Abstract

K. F. Amozova

Sufficient conditions of α-accessibility of domain in nonsmooth case

This paper continues the study of α-accessible domains in $\mathbb{R}^n$ in nonsmooth case.

A domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$, is α-accessible (see [2], [3]), $\alpha \in [0, 1)$, if for every point $p \in \partial\Omega$ there exists a number $r = r(p) > 0$ such that the cone

$$K_+(p, \alpha, r) = \left\{ x \in \overline{\mathbb{B}}^n(p, r) : \ \left(x - p, \frac{p}{\|p\|} \right) \geq \|x - p\| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right\}$$

is included in $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

α-accessible domains are starlike domains with respect to the inner point zero and satisfy cone condition which is important for applications, such as the theory of integral representations of functions, imbedding theorems, the questions of the boundary behavior of functions, the solvability of Dirichlet problem.

Appropriate conditions of α-accessibility of domain, defined by the inequality $F(x) < 0$ for a continuous function F in $\mathbb{R}^n$ are obtained in [1]. There were obtained and some sufficient conditions of α-accessibility. In this article, these sufficient conditions have been significantly strengthened. Here is an example of their use. Conditions, obtained in the theorem, and consequences to it are also sufficient for the starlikeness of the set (the case when $\alpha = 0$). In the smooth case the criterion for the α-accessibility of domain was obtained in [2].

DOI: 10.15393/j3.art.2013.2321 **Issues of Analysis.** Vol. 2(20), No. 1, 2013

УДК 517.27/51/225

К. Ф. Амозова

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ α-ДОСТИЖИМОСТИ ОБЛАСТИ В НЕГЛАДКОМ СЛУЧАЕ[1]

Аннотация. В работе существенно усилен результат, полученный в [1], где для непрерывной функции $F(x)$, дифференцируемой по направлениям в $R^n\backslash\{0\}$ были получены условия α-достижимости области, определяемой неравенством $F(x) < 0$. Полученные условия также являются полезными и в случае ноль-достижимых (то есть звездообразных) областей.

Ключевые слова: *условие конуса, α-достижимые области, звездообразные множества.*

2010 Mathematical Subject Classification: *52A30, 26B35.*

В статье продолжается исследование α-достижимых областей в $\mathbb{R}^n$ в негладком случае.

Пусть $\alpha \in [0;1)$, $p \in \mathbb{R}^n$, (u,v) — скалярное произведение для u, $v \in \mathbb{R}^n$, $K_+(p,\alpha,r)$ — конус, полученный пересечением замкнутого евклидова шара $\overline{\mathbb{B}}^n(p,r)$ радиусом $r > 0$ и конуса

$$K_+(p,\alpha) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \left(x-p, \frac{p}{\|p\|}\right) \geq \|x-p\| \cos\frac{\alpha\pi}{2}\right\}.$$

Определение 1. [2], [3] *Область $D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in D$, называется α-достижимой (относительно 0), если для каждой точки $p \in \partial\, D$ существует такое число $r = r(p) > 0$, что конус $K_+(p,\alpha,r) \subset \mathbb{R}^n\backslash D$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности и при поддержке РФФИ (проект 11-01-00952-а).

В [2], [3] было доказано, что α-достижимые области являются звездообразными и удовлетворяют *условию конуса*, важному для приложений, например таких, как теория интегральных представлений функции, теоремы вложения, вопросы граничного поведения функций, разрешимости задачи Дирихле (см., например, [4, гл. 1, § 8; 5; 6; 7]).

Определение α-достижимой области, в отличие от областей с условием конуса, охватывает и случай $\alpha = 0$. В [1] было показано, что в случае $\alpha = 0$ условие α-достижимости равносильно условию звездообразности области.

Далее будем предполагать, что
a) *функция $F(x)$ — определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$;*
b) *открытое множество $D = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 0\}$ содержит точку ноль;*
c) *в точках множества уровня $S = \{p \in \mathbb{R}^n : F(p) = 0\}$ существуют производные по направлениям $\dfrac{\partial F}{\partial l}(p)$ для любого $l \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.*

В [8] А. С. Дудова получила следующее условие звездообразности множества $G = D \cup S$:

Теорема А. [8] *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b), c). Тогда:*

1) из звездообразности множества G относительно нуля следует, что $\dfrac{\partial F}{\partial(-p)}(p) \le 0$ для любого $p \in S$;

2) если для любой точки $p \in S$ выполняется хотя бы одно из условий:

i) $\dfrac{\partial F}{\partial(-p)}(p) < 0$;

ii) $\dfrac{\partial F}{\partial(-p)}(p) \le 0$, $\overline{\gamma}_F(p) = \gamma_{1,F}(p)$, где

$$\gamma_F(p) = \left\{ l \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : \frac{\partial F}{\partial l}(p) < 0 \right\},$$

$$\gamma_{1,F}(p) = \left\{ l \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : \frac{\partial F}{\partial l}(p) \le 0 \right\},$$

то множество G является звездообразным относительно 0.

Заметим, что в случае выполнения для каждой точки $p \in S$ условия *2i* достаточно в условиях теоремы A требовать существования на S производных только по направлениям $(-p)$.

В гладком случае критерий звездообразности множества D получен в [9]:

$$(\operatorname{grad} F(p), p) \geq 0 \text{ для любого } p \in \partial D.$$

Затем в [2], [3] был получен критерий α-достижимости области D в гладком случае:

$$\left(\frac{\operatorname{grad} F(p)}{\|\operatorname{grad} F(p)\|}, \frac{p}{\|p\|}\right) \geq \sin\frac{\alpha\pi}{2} \text{ для любого } p \in \partial D \ (\operatorname{grad} F(p) \neq 0).$$

Введем условие $c')$ более слабое по сравнению с условием $c)$:

$c')$ *в точках множества уровня S существуют производные $\dfrac{\partial F}{\partial l}(p)$ по всем направлениям l из конуса $(K_+(p,\alpha) - p)\setminus\{0\}$.*

В негладком случае необходимые и достаточные условия α–достижимости области были получены в [1].

Теорема B. [1] *1) Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям $a)$, $b)$, $c')$. Тогда*

i) из α-достижимости области D следует, что $\dfrac{\partial F}{\partial l}(p) \geq 0$ для любого направления $l \in (K_+(p,\alpha) - p)\setminus\{0\}$ и для любой точки $p \in S$;

ii) если D — ограниченное множество и производные

$$\frac{\partial F}{\partial l}(p) > 0 \tag{1}$$

для любого $l \in (K_+(p,\alpha) - p)\setminus\{0\}$ и для любой точки $p \in \partial D$, то D — α-достижимая область;

2) Если $F(x)$ удовлетворяет условиям $a)$ и $b)$, множество D ограничено и для некоторого $\delta > 0$ существуют такие производные по любым направлениям $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$, что

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > \frac{2F(x)}{\|x\|} \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2} \tag{2}$$

для любых $x \in D^\delta = \{x \in D : \rho(x,S) < \delta\}$, где $\rho(x,S)$ расстояние от x до S, то D — α-достижимая область.

Условие ограниченности, накладываемое на множество D в теореме В естественно, так как при $\alpha \in (0;1)$ α-достижимые области, не равные $\mathbb{R}^n$, ограничены (см. [2, теорема 3], [3]). Заметим также, что в неравенстве (2) правая часть отрицательная, в отличие от неравенства (1).

Целью данной статьи является получение более слабого достаточного условия α-достижимости области в негладком случае, чем условие (2). Пример, приведенный в конце статьи, показывает, что полученные результаты являются полезными даже в случае $\alpha = 0$. Их с успехом можно применять во многих случаях, например, когда теорема А неприменима.

Теорема 1. *Пусть $\Psi(\xi)$ — такая дифференцируемая, строго возрастающая числовая функция на $\mathbb{R}^+ = \{\xi \in \mathbb{R} : \xi > 0\}$, что существует $\lim\limits_{\xi \to +0} \Psi(\xi) = 0 \overset{def}{=} \Psi(0)$, функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a) и b) и множество D ограничено. Если для некоторого $\delta > 0$ существуют такие производные по любым направлениям $l \in (K_+(x,\alpha) - x) \setminus \{0\}$, что*

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > -\Psi'(\Psi^{-1}(-F(x)))\frac{2}{\|x\|}\Psi^{-1}(-F(x))\cos\frac{\alpha\pi}{2} \tag{3}$$

для любых $x \in D^\delta$, то D — α-достижимая область.

Доказательство. Обозначим $F_t(x) = F(x) + \Psi\left(t\,\dfrac{\|x\|^2}{2}\right)$, $t > 0$ и $D_t = \{x \in \mathbb{R}^n : F_t(x) < 0\}$. Тогда $D_t \subset D$ для любого $t > 0$, так как если $x \in D_t$, то $F(x) < -\Psi\left(t\,\dfrac{\|x\|^2}{2}\right) \leq 0$ для любого $t > 0$. Заметим также, что $0 \in D_t$, поскольку $F_t(0) = F(0) + \Psi(0) = F(0) < 0$, так как $0 \in D$.

Покажем далее, что существует такое число $T > 0$, что для всех $0 < t < T$ множества уровня $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : F_t(x) = 0\}$ будут лежать в D^δ.

Во-первых, $S_t \subset D$ для всех $t > 0$, так как если $x \in S_t$, то $x \neq 0$ и $F(x) = -\Psi\left(t\,\dfrac{\|x\|^2}{2}\right) < 0$.

Во-вторых, если $0 < t_1 < t_2$, то $D_{t_2} \subset D_{t_1}$. Действительно, если $x \in D_{t_2}$, то $F(x)+\Psi\left(t_2\,\dfrac{\|x\|^2}{2}\right) < 0$, поэтому из строгого возрастания Ψ

получаем $F(x) + \Psi\left(t_1 \dfrac{\|x\|^2}{2}\right) \le F(x) + \Psi\left(t_2 \dfrac{\|x\|^2}{2}\right) < 0$, поэтому $x \in D_{t_1}$.

Покажем, что при заданном $\delta > 0$ существует такое число $T > 0$, что $S_t \subset D^\delta$ для каждого $t \in (0, T)$. Предположим, что это не так. Тогда существует такая последовательность $y_n \in S_{t_n}$, что расстояние $\rho(y_n, S) > \delta$ при $t_n \to 0$. Поскольку S — замкнутое множество, то существует последовательность $x_n \in S$, такая, что $\|y_n - x_n\| = \rho(y_n, S) > \delta$.

Из ограниченности множества D следует, что из последовательности $\{y_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (обозначим ее так же), такую, что $y_n \to y_0 \in \mathbb{R}^n$. Переходя к пределу в равенстве $F(y_n) = -\Psi\left(t_n \dfrac{\|y_n\|^2}{2}\right)$ при $t_n \to 0$, получаем $F(y_0) = -\Psi(0) = 0$, т. е. $y_0 \in S$. Но $\rho(y_n, S) > \delta$. Следовательно $\rho(y_0, S) \ge \delta$. Противоречие. Следовательно, существует такое число $T > 0$, что $S_t \subset D^\delta$ для любых $t \in (0, T)$.

Так как для всех $x \in S_t$, $0 < t < T$, выполняется

$$t \frac{\|x\|^2}{2} = \Psi^{-1}\left(-F(x)\right),$$

то по условию теоремы

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial l}(x) &> -\Psi'(\Psi^{-1}(-F(x))) \frac{2}{\|x\|} \Psi^{-1}(-F(x)) \cos\frac{\alpha\pi}{2} = \\ &= -\Psi'\left(t \frac{\|x\|^2}{2}\right) \frac{2}{\|x\|} t \frac{\|x\|^2}{2} \cos\frac{\alpha\pi}{2} = -t\|x\|\Psi'\left(t \frac{\|x\|^2}{2}\right) \cos\frac{\alpha\pi}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

для всех $x \in S_t$, $0 < t < T$ и $l \in (K_+(x, \alpha) - x) \setminus \{0\}$.

Далее, не умаляя общности, можно считать, что $\|l\| = 1$. При таких l и x

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial l}\left(t \frac{\|x\|^2}{2}\right) &= \left(\text{grad } \Psi\left(t \frac{\|x\|^2}{2}\right), l\right) = t\,\Psi'\left(t \frac{\|x\|^2}{2}\right)(x, l) \ge \\ &\ge t\,\Psi'\left(t \frac{\|x\|^2}{2}\right) \|x\| \cos\frac{\alpha\pi}{2} > 0, \end{aligned} \tag{5}$$

вследствие строгого возрастания Ψ. Из (4) и (5) для всех $x \in S_t$ существуют производные по направлениям

$$\frac{\partial F_t}{\partial l}(x) = \frac{\partial F}{\partial l}(x) + \frac{\partial \Psi}{\partial l}\left(t \frac{\|x\|^2}{2}\right) > 0$$

для любых $l \in (K_+(x,\alpha) - x) \setminus \{0\}$, $\|l\| = 1$. Тогда из теоремы B, условие *1 ii*, следует, что область D_t — α-достижима для любого $t \in (0,T)$.

Покажем теперь, что для любого $x_0 \in D$ найдется такая область D_t, где $0 < t < T$, что $x_0 \in D_t$.

Пусть $x_0 \in D$, $x_0 \neq 0$ и $F(x_0) = -C < 0$. Тогда $x_0 \in D_t$ для всех $t : 0 < t < \dfrac{2\Psi^{-1}(C)}{\|x_0\|^2} = t_0$, так как

$$F_t(x_0) = F(x_0) + \Psi\left(t\,\frac{\|x_0\|^2}{2}\right) < -C + \Psi\left(t_0\,\frac{\|x_0\|^2}{2}\right) = -C + C = 0.$$

Таким образом, $D = \bigcup\limits_{0<t<T} D_t$, где каждая область D_t — α-достижимая. В [2] доказано, что объединение α-достижимых областей есть α-достижимая область, что и доказывает теорему. □

Из этой теоремы, в частности, получим следующее достаточное условие звездообразности области (случай $\alpha = 0$):

Следствие 1. *Пусть $\Psi(\xi)$ — дифференцируемая, строго возрастающая числовая функция на $\mathbb{R}^+ = \{\xi \in \mathbb{R} : \xi > 0\}$, такая, что $\lim\limits_{\xi\to+0} \Psi(\xi) = 0 \overset{def}{=} \Psi(0)$, функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b) и множество D ограничено. Если для $\delta > 0$ существуют производные*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) > -\Psi'(\Psi^{-1}(-F(x)))\frac{2}{\|x\|}\Psi^{-1}(-F(x))$$

для любых $x \in D^\delta$, то D — звездообразная область.

Если в условиях теоремы 1 в качестве Ψ взять функцию $\Psi(\xi) = \xi$, то получим доказанное в [1] следствие 1, в котором условие (3) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > \frac{2F(x)}{\|x\|}\cos\frac{\alpha\pi}{2}. \tag{6}$$

Покажем, что правую часть в условии (6) за счет выбора функции Ψ в теореме 1 можно сделать еще меньше, причем в любое число раз. Для этого рассмотрим функцию $\eta = \Psi(\xi) = \xi^n$, $n \in \mathbb{N}$. Обратной к ней будет функция $\xi = \Psi^{-1}(\eta) = \eta^{\frac{1}{n}}$. Тогда правая часть условия (3) примет вид

$$-\Psi'(\Psi^{-1}(-F(x)))\frac{2}{\|x\|}\Psi^{-1}(-F(x))\cos\frac{\alpha\pi}{2} =$$

$$= -n\left(\Psi^{-1}(-F(x))\right)^{n-1}\frac{2}{\|x\|}\,(-F(x))^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\alpha\pi}{2} =$$

$$= -n\,(-F(x))^{\frac{n-1}{n}}\,\frac{2}{\|x\|}\,(-F(x))^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\alpha\pi}{2} = \frac{2nF(x)}{\|x\|}\cos\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Таким образом, получаем

Следствие 2. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b) и множество D ограничено. Если для некоторого $\delta > 0$ существуют производные*

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > \frac{2nF(x)}{\|x\|}\cos\frac{\alpha\pi}{2} \tag{7}$$

для любых $x \in D^\delta$ по любым направлениям $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$ и некоторого $n \in \mathbb{N}$, то D — α-достижимая область.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий возможность использования следствия 2.

Пример 1. Для $X \in \mathbb{R}^2$ определим функцию

$$F(X) = \begin{cases} -e^{\Phi(\|X\|^2)}, & \text{если } \|X\| < 1,\\ 0, & \text{если } \|X\| \geq 1,\end{cases}$$

где $\Phi(\xi)$ — гладкая числовая функция на $(0;1)$, такая, что $\lim\limits_{\xi\to 1-}\Phi(\xi) = -\infty$, и для любого $\alpha \in [0;1)$ существует такое $n = n(\alpha) \in \mathbb{N}$, что в каждой окрестности $(\nu;1)$, $0 < \nu < 1$, имеется интервал возрастания функции Φ, причем на каждом таком интервале возрастания

$$\Phi'(\|X\|^2) < n\cdot\cos\frac{\alpha\pi}{2}.$$

И пусть множество $D \subset \mathbb{R}^2$ задано условием

$$F(X) < 0 \Longleftrightarrow X \in \mathbb{B}^2(0,1).$$

Тогда множество уровня $S = \{X \in \mathbb{R}^2 : F(X) = 0\} = \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{B}^2(0,1)$. Покажем, что для области D выполняется условие (7) следствия 2.

При фиксированном δ, $0 < \delta < 1$, рассмотрим приграничный слой $D^\delta = \left\{X = (x;y) \in \mathbb{R}^2 : (1-\delta) < \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}$.

Пусть далее $X \in D^\delta$ и $l \in (K_+(X,\alpha) - X)\setminus\{0\}$, $\|l\| = 1$. Так как функция $F(X)$ дифференцируема в D^δ, то $\dfrac{\partial F}{\partial l}(X) = (\operatorname{grad} F(X), l)$.

Обозначим через $\beta \in \left[0; \dfrac{\alpha\pi}{2}\right]$ угол между векторами l и X.

Условие (7) в данном случае примет вид

$$\left(-e^{\Phi(\|X\|^2)} \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot 2X, l\right) > \frac{-2n \cdot e^{\Phi(\|X\|^2)}}{\|X\|} \cos\frac{\alpha\pi}{2},$$

то есть

$$\begin{gathered}\Phi'(\|X\|^2) \cdot (X, l) < \frac{n}{\|X\|} \cos\frac{\alpha\pi}{2} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \|X\|^2 \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot \cos\beta < n \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2}.\end{gathered} \tag{8}$$

На тех промежутках, где функция Φ не возрастает, очевидно, что неравенство (8) выполнено. На тех же промежутках, где функция Φ возрастает, в силу ее определения следует, что для любого $X \in D^\delta$

$$\|X\|^2 \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot \cos\beta < \Phi'(\|X\|^2) < n \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Следовательно, неравенство (8) — верно. Таким образом, все условия следствия 2 выполнены, и мы пришли к (вообще говоря, заранее известному) выводу, что круг $\mathbb{B}^2(0,1)$ является α-достижимой областью.

Это следствие не всегда удобно использовать для доказательства α-достижимости некоторых областей в связи с тем, что в правой части выражения (7) стоит некоторое универсальное натуральное число n. Этот множитель n можно заменить на $\ln\left(\dfrac{1}{-F(x)}\right)$, существенно усилив условие (7). Усиление вытекает из того, что в силу непрерывности функции $F(x)$ пограничный слой D^δ можно выбрать настолько узким, что для всех $x \in D^\delta$ будет верно, что $\ln\left(\dfrac{1}{-F(x)}\right) > n$ для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Для реализации такой модификации условия (7) в теореме 1 возьмем функцию $\eta = \Psi(\xi) = e^{-1/\xi}$. Обратной к ней будет функция $\xi = \Psi^{-1}(\eta) = -\dfrac{1}{\ln\eta}$. В этом случае правая часть условия (3) примет вид

$$-\frac{1}{\left(\Psi^{-1}(-F(x))\right)^2}\, e^{-1/(\Psi^{-1}(-F(x)))}\frac{2}{\|x\|}\Psi^{-1}(-F(x))\cos\frac{\alpha\pi}{2} =$$

$$= \frac{2\ln(-F(x))}{\|x\|}\, e^{\ln(-F(x))}\cos\frac{\alpha\pi}{2} = \frac{-2F(x)\ln(-F(x))}{\|x\|}\cos\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Таким образом, получаем

Следствие 3. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b) и множество D ограничено. Если для некоторого $\delta > 0$ существуют производные*

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > \frac{-2F(x)\ln(-F(x))}{\|x\|}\cos\frac{\alpha\pi}{2} \tag{9}$$

для любых $x \in D^\delta$ по любым направлениям $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$, то D — α-достижимая область.

Возможность выбора функции Ψ в засвисимости от функции F в теореме 1 позволяет найти соответствующий способ проверки α-достижимости области в каждом отдельном случае. В следующем иллюстративном примере невозможно применить следствие 2 для проверки α-достижимости множества D, но более сильное следствие 3 применить уже можно.

Пример 2. Для $X \in \mathbb{R}^2$ определим функцию

$$F(X) = \begin{cases} -e^{\Phi(\|X\|^2)}, & \text{если } \|X\| < 1, \\ 0, & \text{если } \|X\| \geq 1, \end{cases}$$

где $\Phi(\xi)$ — гладкая числовая функция на $[0;1)$, такая, что существует $\lim\limits_{\xi\to 1-}\Phi(\xi) = -\infty, \Phi(\xi) < 0$ и в каждой окрестности $(\nu;1), 0 < \nu < 1$, существует интервал возрастания функции Φ, причем для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0;1)$ — такое, что

$$\frac{\Phi'(\|X\|^2)}{-\Phi(\|X\|^2)} < \varepsilon$$

для любого $X : \delta < \|X\| < 1$.

Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^2$ задано условием

$$F(X) < 0 \Longleftrightarrow X \in \mathbb{B}^2(0,1).$$

Тогда множество уровня $S = \{X \in \mathbb{R}^2 : F(X) = 0\} = \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{B}^2(0,1)$. Покажем, что для области D выполняется условие (9) следствия 3.

При фиксированном δ, $0 < \delta < 1$, рассмотрим приграничный слой $D^\delta = \left\{X = (x;y) \in \mathbb{R}^2 : (1-\delta) < \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}$.

Пусть далее $X \in D^\delta$ и $l \in (K_+(X,\alpha) - X)\setminus\{0\}$, $\|l\| = 1$.

Как и в примере 1, обозначим через $\beta \in \left[0; \dfrac{\alpha\pi}{2}\right]$ угол между векторами l и X. Тогда условие (9) примет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial l}(X) = (\operatorname{grad} F(X), l) = \left(-e^{\Phi(\|X\|^2)} \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot 2X, l\right) >$$

$$> \frac{2e^{\Phi(\|X\|^2)} \cdot \Phi(\|X\|^2)}{\|X\|} \cos\frac{\alpha\pi}{2},$$

то есть

$$\begin{gathered} \Phi'(\|X\|^2) \cdot (X, l) < \frac{-\Phi(\|X\|^2)}{\|X\|} \cos\frac{\alpha\pi}{2} \iff \\ \iff \|X\|^2 \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot \cos\beta < -\Phi(\|X\|^2) \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2}. \end{gathered} \tag{10}$$

На тех промежутках, где функция Φ не возрастает, очевидно, что неравенство (10) выполнено. На тех же промежутках, где функция Φ возрастает, в силу ее определения следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0; 1)$, такое, что для любого $X \in D^\delta$

$$\|X\|^2 \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot \cos\beta < \Phi'(\|X\|^2) < -\Phi(\|X\|^2) \cdot \varepsilon = -\Phi(\|X\|^2) \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Следовательно, неравенство (10) выполнено при $\alpha = \dfrac{2}{\pi} \arccos\varepsilon$. Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \alpha = 1$, то в силу произвольности ε по следствию 3 область D является α-достижимой для любого α, сколь угодно близкого к 1. Заметим, что в обоих примерах критерий α-достижимости для гладкого случая из [2] непременим, так как уравнение $F(X) = 0$ не определяет в $\mathbb{R}^n$ гладкое многообразие размерности $(n - 1)$.

Список литературы

[1] Амозова К. Ф., Старков В. В. *Альфа-достижимые области, негладкий случай* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 3. С. 3–8.

[2] Liczberski P., Starkov V. V. *Domains in $\mathbb{R}^n$ with conical accessible boundary* // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 408, No. 2. P. 547–560.

[3] Liczberski P., Starkov V. V. *Planar α-angularly starlike domains, α-angularly starlike functions and their generalizations to multi-dimensional case* // 60 years of analytic functions in Lublin in memory of our professors and friends Jan G. Krzyz, Zdzislaw Lewandowski and Wojciech Szapiel/ University of Economics and Innovation in Lublin. Lublin: Innovatio Press Scientific publishing house, 2012. P. 117–124.

[4] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М.: Наука, 1975.

[5] Долженко Е. П. *Граничные свойства произвольных функций* // Изв. АН СССР, Сер. Математика. 1967. Т. 31. С. 3–14. DOI: 10.1070/IM1967v001n01ABEH000543.

[6] Adams R. A., Fournier J. *Cone conditions and properties of Sobolev spaces* // J. Math. Anal. Appl. 1977. Vol. 61. P. 713–734. DOI: 10.1016/0022-247X(77)90173-1.

[7] Zaremba S. *Sur le principe de Direchlet* // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 293–316. DOI: 10.1007/BF02393130.

[8] Дудова А. С. *Условия звездности лебегова множества дифференцируемой по направлениям функции* // Математика. Механика : Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 30–33.

[9] Старков В. В. *Условия звездообразности областей в* $\mathbb{R}^n$ // Тр. ПетрГУ. Сер. Математика. 2011. Вып. 18. С. 70–82.

Работа поступила 3 июня 2013 г.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33.
E-mail: amokira@rambler.ru