DOI: 10.15393/j3.art.2013.2321 **Issues of Analysis.** Vol. 2(20), No. 1, 2013

УДК 517.27/51/225

К. Ф. Амозова

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ α-ДОСТИЖИМОСТИ ОБЛАСТИ В НЕГЛАДКОМ СЛУЧАЕ[1]

Аннотация. В работе существенно усилен результат, полученный в [1], где для непрерывной функции $F(x)$, дифференцируемой по направлениям в $R^n\setminus\{0\}$ были получены условия α-достижимости области, определяемой неравенством $F(x) < 0$. Полученные условия также являются полезными и в случае ноль-достижимых (то есть звездообразных) областей.

Ключевые слова: *условие конуса, α-достижимые области, звездообразные множества.*

2010 Mathematical Subject Classification: *52A30, 26B35.*

В статье продолжается исследование α-достижимых областей в $\mathbb{R}^n$ в негладком случае.

Пусть $\alpha \in [0;1)$, $p \in \mathbb{R}^n$, (u,v) — скалярное произведение для u, $v \in \mathbb{R}^n$, $K_+(p,\alpha,r)$ — конус, полученный пересечением замкнутого евклидова шара $\overline{\mathbb{B}}^n(p,r)$ радиусом $r > 0$ и конуса

$$K_+(p,\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \left(x - p, \frac{p}{\|p\|} \right) \geq \|x - p\| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right\}.$$

Определение 1. [2], [3] *Область $D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in D$, называется α-достижимой (относительно 0), если для каждой точки $p \in \partial\, D$ существует такое число $r = r(p) > 0$, что конус $K_+(p,\alpha,r) \subset \mathbb{R}^n\setminus D$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности и при поддержке РФФИ (проект 11-01-00952-а).

В [2], [3] было доказано, что α-достижимые области являются звездообразными и удовлетворяют *условию конуса*, важному для приложений, например таких, как теория интегральных представлений функции, теоремы вложения, вопросы граничного поведения функций, разрешимости задачи Дирихле (см., например, [4, гл. 1, § 8; 5; 6; 7]).

Определение α-достижимой области, в отличие от областей с условием конуса, охватывает и случай $\alpha = 0$. В [1] было показано, что в случае $\alpha = 0$ условие α-достижимости равносильно условию звездообразности области.

Далее будем предполагать, что
a) *функция* $F(x)$ — *определена и непрерывна на* $\mathbb{R}^n$;
b) *открытое множество* $D = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 0\}$ *содержит точку ноль;*
c) *в точках множества уровня* $S = \{p \in \mathbb{R}^n : F(p) = 0\}$ *существуют производные по направлениям* $\dfrac{\partial F}{\partial l}(p)$ *для любого* $l \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

В [8] А. С. Дудова получила следующее условие звездообразности множества $G = D \cup S$:

Теорема А. [8] *Пусть функция* $F(x)$ *удовлетворяет условиям* a), b), c). *Тогда:*

1) из звездообразности множества G *относительно нуля следует, что* $\dfrac{\partial F}{\partial(-p)}(p) \le 0$ *для любого* $p \in S$;

2) если для любой точки $p \in S$ *выполняется хотя бы одно из условий:*

i) $\dfrac{\partial F}{\partial(-p)}(p) < 0$;

ii) $\dfrac{\partial F}{\partial(-p)}(p) \le 0$, $\overline{\gamma}_F(p) = \gamma_{1,F}(p)$, где

$$\gamma_F(p) = \left\{ l \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : \frac{\partial F}{\partial l}(p) < 0 \right\},$$

$$\gamma_{1,F}(p) = \left\{ l \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : \frac{\partial F}{\partial l}(p) \le 0 \right\},$$

то множество G *является звездообразным относительно 0.*

Заметим, что в случае выполнения для каждой точки $p \in S$ условия $2\,i$ достаточно в условиях теоремы A требовать существования на S производных только по направлениям $(-p)$.

В гладком случае критерий звездообразности множества D получен в [9]:

$$(\operatorname{grad} F(p), p) \geq 0 \text{ для любого } p \in \partial D.$$

Затем в [2], [3] был получен критерий α-достижимости области D в гладком случае:

$$\left(\frac{\operatorname{grad} F(p)}{\| \operatorname{grad} F(p) \|}, \frac{p}{\|p\|} \right) \geq \sin \frac{\alpha \pi}{2} \text{ для любого } p \in \partial D \ (\operatorname{grad} F(p) \neq 0).$$

Введем условие c') более слабое по сравнению с условием c):

c') *в точках множества уровня S существуют производные $\dfrac{\partial F}{\partial l}(p)$ по всем направлениям l из конуса $(K_+(p,\alpha) - p) \setminus \{0\}$.*

В негладком случае необходимые и достаточные условия α–достижимости области были получены в [1].

Теорема B. [1] *1) Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b), c'). Тогда*

i) из α-достижимости области D следует, что $\dfrac{\partial F}{\partial l}(p) \geq 0$ для любого направления $l \in (K_+(p,\alpha) - p) \setminus \{0\}$ и для любой точки $p \in S$;

ii) если D — ограниченное множество и производные

$$\frac{\partial F}{\partial l}(p) > 0 \tag{1}$$

для любого $l \in (K_+(p,\alpha) - p) \setminus \{0\}$ и для любой точки $p \in \partial D$, то D — α-достижимая область;

2) Если $F(x)$ удовлетворяет условиям a) и b), множество D ограничено и для некоторого $\delta > 0$ существуют такие производные по любым направлениям $l \in (K_+(x,\alpha) - x) \setminus \{0\}$, что

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > \frac{2F(x)}{\|x\|} \cdot \cos \frac{\alpha \pi}{2} \tag{2}$$

для любых $x \in D^\delta = \{x \in D : \rho(x,S) < \delta\}$, где $\rho(x,S)$ расстояние от x до S, то D — α-достижимая область.

Условие ограниченности, накладываемое на множество D в теореме B естественно, так как при $\alpha \in (0;1)$ α-достижимые области, не равные $\mathbb{R}^n$, ограничены (см. [2, теорема 3], [3]). Заметим также, что в неравенстве (2) правая часть отрицательная, в отличие от неравенства (1).

Целью данной статьи является получение более слабого достаточного условия α-достижимости области в негладком случае, чем условие (2). Пример, приведенный в конце статьи, показывает, что полученные результаты являются полезными даже в случае $\alpha = 0$. Их с успехом можно применять во многих случаях, например, когда теорема A неприменима.

Теорема 1. *Пусть $\Psi(\xi)$ — такая дифференцируемая, строго возрастающая числовая функция на $\mathbb{R}^+ = \{\xi \in \mathbb{R} : \xi > 0\}$, что существует $\lim\limits_{\xi \to +0} \Psi(\xi) = 0 \stackrel{def}{=} \Psi(0)$, функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a) и b) и множество D ограничено. Если для некоторого $\delta > 0$ существуют такие производные по любым направлениям $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$, что*

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > -\Psi'(\Psi^{-1}(-F(x)))\frac{2}{\|x\|}\Psi^{-1}(-F(x))\cos\frac{\alpha\pi}{2} \tag{3}$$

для любых $x \in D^\delta$, то D — α-достижимая область.

Доказательство. Обозначим $F_t(x) = F(x) + \Psi\left(t\,\dfrac{\|x\|^2}{2}\right)$, $t > 0$ и $D_t = \{x \in \mathbb{R}^n : F_t(x) < 0\}$. Тогда $D_t \subset D$ для любого $t > 0$, так как если $x \in D_t$, то $F(x) < -\Psi\left(t\,\dfrac{\|x\|^2}{2}\right) \le 0$ для любого $t > 0$. Заметим также, что $0 \in D_t$, поскольку $F_t(0) = F(0) + \Psi(0) = F(0) < 0$, так как $0 \in D$.

Покажем далее, что существует такое число $T > 0$, что для всех $0 < t < T$ множества уровня $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : F_t(x) = 0\}$ будут лежать в D^δ.

Во-первых, $S_t \subset D$ для всех $t > 0$, так как если $x \in S_t$, то $x \neq 0$ и $F(x) = -\Psi\left(t\,\dfrac{\|x\|^2}{2}\right) < 0$.

Во-вторых, если $0 < t_1 < t_2$, то $D_{t_2} \subset D_{t_1}$. Действительно, если $x \in D_{t_2}$, то $F(x) + \Psi\left(t_2\,\dfrac{\|x\|^2}{2}\right) < 0$, поэтому из строгого возрастания Ψ

получаем $F(x) + \Psi\left(t_1 \dfrac{\|x\|^2}{2}\right) \le F(x) + \Psi\left(t_2 \dfrac{\|x\|^2}{2}\right) < 0$, поэтому $x \in D_{t_1}$.

Покажем, что при заданном $\delta > 0$ существует такое число $T > 0$, что $S_t \subset D^\delta$ для каждого $t \in (0, T)$. Предположим, что это не так. Тогда существует такая последовательность $y_n \in S_{t_n}$, что расстояние $\rho(y_n, S) > \delta$ при $t_n \to 0$. Поскольку S — замкнутое множество, то существует последовательность $x_n \in S$, такая, что $\|y_n - x_n\| = \rho(y_n, S) > \delta$.

Из ограниченности множества D следует, что из последовательности $\{y_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (обозначим ее так же), такую, что $y_n \to y_0 \in \mathbb{R}^n$. Переходя к пределу в равенстве $F(y_n) = -\Psi\left(t_n \dfrac{\|y_n\|^2}{2}\right)$ при $t_n \to 0$, получаем $F(y_0) = -\Psi(0) = 0$, т. е. $y_0 \in S$. Но $\rho(y_n, S) > \delta$. Следовательно $\rho(y_0, S) \ge \delta$. Противоречие. Следовательно, существует такое число $T > 0$, что $S_t \subset D^\delta$ для любых $t \in (0, T)$.

Так как для всех $x \in S_t$, $0 < t < T$, выполняется

$$t \frac{\|x\|^2}{2} = \Psi^{-1}\left(-F(x)\right),$$

то по условию теоремы

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial l}(x) > -\Psi'(\Psi^{-1}(-F(x)))\frac{2}{\|x\|}\Psi^{-1}(-F(x))\cos\frac{\alpha\pi}{2} = \\ = -\Psi'\left(t\frac{\|x\|^2}{2}\right)\frac{2}{\|x\|}\,t\,\frac{\|x\|^2}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} = -t\|x\|\Psi'\left(t\frac{\|x\|^2}{2}\right)\cos\frac{\alpha\pi}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

для всех $x \in S_t$, $0 < t < T$ и $l \in (K_+(x, \alpha) - x) \setminus \{0\}$.

Далее, не умаляя общности, можно считать, что $\|l\| = 1$. При таких l и x

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial l}\left(t\frac{\|x\|^2}{2}\right) = \left(\operatorname{grad}\,\Psi\left(t\frac{\|x\|^2}{2}\right), l\right) = t\,\Psi'\left(t\frac{\|x\|^2}{2}\right)(x, l) \ge \\ \ge t\,\Psi'\left(t\frac{\|x\|^2}{2}\right)\|x\|\,\cos\frac{\alpha\pi}{2} > 0, \end{aligned} \tag{5}$$

вследствие строгого возрастания Ψ. Из (4) и (5) для всех $x \in S_t$ существуют производные по направлениям

$$\frac{\partial F_t}{\partial l}(x) = \frac{\partial F}{\partial l}(x) + \frac{\partial \Psi}{\partial l}\left(t\frac{\|x\|^2}{2}\right) > 0$$

для любых $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$, $\|l\| = 1$. Тогда из теоремы B, условие *1 ii*, следует, что область D_t — α-достижима для любого $t \in (0, T)$.

Покажем теперь, что для любого $x_0 \in D$ найдется такая область D_t, где $0 < t < T$, что $x_0 \in D_t$.

Пусть $x_0 \in D$, $x_0 \neq 0$ и $F(x_0) = -C < 0$. Тогда $x_0 \in D_t$ для всех $t : 0 < t < \dfrac{2\Psi^{-1}(C)}{\|x_0\|^2} = t_0$, так как

$$F_t(x_0) = F(x_0) + \Psi\left(t\,\frac{\|x_0\|^2}{2}\right) < -C + \Psi\left(t_0\,\frac{\|x_0\|^2}{2}\right) = -C + C = 0.$$

Таким образом, $D = \bigcup\limits_{0<t<T} D_t$, где каждая область D_t — α-достижимая. В [2] доказано, что объединение α-достижимых областей есть α-достижимая область, что и доказывает теорему. $\square$

Из этой теоремы, в частности, получим следующее достаточное условие звездообразности области (случай $\alpha = 0$):

Следствие 1. *Пусть $\Psi(\xi)$ — дифференцируемая, строго возрастающая числовая функция на $\mathbb{R}^+ = \{\xi \in \mathbb{R} : \xi > 0\}$, такая, что $\lim\limits_{\xi\to+0} \Psi(\xi) = 0 \stackrel{def}{=} \Psi(0)$, функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b) и множество D ограничено. Если для $\delta > 0$ существуют производные*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) > -\Psi'(\Psi^{-1}(-F(x)))\frac{2}{\|x\|}\Psi^{-1}(-F(x))$$

для любых $x \in D^\delta$, то D — звездообразная область.

Если в условиях теоремы 1 в качестве Ψ взять функцию $\Psi(\xi) = \xi$, то получим доказанное в [1] следствие 1, в котором условие (3) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > \frac{2F(x)}{\|x\|}\cos\frac{\alpha\pi}{2}. \tag{6}$$

Покажем, что правую часть в условии (6) за счет выбора функции Ψ в теореме 1 можно сделать еще меньше, причем в любое число раз. Для этого рассмотрим функцию $\eta = \Psi(\xi) = \xi^n$, $n \in \mathbb{N}$. Обратной к ней будет функция $\xi = \Psi^{-1}(\eta) = \eta^{\frac{1}{n}}$. Тогда правая часть условия (3) примет вид

$$-\Psi'(\Psi^{-1}(-F(x)))\frac{2}{\|x\|}\Psi^{-1}(-F(x))\cos\frac{\alpha\pi}{2} =$$

$$= -n\left(\Psi^{-1}(-F(x))\right)^{n-1}\frac{2}{\|x\|}\left(-F(x)\right)^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\alpha\pi}{2} =$$

$$= -n\left(-F(x)\right)^{\frac{n-1}{n}}\frac{2}{\|x\|}\left(-F(x)\right)^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\alpha\pi}{2} = \frac{2nF(x)}{\|x\|}\cos\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Таким образом, получаем

Следствие 2. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b) и множество D ограничено. Если для некоторого $\delta > 0$ существуют производные*

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > \frac{2nF(x)}{\|x\|}\cos\frac{\alpha\pi}{2} \tag{7}$$

для любых $x \in D^\delta$ по любым направлениям $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$ и некоторого $n \in \mathbb{N}$, то D — α-достижимая область.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий возможность использования следствия 2.

Пример 1. Для $X \in \mathbb{R}^2$ определим функцию

$$F(X) = \begin{cases} -e^{\Phi(\|X\|^2)}, & \text{если } \|X\| < 1, \\ 0, & \text{если } \|X\| \geq 1, \end{cases}$$

где $\Phi(\xi)$ — гладкая числовая функция на $(0;1)$, такая, что $\lim\limits_{\xi\to 1-}\Phi(\xi) = -\infty$, и для любого $\alpha \in [0;1)$ существует такое $n = n(\alpha) \in \mathbb{N}$, что в каждой окрестности $(\nu;1)$, $0 < \nu < 1$, имеется интервал возрастания функции Φ, причем на каждом таком интервале возрастания

$$\Phi'(\|X\|^2) < n \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2}.$$

И пусть множество $D \subset \mathbb{R}^2$ задано условием

$$F(X) < 0 \Longleftrightarrow X \in \mathbb{B}^2(0,1).$$

Тогда множество уровня $S = \{X \in \mathbb{R}^2 : F(X) = 0\} = \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{B}^2(0,1)$. Покажем, что для области D выполняется условие (7) следствия 2.

При фиксированном δ, $0 < \delta < 1$, рассмотрим приграничный слой $D^\delta = \left\{X = (x;y) \in \mathbb{R}^2 : (1-\delta) < \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}$.

Пусть далее $X \in D^\delta$ и $l \in (K_+(X,\alpha) - X)\setminus\{0\}$, $\|l\| = 1$. Так как функция $F(X)$ дифференцируема в D^δ, то $\dfrac{\partial F}{\partial l}(X) = (\operatorname{grad} F(X), l)$.

Обозначим через $\beta \in \left[0; \dfrac{\alpha\pi}{2}\right]$ угол между векторами l и X.

Условие (7) в данном случае примет вид

$$\left(-e^{\Phi(\|X\|^2)} \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot 2X, l\right) > \frac{-2n \cdot e^{\Phi(\|X\|^2)}}{\|X\|} \cos\frac{\alpha\pi}{2},$$

то есть

$$\begin{gathered}\Phi'(\|X\|^2) \cdot (X, l) < \frac{n}{\|X\|} \cos\frac{\alpha\pi}{2} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \|X\|^2 \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot \cos\beta < n \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2}.\end{gathered} \tag{8}$$

На тех промежутках, где функция Φ не возрастает, очевидно, что неравенство (8) выполнено. На тех же промежутках, где функция Φ возрастает, в силу ее определения следует, что для любого $X \in D^\delta$

$$\|X\|^2 \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot \cos\beta < \Phi'(\|X\|^2) < n \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Следовательно, неравенство (8) — верно. Таким образом, все условия следствия 2 выполнены, и мы пришли к (вообще говоря, заранее известному) выводу, что круг $\mathbb{B}^2(0,1)$ является α-достижимой областью.

Это следствие не всегда удобно использовать для доказательства α-достижимости некоторых областей в связи с тем, что в правой части выражения (7) стоит некоторое универсальное натуральное число n. Этот множитель n можно заменить на $\ln\left(\dfrac{1}{-F(x)}\right)$, существенно усилив условие (7). Усиление вытекает из того, что в силу непрерывности функции $F(x)$ пограничный слой D^δ можно выбрать настолько узким, что для всех $x \in D^\delta$ будет верно, что $\ln\left(\dfrac{1}{-F(x)}\right) > n$ для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Для реализации такой модификации условия (7) в теореме 1 возьмем функцию $\eta = \Psi(\xi) = e^{-1/\xi}$. Обратной к ней будет функция $\xi = \Psi^{-1}(\eta) = -\dfrac{1}{\ln\eta}$. В этом случае правая часть условия (3) примет вид

$$\begin{gathered}-\frac{1}{\left(\Psi^{-1}(-F(x))\right)^2}\, e^{-1/(\Psi^{-1}(-F(x)))} \frac{2}{\|x\|} \Psi^{-1}(-F(x)) \cos\frac{\alpha\pi}{2} = \\ = \frac{2\ln(-F(x))}{\|x\|}\, e^{\ln(-F(x))} \cos\frac{\alpha\pi}{2} = \frac{-2F(x)\ln(-F(x))}{\|x\|} \cos\frac{\alpha\pi}{2}.\end{gathered}$$

Таким образом, получаем

Следствие 3. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b) и множество D ограничено. Если для некоторого $\delta > 0$ существуют производные*
$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > \frac{-2F(x)\ln(-F(x))}{\|x\|}\cos\frac{\alpha\pi}{2} \tag{9}$$
для любых $x \in D^\delta$ по любым направлениям $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$, то D — α-достижимая область.

Возможность выбора функции Ψ в засвисимости от функции F в теореме 1 позволяет найти соответствующий способ проверки α-достижимости области в каждом отдельном случае. В следующем иллюстративном примере невозможно применить следствие 2 для проверки α-достижимости множества D, но более сильное следствие 3 применить уже можно.

Пример 2. Для $X \in \mathbb{R}^2$ определим функцию
$$F(X) = \begin{cases} -e^{\Phi(\|X\|^2)}, & \text{если } \|X\| < 1, \\ 0, & \text{если } \|X\| \geq 1, \end{cases}$$
где $\Phi(\xi)$ — гладкая числовая функция на $[0;1)$, такая, что существует $\lim\limits_{\xi\to 1-}\Phi(\xi) = -\infty, \Phi(\xi) < 0$ и в каждой окрестности $(\nu;1), 0 < \nu < 1$, существует интервал возрастания функции Φ, причем для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0;1)$ — такое, что
$$\frac{\Phi'(\|X\|^2)}{-\Phi(\|X\|^2)} < \varepsilon$$
для любого $X : \delta < \|X\| < 1$.

Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^2$ задано условием
$$F(X) < 0 \Longleftrightarrow X \in \mathbb{B}^2(0,1).$$
Тогда множество уровня $S = \{X \in \mathbb{R}^2 : F(X) = 0\} = \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{B}^2(0,1)$. Покажем, что для области D выполняется условие (9) следствия 3.

При фиксированном δ, $0 < \delta < 1$, рассмотрим приграничный слой $D^\delta = \left\{X = (x;y) \in \mathbb{R}^2 : (1-\delta) < \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}$.

Пусть далее $X \in D^\delta$ и $l \in (K_+(X,\alpha) - X)\setminus\{0\}$, $\|l\| = 1$.

Как и в примере 1, обозначим через $\beta \in \left[0; \frac{\alpha\pi}{2}\right]$ угол между векторами l и X. Тогда условие (9) примет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial l}(X) = (\operatorname{grad} F(X), l) = \left(-e^{\Phi(\|X\|^2)} \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot 2X, l\right) >$$

$$> \frac{2e^{\Phi(\|X\|^2)} \cdot \Phi(\|X\|^2)}{\|X\|} \cos\frac{\alpha\pi}{2},$$

то есть

$$\Phi'(\|X\|^2) \cdot (X, l) < \frac{-\Phi(\|X\|^2)}{\|X\|} \cos\frac{\alpha\pi}{2} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \|X\|^2 \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot \cos\beta < -\Phi(\|X\|^2) \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2}. \tag{10}$$

На тех промежутках, где функция Φ не возрастает, очевидно, что неравенство (10) выполнено. На тех же промежутках, где функция Φ возрастает, в силу ее определения следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0; 1)$, такое, что для любого $X \in D^\delta$

$$\|X\|^2 \cdot \Phi'(\|X\|^2) \cdot \cos\beta < \Phi'(\|X\|^2) < -\Phi(\|X\|^2) \cdot \varepsilon = -\Phi(\|X\|^2) \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Следовательно, неравенство (10) выполнено при $\alpha = \frac{2}{\pi}\arccos\varepsilon$. Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \alpha = 1$, то в силу произвольности ε по следствию 3 область D является α-достижимой для любого α, сколь угодно близкого к 1. Заметим, что в обоих примерах критерий α-достижимости для гладкого случая из [2] непременим, так как уравнение $F(X) = 0$ не определяет в $\mathbb{R}^n$ гладкое многообразие размерности $(n - 1)$.

Список литературы

[1] Амозова К. Ф., Старков В. В. *Альфа-достижимые области, негладкий случай* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 3. С. 3–8.

[2] Liczberski P., Starkov V. V. *Domains in $\mathbb{R}^n$ with conical accessible boundary* // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 408, No. 2. P. 547–560.

[3] Liczberski P., Starkov V. V. *Planar α-angularly starlike domains, α-angularly starlike functions and their generalizations to multi-dimensional case* // 60 years of analytic functions in Lublin in memory of our professors and friends Jan G. Krzyz, Zdzislaw Lewandowski and Wojciech Szapiel/ University of Economics and Innovation in Lublin. Lublin: Innovatio Press Scientific publishing house, 2012. P. 117–124.

[4] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М.: Наука, 1975.

[5] Долженко Е. П. *Граничные свойства произвольных функций* // Изв. АН СССР, Сер. Математика. 1967. Т. 31. С. 3–14. DOI: 10.1070/IM1967v001n01ABEH000543.

[6] Adams R. A., Fournier J. *Cone conditions and properties of Sobolev spaces* // J. Math. Anal. Appl. 1977. Vol. 61. P. 713–734. DOI: 10.1016/0022-247X(77)90173-1.

[7] Zaremba S. *Sur le principe de Direchlet* // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 293–316. DOI: 10.1007/BF02393130.

[8] Дудова А. С. *Условия звездности лебегова множества дифференцируемой по направлениям функции* // Математика. Механика : Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 30–33.

[9] Старков В. В. *Условия звездообразности областей в $\mathbb{R}^n$* // Тр. ПетрГУ. Сер. Математика. 2011. Вып. 18. С. 70–82.

Работа поступила 3 июня 2013 г.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33.
E-mail: amokira@rambler.ru