Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 18, 2011

УДК 517.55, 517.54, 514.752/753

В. В. Старков

УСЛОВИЯ ЗВЕЗДООБРАЗНОСТИ ОБЛАСТЕЙ В $\mathbb{R}^N$

Для областей с гладкой границей получен критерий звездообразности области относительно внутренней или граничной точки. В качестве приложения отсюда получаются все известные условия звездообразности биголоморфных отображений в шаре и поликруге и достаточные условия звездообразности областей с произвольной границей.

Введение

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$, a — фиксированная точка из замыкания $\bar{D}$ в $\mathbb{R}^n$. Область D называется *звездообразной* относительно точки a, если вместе с каждой своей точкой $w \in D$ она содержит и соединяющий ее с a промежуток $(a, w] = \{at + w(1-t) : 0 < t \le 1\}$.

Многие теоремы анализа, формулируемые для звездообразных или выпуклых областей, перестают быть верными для произвольных областей. Поэтому важной является задача описания таких областей со специальными геометрическими свойствами. В $\mathbb{R}^2$ хорошо известно аналитическое условие звездообразности области относительно точки 0. В этом случае все сводится к описанию множества биголоморфных в круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, удовлетворяющих условию

$$\mathrm{Re}\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > 0 \quad \forall z \in \Delta. \tag{1}$$

Неравенство (1) является критерием звездообразности области $D = f(\Delta)$. Кикучи [1], Матсуно [2] и Саффридж [3] получили многомерный аналог условия (1) для евклидова шара $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$:

$$\mathrm{Re}\langle (Df(z))^{-1} f(z), z\rangle > 0 \quad \forall z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \tag{2}$$

(здесь и далее z, $f(z)$ и другие векторы — столбцы (если это не приводит к недоразумениям), хотя обычно для удобства координаты их выписываем в строчку), то есть они получили критерий звездообразности области $f(\mathbb{B}^n)$ при биголоморфных отображениях f шара $\mathbb{B}^n$, $f(0) = 0, Df(0)$ — единичная матрица (как обычно,

$$\langle w, z\rangle = \sum_{k=1}^{n} w_k \bar{z}_k$$

— комплексное скалярное произведение векторов $w = (w_1, \ldots, w_n)$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)$ в $\mathbb{C}^n$). В действительности, в (1) и (2) вместо строгих неравенств можно писать нестрогие. Для случая звездообразности образа шара относительно граничной точки этого образа соответствующее условие получено в [4].

Однако в случае $n > 1$ необходимые и достаточные условия звездообразности образа шара или поликруга при биголоморфном (локально биголоморфном) отображении не дают описания всех звездообразных областей в $\mathbb{C}^n$, поскольку в $\mathbb{C}^n$ не работает теорема Римана о биголоморфной эквивалентности односвязных областей.

В данной статье получено необходимое и достаточное аналитическое условие звездообразности области $D \subset \mathbb{R}^n$ относительно фиксированной точки $a \in \bar{D}$ при условии, что задано уравнение границы области $F(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ (хотя бы локально), при этом точки области определяются неравенством $F(x) < 0$ и граница области — гладкое многообразие размерности $n - 1$.

Основной результат. Пусть D — область из $\mathbb{R}^n$ и ее граница $S = \partial D$ — гладкое $(n-1)$-мерное вещественное многообразие, которое задается уравнением

$$F(x) = 0,\ x = (x_1, \ldots, x_n); \tag{3}$$

пусть при этом область D определяется неравенством

$$F(x) < 0 \tag{4}$$

(гладкая функция F может быть задана локально, то есть в окрестности каждой точки $p \in S$ область D задается функцией $F = F_p$, определенной только в некоторой окрестности точки p). Поскольку гладкое многообразие в окрестности каждой точки $p \in S$ может быть задано уравнением вида

$$x_k = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \tag{5}$$

при некотором $k = 1, \dots, n$ (см. [5]), то можем считать, что $\operatorname{grad} F(p) \neq 0$ на S.

Под внешней нормалью к области D в точке $p \in S$ будем понимать такую нормаль $N(p)$, что $p + \delta N(p) \notin D$ при $\delta \in (0, \delta_0), \delta_0 > 0$. Из (3) и (4) следует, что в качестве $N(p)$ можно взять $\operatorname{grad} F(p)$. Обозначим $n(p) = N(p)/||N(p)||$ единичную внешнюю нормаль; здесь и далее $||.||$ — евклидова норма.

Лемма 1. *Пусть гладкая гиперповерхность S является границей области $D \subset \mathbb{R}^n, n(p)-$ единичная внешняя нормаль в точке $p \in S$. Обозначим*

$$K(p, q, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - p, n(p)) > q||x - p||, ||x - p|| < \varepsilon\}$$

(здесь и далее (x, y) — скалярное произведение в R^n). Тогда для любого $q \in (0, 1)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $K(p, q, \varepsilon) \cap \bar{D} = \emptyset$.

Доказательство. Идейно доказательство восходит к представленному в лемме из [4] частному случаю. По теореме Люстерника [6, глава 10, § 2.3] получаем, что для $y \in S$

$$y - p = y_* - p + o(||y - p||) \tag{6}$$

при $||y - p|| \to 0$, здесь y_*- проекция точки y на гиперплоскость P, касательную к S в точке p. Доказываем утверждение леммы методом от противного. Пусть существует $q \in (0, 1)$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ $\bar{D} \cap K(p, q, \varepsilon) \neq \emptyset$. Тогда существует последовательность $x^m \in \bar{D}, x^m \to p$ такая, что

$$(x^m - p, n(p)) > q||x^m - p||. \tag{7}$$

Заметим, что при достаточно больших m

$$v(t) = p + t(x^m - p) + (1 - t)||x^m - p||n(p) \in S$$

при некотором $t = t_m \in (0, 1]$, так как $v(1) = x^m \in \bar{D}$, а $v(0) \notin \bar{D}$ при достаточно больших m по определению внешней нормали. При этом $S \ni v^m = v(t_m) \to p$, когда $m \to \infty$. Поскольку

$$||v^m - p|| = ||t_m(x^m - p) + (1 - t_m)\left(||x^m - p||n(p)\right)|| \leq ||x^m - p||,$$

то по неравенству (7)

$$(v^m - p, n(p)) = t_m(x^m - p, n(p)) + (1 - t_m)||x^m - p|| >$$

$$> (qt_m + 1 - t_m)||x^m - p|| \geq q||x^m - p|| \geq q||v^m - p||.$$

Таким образом, неравенство (7) остается справедливым при замене в нем x^m на $v^m \in S$. Отсюда с учетом (6), примененного к $y = v^m$, получим противоречивое неравенство

$$(v^m - p, n(p)) = (o(||v^m - p||), n(p)) > q||v^m - p||.$$

Это доказывает лемму 1. □

Лемма 2. *Если граница области D является гладким $(n-1)$-мерным многообразием, то область D звездообразна относительно 0 тогда и только тогда, когда ее замыкание $\bar{D}$ звездообразно относительно 0.*

Доказательство. Покажем, что из звездообразности D следует звездообразность $\bar{D}$. Действительно, предположив противное, придем к существованию точки $p \in \partial D = S$ такой, что $(0, p]$ не содержится в $\bar{D}$, то есть для некоторого $\lambda \in (0, 1)$ существует точка $x^* = \lambda p \notin \bar{D}$. Тогда существует окрестность U_{x^*} этой точки такая, что $U_{x^*} \cap \bar{D} = \emptyset$. Выберем последовательность $x^m \in D$, сходящуюся к p. Тогда $\lambda x^m \to x^*$. Поэтому $\lambda x^m \in U_{x^*}$ при достаточно больших m. Следовательно, $\lambda x^m \notin \bar{D}$ — противоречие со звездообразностью D относительно 0.

Обратно, пусть $\bar{D}$ звездообразна относительно 0. Методом от противного докажем звездообразность области D относительно 0. Пусть это не так, тогда существует такая точка $y^* \in D$, что $(0, y^*) \ni p \in S$. Поскольку S — $(n-1)$-мерное многообразие, то существует последовательность $y^m \notin \bar{D}$, $y^m \to p$. Рассмотрим окрестность $U_{y^*} \subset D$ и лучи $l_m = \{ty^m : t > 0\}$. При достаточно больших m эти лучи l_m будут пересекать U_{y^*}. Следовательно, существует такая точка $y \in U_{y^*}$, что $(0, y]$ не содержится в $\bar{D}$, то есть $\bar{D}$ не звездообразна относительно 0. Противоречие доказывает лемму 2. □

Теорема 1. *Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$ задается условиями (3)–(4), $0 \in \bar{D}, \partial D = S$ — гладкое $(n-1)$-мерное многообразие. Для звездообразности области D относительно 0 необходимо и достаточно, чтобы*

$$(p, \operatorname{grad} F(p)) \geq 0 \ \forall p \in S. \tag{8}$$

Замечание. Критерий (8) просто получается из доказанных А. С. Дудовой [7] результатов применением леммы 2. Но здесь дается другое доказательство достаточности (8), отличающееся от приведенного в [7] своей геометричностью.

Доказательство. 1) Пусть D звездообразна относительно 0 и $p \in S$. По лемме 2 $\bar{D}$ тоже звездообразна относительно 0. Поэтому

$$F(tp) \le 0, \ 0 < t \le 1.$$

Следовательно, $\frac{d}{dt}F(tp)\Big|_{t=1} \ge 0$, то есть $(p, \operatorname{grad} F(p)) \ge 0$. Это доказывает необходимость условия (8).

2) Покажем справедливость обратного утверждения: из (8) следует звездообразность $\bar{D}$ относительно 0. В принятых обозначениях условие (8) равносильно условию

$$(p, n(p)) \ge 0 \ \forall p \in S. \tag{9}$$

Если $\bar{D}$ не звездообразна, то существует $x \in \bar{D}$ и $x' \in (0, x)$ такое, что $x' \notin \bar{D}$. Обозначим $U_{x'}$ такую малую окрестность точки x', что $U_{x'} \cap \bar{D} = \emptyset$. Тогда найдется близкая к x точка $y \in D$ такая, что $(0, y) \cap U_{x'} \neq \emptyset$. Выберем точку $y' \in ((0, y) \cap U_{x'})$ и ее окрестность $U_{y'} \subset U_{x'}$. Обозначим

$$t_0 = \sup\{t \in (0,1) : yt \notin D\}, \quad y^0 = t_0 y \in S.$$

Обозначим I связное подмножество пересечения $S \cap \{yt : t > 0\}$, содержащее точку y^0 (I может состоять и из единственной точки y^0). Из определения t_0 сдедует, что $y^*(1+\lambda) \in \bar{D}$ для любого $y^* \in I$ при достаточно малых $\lambda > 0$. Отсюда и из леммы 1 вытекает, что при этих значениях λ $y^*(1+\lambda) \notin K(y^*, q, \varepsilon)$ для любого $q \in (0,1)$ и достаточно малого $\varepsilon = \varepsilon(q) > 0$, то есть

$$(y^*, n(y^*)) \le q||y^*|| \quad \forall q \in (0,1).$$

Следовательно, $(y^*, n(y^*)) \le 0$. Отсюда и из (9) получаем

$$(y^*, n(y^*)) = 0 \quad \forall y^* \in I. \tag{10}$$

В этих рассуждениях из 2) точку $y \in D$ можно заменить любой точкой u из достаточно малой окрестности U_y точки y; малость окрестности U_y определяется условием не пустоты пересечения луча

$l_u = \{tu : t > 0\}$ с окрестностью $U_{x'}$. В результате получим существование такой точки $u^0 \in l_u \cap S$, что интервал $(u^0, u) \subset D$ и в u^0 выполнено равенство (10). Такие точки u^0 будем называть *точками входа* (в область D).

Для определенной выше точки y^0 выполнено (10). Поэтому унитарным отображением можно преобразовать данную систему координат в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы в новой системе координаты вектора y^0 были $(||y^0||, 0 \ldots, 0)$, а координаты вектора $n(p)$ — $(0, \ldots, 0, 1)$. Такое преобразование поворота не повлияет на звездообразность области относительно точки 0. В новой системе координаты точки по-прежнему будем обозначать $(x_1, \ldots, x_n)$; также не будем менять обозначение гиперповерхности S, точки $p \in S$, нормали $n(p)$, получившихся в результате поворота. Поскольку малая окрестность $V \subset S$ точки y^0 задается уравнением вида (5), то нормаль в точке y^0 к поверхности S имеет вид

$$N(y^0) = \pm(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}(y^0), -1, \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(y^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(y^0)).$$

Но с другой стороны, $n(y^0) = (0, \ldots, 1)$. Поэтому $k = n$ и окрестность $V \subset S$ задается уравнением

$$x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{11}$$

Рассмотрим сечение окрестности V одной из 2-мерных плоскостей

$$\mathcal{P} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R} \ni x_n\},$$

проходящих через y^0 параллельно нормали $n(y^0)$. В соответствии с (11) в сечении получим график функции

$$x_n = f(x_1, 0, \ldots, 0) = h(x_1),$$

— открытую гладкую кривую Γ, проходящую через точку $q = (||y^0||, 0)$ 2-мерной плоскости $\mathcal{P}$ (далее представляем точки этой плоскости только двумя значащими координатами). Окрестность V можно считать такой малой, что Γ целиком лежит в правой полуплоскости. Нормаль $\nu(q)$ к кривой Γ в точке q равна проекции нормали $n(y^0)$ на $\mathcal{P}$, то есть $\nu(q) = (0, 1)$. Из непрерывности $n(v)$ по $v \in S$ вытекает, что проекция $\nu(s)$ (s — проекция точки v на $\mathcal{P}$) нормали $n(v)$ на $\mathcal{P}$ также непрерывна, и потому $\nu(s) \neq 0$ в малой окрестности точки $q \in \Gamma$. Следовательно, в некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}$ точки $x_1 = ||y^0||$

$$\nu(s) \perp \Gamma, \quad s = (x_1, h(x_1)).$$

Отсюда и из (10) получаем ортогональность векторов s и $\nu(s)$ для всех точек входа $s = (x_1, h(x_1)), x_1 \in U$ (не каждому значению $x_1 \in U$, вообще говоря, соответствует такая точка входа s).

Обозначим $\varphi = \varphi(x_1)$ непрерывно меняющийся угол между вектором $(x_1, h(x_1)) \in \mathcal{P}$ и положительным направлением оси Ox_1. Пусть при изменении $x_1 \in U$ угол φ меняется в промежутке, содержащем отрезок $[\varphi', \varphi'']$.

Сначала рассмотрим случай $\varphi' \neq \varphi''$. Тогда, как показано выше, на каждом луче, исходящем из 0 под углом $\varphi \in [\varphi', \varphi'']$ к оси Ox_1 имеется по крайней мере одна точка входа $s(\varphi) = (x_1, h(x_1))$, $x_1 = x_1(\varphi)$, в область D. Причем луч $\{ts(\varphi) : t > 0\}$ касается Γ в точке $(x_1(\varphi), h(x_1(\varphi)))$. Тогда для любого $M > 0$ и любого $\varphi \in [\varphi', \varphi'']$ по свойству касательной существует такой малый интервал $U(\varphi)$ с центром в φ, что длина $\Delta L(\varphi)$ связного фрагмента графика

$$\{(x_1, h(x_1) : \operatorname{arctg} \frac{h(x_1)}{x_1} \in U(\varphi)\} \subset \Gamma,$$

содержащего точку $s(\varphi)$ не меньше $M\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — длина интервала $U(\varphi)$. Из открытого покрытия отрезка $[\varphi', \varphi'']$ интервалами $U(\varphi)$ выберем конечное подпокрытие $U(\varphi_k), k = 1, \ldots, N$. Заменим интервалы $U(\varphi_k)$ такими промежутками $U'(\varphi_k) \subset U(\varphi_k)$, чтобы $\cup_{k=1}^N U'(\varphi_k) = [\varphi', \varphi'']$ и $U'(\varphi_k) \cap U'(\varphi_j) = \emptyset$ для любых $k \neq j$; обозначим $\Delta'(\varphi_k)$ длину промежутка $U'(\varphi_k)$, $\Delta L'(\varphi_k)$ обозначим длину связного фрагмента кривой Γ, лежащего в секторе $\{re^{i\varphi} : \varphi \in U'(\varphi_k), r > 0\}$ и содержащего точку $s(\varphi_k)$. Поскольку $\Delta L(\varphi_k) \geq M\Delta\varphi_k$ при любом k, то для длины L кривой Γ получим: $L \geq M(\varphi'' - \varphi')$. В силу произвольности M получаем противоречие с конечностью длины Γ.

Следовательно, $\varphi' = \varphi''$ и Γ представляет собой интервал оси Ox_1. Поэтому на луче $\{ty^0 : t > 0\}$ найдется одномерная окрестность точки y^0, состоящая только из точек границы области D. А это противоречит определению t_0 и y^0. Противоречие доказывает звездообразность $\bar{D}$ относительно 0. По лемме 2 область D звездообразна. Теорема 1 доказана. □

Следствие. *Если область $D \subset \mathbb{R}^n$ задается условиями (3)–(4), $a \in \bar{D}, \partial D = S-$ гладкое $(n-1)$- мерное многообразие, то для звездообразности области D относительно a необходимо и достаточно, чтобы*

$$(p - a, \operatorname{grad} F(p)) \geq 0 \quad \forall p \in S.$$

Замечание. Из доказательства теоремы 1 следует, что в формулировке следствия 1 в случае $a \in \partial D$ можно заменить требование гладкости S на гладкость $S \setminus a$.

Пример. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^3$ задается неравенством

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2) - z < 0,$$

ее граница — 2-мерное многообразие — уравнением $F(x, y, z) = 0$. Выясним, для каких $a = (0, 0, z_0)$ эта область будет звездообразна относительно точки a.

Найдем $\operatorname{grad} F = (4x(x^2+y^2-1), 4y(x^2+y^2-1), -1)$. По следствию 1 надо проверить, для каких $z_0 \in \mathbb{R}$ неравенство $4x^2(x^2+y^2-1)+4y^2(x^2+y^2-1) - (z - z_0) \geq 0$ справедливо на границе области D. Учитывая уравнение границы, приходим к проверке неравенства $(x^2 + y^2)(3x^2 + 3y^2 - 2) \geq -z_0$ в плоскости XY. Минимизируя левую часть последнего неравенства в плоскости XY, получаем решение поставленной задачи: $z_0 \geq \dfrac{1}{3}$.

Приложения. Если область $D \subset \mathbb{C}^n$ задается условиями (3)–(4) ($x = (z_1, \ldots z_n) \in \mathbb{C}^n$) и ∂D — гладкое $(2n - 1)$-мерное вещественное многообразие, то (см., например, [1]) $\operatorname{grad} F(p) = 2\dfrac{\partial F}{\partial x^*}(p)$ и условие (8) примет вид

$$\operatorname{Re}\langle p, \frac{\partial F}{\partial x^*}(p)\rangle \geq 0 \tag{12}$$

(здесь A^* означает матрицу, сопряженную к матрице A, так, например, $\dfrac{\partial F}{\partial x^*}$ — вектор-столбец с координатами $(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_n})$). Отсюда легко получаются все известные условия звездообразности биголоморфного отображения f шара или поликруга типа условий (1), (2), а также условие звездообразности образа шара $f(\mathbb{B}^n)$ относительно граничной точки (см. [4]). Так, схема доказательства условий (1)–(2) следующая.

Сначала, как обычно, применением леммы Шварца (в случае звездообразности $f(\mathbb{B}^n)$ относительно граничной точки надо применять теорему Жюлиа) доказывается: если для биголоморфного в шаре $\mathbb{B}^n$ отображения f $f(0) = 0$ и $f(\mathbb{B}^n)$ звездообразна относительно 0, то это означает, что для любого $r \in (0, 1)$ область $f(r\mathbb{B}^n)$ также звездообразна относительно 0. Поскольку граница S_r такой области — $(2n-1)$-мерное вещественное многообразие и задается уравнением $F(w) =$

$||f^{-1}(w)||-r=0, \quad w \in f(\mathbb{B}^n)$, то по теореме 1 и (12) условие звездообразности относительно 0 области $f(r\mathbb{B}^n)$ имеет вид $\mathrm{Re}\langle p, \dfrac{\partial F}{\partial w^*}(p)\rangle \geq 0$, $p \in S_r$. Но для $p = f(z) \in S_r$

$$\frac{\partial F}{\partial w^*}(p) = (Df(z)^{-1})^*(\frac{\partial(||z||-r)}{\partial z})^* = (Df(z)^{-1})^*\frac{z}{2||z||}.$$

Следовательно, условие звездообразности области $f(r\mathbb{B}^n)$ примет вид

$$\mathrm{Re}\langle f(z), (Df(z)^{-1})^*z\rangle \geq 0, \quad ||z|| = r,$$

то есть

$$\mathrm{Re}\langle Df(z)^{-1}f(z), z\rangle \geq 0, \quad ||z|| = r.$$

Поскольку, как замечено выше, звездообразность $f(\mathbb{B}^n)$ равносильна звездообразности $f(r\mathbb{B}^n)$ для всех $r \in (0,1)$, то получаем следующий критерий звездообразности $f(\mathbb{B}^n)$:

$$\mathrm{Re}\langle Df(z)^{-1}f(z), z\rangle \geq 0 \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

Отсюда следуют (1) и (2), так как во введении замечено, что строгие неравенства в (1) и (2) можно заменить на нестрогие.

Аналогично получается критерий звездообразности биголоморфного отображения поликруга.

Условие гладкости гиперповерхности S, границы области D, является существенным препятствием в применении теоремы 1. Однако сама теорема 1 позволяет получать достаточные условия звездообразности областей с «плохой» границей.

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $0 \in D$ и существует диффеоморфизм $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \longrightarrow B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ с якобианом $J_f \neq 0$. Если для некоторого $\delta > 0$ в приграничном слое $D(\delta) = \{x \in D : \rho(x, \partial D) < \delta\}$ выполнено неравенство*

$$(f(x))^*(Df(x))x \geq 0, \quad x \in D(\delta), \tag{13}$$

то D звездообразна относительно 0.

Доказательство. При фиксированном $r \in (0,1)$ обозначим D_r подобласть области D, определяемую неравенством

$$f_1^2 + \ldots + f_n^2 < r^2.$$

Тогда $S_r = \partial D_r$ — гладкое $(n-1)$-мерное многообразие, задается уравнением

$$F(x) = f_1^2(x) + \ldots + f_n^2(x) - r^2 = 0.$$

Внешняя нормаль к S_r в точке $p \in S_r$ равна $N(p) = \operatorname{grad} F(p) = 2(f(p))^*(Df(p))$, $N(p) \neq 0$, так как $J_f(x) \neq 0$ в D.

Из ограниченности области D следует включение $S_r \subset D(\delta)$ при r, достаточно близких к 1. Поэтому при таких r скалярное произведение

$$(\operatorname{grad} F(p), p) = (f(p))^*(Df(p))p \geq 0 \quad \forall p \in S_r.$$

Следовательно, по теореме 1, область D_r звездообразна относительно 0.

Поскольку для любого $r_0 \in (0,1)$ область $D = \cup_{r \in (r_0,1)} D_r$ и области D_r звездообразны относительно 0, то и область D звездообразна относительно 0 как объединение таковых (это свойство, характерное для звездообразных множеств, вообще говоря, теряет силу, например, для выпуклых множеств). Теорема 2 доказана. □

Следствие. *Если $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, то при выполнении прочих условий теоремы 2 с заменой неравенства (13) на*

$$(f(x))^*(Df(x))(x-a) \geq 0, \quad x \in D(\delta), \tag{14}$$

область D будет звездообразной относительно a.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 легко видеть, что эта теорема и следствие 2 будут справедливы и для неограниченных областей D, если неравенства (13) и соответственно (14) будут выполнены в приграничном слое $D_\infty(\delta) = f^{-1}(B^n(\delta))$, где $B^n(\delta) = \{x \in B^n : ||x|| > 1 - \delta.\}$.

Следующая теорема дает достаточное условие звездообразности области D относительно ее граничной точки без предположения хороших свойств ∂D.

Теорема 3. *Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \partial D$ и существует диффеоморфизм $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \longrightarrow B^n$ с якобианом $J_f \neq 0$ в D, непрерывный в точке a, $f(a) = e_1 = (1, \ldots, 0) \in \partial B^n$. Обозначим $D[\delta] = f^{-1}(\{x \in B^n : ||x - \delta e_1|| < 1 - \delta\})$. Пусть для некоторого $\delta > 0$ в подобласти $D \setminus D[\delta]$ области D выполнено неравенство*

$$(f(x) - \varepsilon e_1)^*(Df(x))(x-a) \geq 0,$$

где $\varepsilon \in (0,\delta)$ и $||x-\varepsilon e_1|| = 1-\varepsilon$. Тогда D звездообразна относительно граничной точки a.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon \in (0,\delta)$. Из условия теоремы вытекает, что $a \in \partial D[\varepsilon]$ и $(\partial D[\varepsilon] \setminus a)$ — гладкое многообразие размерности $n-1$. Область $D[\varepsilon]$ задается неравенством

$$F(x) = (f_1(x)-\delta)^2 + f_2^2(x) + \ldots + f_n^2(x) - (1-\delta)^2 < 0,$$

а ее граница $\partial D[\varepsilon]$ — уравнением $F(x) = 0$. Поэтому, если $\partial D[\varepsilon] \ni p \neq a$, то внешняя нормаль к $D[\varepsilon]$ в точке p равна

$$N(p) = \operatorname{grad} F(p) = 2(f(p)-\varepsilon e_1)^*(Df(p)),$$

причем $N(p) \neq 0$, так как $J_f \neq 0$. Тогда по следствию 1 и замечанию 1 область $D[\varepsilon]$ звездообразна относительно a, так как

$$(\operatorname{grad} F(p), p-a) = 2(f(p)-\varepsilon e_1)^*(Df(p))(p-a) \geq 0 \quad \forall p \in \partial D[\varepsilon].$$

Поскольку области $D[\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0,1)$, исчерпывают область D, то D звездообразна относительно a. $\square$

Пример. Пусть G — плоская звездообразная относительно 0 область, $\psi(t) = w = x+iy$ — биголоморфное отображение круга Δ на G, $\psi(0) = 0$. Обозначим

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+iy \in G,\ z \in (-1,1)\}.$$

Граница этой области может и не быть многообразием (например, в случае, когда G — круг Δ со счетным множеством разрезов вдоль радиусов, сгущающихся к отрезку $[1/2,1]$). Для анализа области D на звездообразность относительно 0 непосредственно теорема 1 не применима. Продемонстрируем на примере этой области, как работает теорема 2 (хотя вывод о звездообразности области D в данном случае достаточно очевиден).

Обозначим $t = \varphi(w) = u(x,y) + iv(x,y)$ обратную к ψ функцию, определенную в G. При любом фиксированном $z = z_0 \in (-1,1)$ отображение

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} u(x,y)\sqrt{1-z^2} \\ v(x,y)\sqrt{1-z^2} \\ z \end{pmatrix}$$

биективно переводит сечение D_{z_0} области D плоскостью $z = z_0$ на ортогональный к оси OZ круг с центром в $(0, 0, z_0)$ и радиусом $\sqrt{1 - z_0^2}$. Следовательно, f является диффеоморфизмом области D на шар B^3,

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\sqrt{1-z^2} & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\sqrt{1-z^2} & \frac{-u(x,y)z}{\sqrt{1-z^2}} \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\sqrt{1-z^2} & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\sqrt{1-z^2} & \frac{-v(x,y)z}{\sqrt{1-z^2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$f^* Df =$$

$$(u\frac{\partial u}{\partial x}(1-z^2) + v\frac{\partial v}{\partial x}(1-z^2), u\frac{\partial u}{\partial y}(1-z^2) + v\frac{\partial v}{\partial y}(1-z^2), -u^2 z - v^2 z + z),$$

и

$$(f(x,y,z))^*(Df(x,y,z))(x,y,z) =$$

$$= (u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x})x(1-z^2) + (u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y})y(1-z^2) + (1-u^2-v^2)z^2 =$$

$$= (1-z^2)[\frac{\partial u}{\partial x}(ux+vy) + \frac{\partial v}{\partial x}(vx-uy)] + (1-u^2-v^2)z^2$$

по условию Коши — Римана для функции φ. Заметив, что

$$ux + vy = \mathrm{Re}\{\bar{w}\varphi(w)\}, \quad vx - uy = \mathrm{Im}\{\bar{w}\varphi(w)\}, \quad \varphi'(w) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

получим:

$$(f(x,y,z))^*(Df(x,y,z))(x,y,z) =$$

$$= (1-z^2)[\mathrm{Re}\,\varphi'(w)\,\mathrm{Re}\{\bar{w}\varphi(w)\} + \mathrm{Im}\,\varphi'(w)\,\mathrm{Im}\{\bar{w}\varphi(w)\}] + (1-u^2-v^2)z^2 =$$

$$= (1-z^2)[\mathrm{Re}\{\overline{w\varphi'(w)}\varphi(w)\} + (1-u^2-v^2)z^2. \tag{15}$$

Поскольку для ψ выполнено условие (1), то для обратной функции φ справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\varphi(w)}{w\varphi'(w)}\right\} > 0 \quad \forall w \in G,$$

то есть $\mathrm{Re}\{\overline{w\varphi'(w)}\varphi(w)\} \geq 0$ для $w \in G$. Так как $t = u + iv \in \Delta$, то $u^2 + v^2 < 1$. Следовательно, выражение (15) положительно в D.

По теореме 2 область D звездообразна.

Résumé

For the domains with smooth boundary the criterion of starlikeness with respect to inner or boundary point has been proved. As a consequence we obtained all known conditions of starlikeness of biholomorphic mappings in the ball and polydisk and sufficient conditions of starlikeness of the domains with arbitrary boundary.

Список литературы

[1] Kikuchi K. *Starlike and convex mappings in several complex variables*// Pacific J. Math. 1973. V. 44. P. 569–580.

[2] Matsuno T. *On starlike and convex-like theorems in the complex vector space* // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Dajgaku. Sect. A 5. 1955. P. 89–95.

[3] Suffridge T. J. *Starlikenes, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions* // Lect. Notes Math. 1976. V. 599. P. 146–159.

[4] Liczberski P., Starkov V. V. *Starlikenes with respect to a boundary point and Julia's theorem in* C^n // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 366. P. 360–366.

[5] Милнор Дж., Уоллес А. *Дифференциальная топология.* М: Мир, 1972. 277 с.

[6] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М: Наука, 1976. 542 с.

[7] Дудова А. С. *Условие звездообразности лебегова множества дифференцируемой по направлениям функции* // Сб. науч. тр. Сарат. ун-та. Серия Математика. Механика. 2003. Вып. 5. С. 30–33.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00952-а).

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: vstar@petrsu.ru