (0, 1/3]$ множество $E$ удовлетворяет условию открытого множества (заметим, что при $c > 1/3$ это условие уже нарушается). Поэтому, выбрав в качестве $N_0 = 1$, $k_0 = 1$, $m = 3$ и $B_{N_0}^{(k_0)} = f_1(E)$, несложно доказать, что для любого целого положительного значения $k$, произвольного $N$ такого, что $1 \le N \le m^k$, имеет место неравенство (3). Тогда из теоремы 1 вытекает

$$\mathcal{H}^s(E) = \frac{m^{k_0}}{N_0}\left|B_{N_0}^{(k_0)}\right|^s = 3\left(2c\sin\frac{\theta}{2}\right)^s = \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^s.$$

Используя лемму 2, получим оценку снизу для хаусдорфовой меры $(c,\theta)$-ковра $D_{c,\theta}$ при $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$

$$\mathcal{H}^s(D_{c,\theta}) \ge \mathcal{H}^s(E) = \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^s. \tag{8}$$

Пусть теперь $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$. Проведем прямую через одну из вершин основания равнобедренного треугольника (пусть это будет вершина $C$) и середину, например $D$, противоположной стороны (соответственно $AB$). Через вершину треугольника (в нашем случае $A$) проведем прямую, перпендикулярную построенной прямой $CD$, обозначим ее $l$ (рис. 1). Спроектируем множество $D_{c,\theta}$ на $l$, пусть $F = \mathrm{proj}_l D_{c,\theta}$.

Множество $F$ является однородным канторовым множеством, аттрактором системы

$$\begin{aligned} g_1(x) &= cx, \\ g_2(x) &= cx + (1-c)\frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}, \\ g_3(x) &= cx + 2(1-c)\frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}} \end{aligned}$$

при $x \in [0, \frac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}]$, а также при $c \in (0, 1/3]$ оно удовлетворяет условию открытого множества.

Аналогично предыдущему случаю, используя теорему 1 и лемму 2, для $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$ и $c \in (0, 1/3]$ можно показать

$$\mathcal{H}^s(D_{c,\theta}) \geq \mathcal{H}^s(F) = \left(\frac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\right)^s.$$

□

*Треугольником Паскаля* в литературе называют равнобедренный прямоугольный треугольник Серпинского с коэффициентом подобия, равным $1/2$. Рассмотрим обобщенный однородный треугольник Паскаля как частный случай однородного треугольного $(c, \pi/2)$-ковра Серпинского.

Следствие. *Для однородного треугольника Паскаля $D_c$ при всех значениях $c \in (0, 1/3]$ хаусдорфова мера равна*

$$\mathcal{H}^s(D_c) = 2^{s/2}.$$

## Résumé

The generalized homogeneous Sierpinski $(c, \theta)$-gasket is considered. It has received that the $s$-dimensional Hausdorff measure of $(c, \theta)$-gasket for $c \in (0; 1/3]$ is equal

$$\mathcal{H}^s(D_{c,\theta}) = \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^s,$$

for $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$ and

$$\left(\frac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\right)^s \leq \mathcal{H}^s(D_{c-,\theta}) \leq 1$$

for $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$. As a consequence the $s$-dimensional Hausdorff measure for a generalized homogeneous Pascal triangle is received, it is equal $2^{s/2}$.

## Список литературы

[1] Ayer E. *Exact Hausdorff measure and intervals of maximum density for Cantor sets* / E. Ayer, R. S. Strichartz // Transactions of the American Mathematical Society. 1999. Vol. 351. № 9. P. 3725–3741.

[2] Falconer K. J. *Fractal geometry. Mathematical Foundations and Applications* / K. J. Falconer. New York: John Wiley & Sons, 1990. 337 p.

[3] Huojun R. *An approximation method to estimate the Hausdorff measure of the Sierpinski gasket* / R. Huojun, S. Weiyi // Analysis in Theory and Applications. 2004. Vol. 20. № 2. P. 158–166.

[4] Jia B. *Hausdorff measure of the Sierpinski gasket* / B. Jia, Z. Zhou, Z. Zhu // Analysis in Theory and Applications. 2006. Vol. 22. № 1. P. 8–19.

[5] Jia B. *Bounds of Hausdorff measure of the Sierpinski gasket* / B. Jia // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 330. № 2. P. 1016–1024.

[6] Kreitmeier W. *Hausdorff measure of uniform self-similar fractals* / W. Kreitmeier // Analysis in Theory and Applications. 2010. Vol. 26. № 1. P. 84–100.

[7] Liu D. *The Hausdorff measure of the attractor of an iterated function system with parameter* / D. Liu, M. Dai // International Journal of Nonlinear Science. 2007. Vol. 3. № 2. P. 150–154.

[8] Mora P. *Estimate of the hausdorff measure of the Sierpinski triangle* / P. Mora // Fractals. 2009. № 2. P. 137–148.

[9] Xu S. *On the exact Hausdorff measure of a class of self-similar sets satisfying open set condition* / S. Xu, W. Su, Z. Zhou // Analysis in Theory and Applications. 2008. Vol. 24. № 1. P. 93–100.

[10] Zuoling Z. *Hausdorff measure of Sierpinski gasket* / Z. Zuoling // Science in China (Series A). 1997. Vol. 40. № 10. P. 1016–1021.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: nsvetova@petrsu.ru