DOI: 10.15393/j3.art.2013.2381 **Issues of Analysis.** Vol. 2(20), No. 2, 2013

УДК 517.54

С. Ю. Граф

ТЕОРЕМЫ РОСТА В КЛАССАХ НОРМИРОВАННЫХ ЛОКАЛЬНО-КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

Аннотация. В классах локально-квазиконформных нормированных автоморфизмов f единичного круга Δ с заданной мажорантой характеристики М. А. Лаврентьева получены асимптотически точные оценки $|f(z)|$, родственные классическому неравенству А. Мори [1].

Ключевые слова: *локально-квазиконформное отображение, модули семейств кривых, теоремы роста.*

2010 Mathematical Subject Classification: *30C45, 30C62, 30C75.*

1. Напомним, что модулем двусвязной области $D \subset \mathbb{C}$ называется число

$$\mathrm{Mod}(D) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)},$$

где $\lambda(\Gamma)$ — экстремальная длина семейства кривых Γ, разделяющих граничные компоненты области D. В частности, модуль концентрического кругового кольца $K(r, R)$ с радиусами r и R, $0 < r < R < \infty$, равен

$$\mathrm{Mod}(K(r, R)) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r}.$$

Среди свойств модулей двусвязных областей (см., например, [2 – 4]) отметим их конформную инвариантность и монотонность, понимаемую в следующем смысле: если двусвязные области D_1 и D_2 таковы, что $D_1 \subset D_2$, то $\mathrm{Mod}(D_1) \leq \mathrm{Mod}(D_2)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

Следующее свойство модулей известно как лемма Гретча [2]: если круговое концентрическое кольцо $K(r,R)=\{z : r<|z|<R\}$ разбивается системой непересекающихся замкнутых жордановых кривых γ_k, $k=\overline{1,n-1}$, разделяющих его граничные компоненты, на множество двусвязных областей D_k, $k=\overline{1,n}$, то

$$\operatorname{Mod}(K(r,R)) \geq \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Mod}(D_k), \tag{1}$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, когда γ_k представляют собой окружности $\{z : |z|=r_k\}$, $r_k\in(r,R), k=\overline{1,n-1}$.

Из классической теоремы Л. Альфорса об искажении экстремальных длин семейств кривых при квазиконформном отображении [2] следует, что модуль $\operatorname{Mod}(f(D))$ образа $f(D)$ двусвязной области D при $\mathbb{K}_f$-квазиконформном отображении f является квазиинвариантным и, в частности, удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{\mathbb{K}_f}\operatorname{Mod}(D) \leq \operatorname{Mod}(f(D)) \leq \mathbb{K}_f \operatorname{Mod}(D). \tag{2}$$

Заметим, что равенства в (2) достигаются в том случае, когда отображение f имеет постоянную по модулю комплексную характеристику $\mu_f=f_{\bar z}/f_z$, например, отображение f с точностью до композиции с конформным совпадает с аффинным преобразованием, имеющим коэффициент квазиконформности $\mathbb{K}_f$. Оценки (2) очевидно неприменимы к отображениям, квазиконформным в среднем или локально-квазиконформным.

В 2009 г. автором данной работы был предложен вариант обобщения неравенства Альфорса (2) на случай локально-квазиконформных отображений круговых колец и двусвязных областей, а также совместно с Р. О. Эйланголи получены некоторые следствия из указанного обобщения [5].

Теорема 1. *Пусть f — локально-квазиконформное отображение кругового кольца $\{z : r<|z|<R\}$, $0<r<R<\infty$, на двусвязную область $D\subset\mathbb{C}$ с первой характеристикой Лаврентьева $p_f(z) = (|f_z(z)|+|f_{\bar z}(z)|)/(|f_z(z)|-|f_{\bar z}(z)|)$. Пусть $P_f(r)=\operatorname*{ess\,sup}_{|z|=r} p_f(z)$. Если существуют интегралы*

$$\int\limits_r^R 1/(P_f(t)\cdot t)\,dt, \quad \int\limits_r^R P_f(t)/t\,dt,$$

то модуль области D удовлетворяет соотношениям

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_r^R \frac{1}{P_f(t)}\frac{dt}{t} \leq \operatorname{Mod}(D) \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_r^R P_f(t)\frac{dt}{t}. \qquad (3)$$

Оценки точны. Равенства достигаются, если $p_f(z) = P_f(r)$ п. в. на окружностях $\{z : |z| = r\}$.

Доказательство. Пусть локально-квазиконформное отображение f кругового кольца $K(r,R)$ удовлетворяет условиям теоремы и интегралы $\int\limits_r^R P_f^{-1}(t)\dfrac{dt}{t}$, $\int\limits_r^R P_f(t)\dfrac{dt}{t}$ определены, причем первый из них для упрощения доказательства без ограничения общности понимается как интеграл Римана.

а) Доказательство верхней оценки в (3) опускается, поскольку данное неравенство может быть получено в качестве следствия из леммы П. П. Белинского [6], адаптированной к случаю локально квазиконформных отображений, либо доказано непосредственно с использованием известного (см., например, [2]) метода экстремальных длин семейств кривых.

б) Для получения нижней оценки представим кольцо $K(r,R)$ в виде объединения колец $K_l = \{z : r_l < |z| < r_{l+1}\}$, $l = \overline{0, n-1}$, где $r = r_0 < r_1 < ... < r_n = R$. Тогда в силу неравенства (1)

$$\operatorname{Mod}(f(K(r,R))) = \operatorname{Mod}\left(\bigcup_{l=0}^{n-1} f(K_l)\right) \geq \sum_{l=0}^{n-1} \operatorname{Mod}(f(K_l)),$$

что с учетом свойства (2) квазиинвариантности модуля приводит к соотношению

$$\operatorname{Mod}(D) \geq \sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{K}_l^{-1} \operatorname{Mod}(K_l) = \sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{K}_l^{-1} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{l+1}}{r_l},$$

где $\mathbb{K}_l = \operatorname*{ess\,sup}_{K_l} p_f(z)$ — коэффициент квазиконформности ограничения отображения f на кольцо K_l.

Определим $\Delta r_l = r_{l+1} - r_l$. Тогда сумма в правой части последней оценки преобразуется к виду

$$\operatorname{Mod}(D) \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{K}_l^{-1} \ln \left(1 + \frac{\Delta r_l}{r_{l+1}} + o(\Delta r_l)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{K}_l^{-1} \frac{\Delta r_l}{r_{l+1}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{K}_l^{-1} \cdot o\,(\Delta r_l)\,.$$

Первая сумма в правой части полученного выражения представляет собой нижнюю интегральную сумму для сходящегося в силу условий теоремы интеграла $\frac{1}{2\pi}\int\limits_r^R P_f^{-1}(t)\frac{dt}{t}$, а вторая является бесконечно малой величиной при $\max \Delta r_l \to 0$. Устремляя мелкость разбиения $\{r_l\}$, $l = \overline{0, n}$, к нулю, приходим к требуемой оценке

$$\operatorname{Mod}(D) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_r^R P_f^{-1}(t)\frac{dt}{t},$$

что и требовалось доказать. □

При $P_f(r) \equiv \mathbb{K}_f < \infty$ неравенства (3) эквивалентны классическим соотношениям (2). Точность неравенств (3) демонстрирует, например, следующий полученный с их помощью результат [5], приводимый здесь без доказательства.

Следствие 1. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, такой, что $f(0) = 0$, отображение f конформно в нуле и $|\mu_f(z)| \leq |z|$, где μ_f — комплексная характеристика отображения f. Тогда*

$$|f'(0)| \leq 4. \tag{4}$$

Равенство достигается на отображении

$$f_0(z) = \frac{4\,z}{(1 + |z|)^2}.$$

В качестве других следствий из теоремы 1 в работе [5] приведены точные оценки конформного радиуса и радиуса круга покрытия в некоторых классах нормированных локально-квазиконформных отображений круга с заданной мажорантой характеристики М. А. Лаврентьева. Также теорема 1 и следствие 1 находят применение в теории локально-квазиконформных гармонических отображений, которой посвящено значительное число работ (см., например, [7, 8]).

2. Применим теорему 1 для получения оценок $|f(z)|$ для локально-квазиконформных нормированных автоморфизмов f единичного круга Δ.

Напомним, что в соответствии с доказанной в 1956 г. теоремой А. Мори [1] всякое $\mathbb{K}_f$-квазиконформное отображение f круга Δ на себя с нормировкой $f(0) = 0$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le 16|z_1 - z_2|^{1/\mathbb{K}_f}, \tag{5}$$

причем константа 16 не может быть уменьшена.

Неравенство (5) очевидно означает, что $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$ при $\alpha = 1/\mathbb{K}_f \le 1$ и тривиально при $\mathbb{K}_f = \infty$, т. е. при потере квазиконформности.

Следует заметить, что впоследствии оценки $|f(z)|$ для $\mathbb{K}_f$-квазиконформных отображений обсуждались во многих работах (см., например, [9]).

Использование теоремы 1 позволяет получить родственные результаты для локально-квазиконформных автоморфизмов единичного круга [10].

Теорема 2. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, причем $f(0) = 0$. Пусть $m_f(r) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ и $P_f(t) = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{|z|=t} p_f(z)$, где $p_f(z)$ — первая характеристика Лаврентьева отображения f.*

Тогда для $r \in [0, 1)$ справедливы оценки

$$\frac{m_f(r) + M_f(r)}{1 + m_f(r)M_f(r)} \le 4\, e^{-\int\limits_r^1 \frac{1}{t}\frac{1}{P_f(t)}dt}, \tag{6.a}$$

$$\frac{m_f(r)M_f(r)}{m_f(r) + M_f(r)} \ge r\,\frac{|f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)|}{4}\, e^{-\int\limits_0^r \frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{P_f(t)}\right)dt} \tag{6.b}$$

при условии существования интегралов справа. Оценка (6.b) справедлива для отображений f, дифференцируемых в нуле.

Доказательство. Пусть локально-квазиконформный автоморфизм f круга Δ удовлетворяет условиям теоремы 2.

а) Для доказательства неравенства (6.a) фиксируем $r \in (0, 1)$ и рассмотрим кольцо $K(r, 1) = \{z : r < |z| < 1\}$. В соответствии с нижней оценкой (3) из теоремы 1 модуль образа $\Omega_r = f(K(r, 1))$ кольца

$K(r,1)$ удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{Mod}\,(\Omega_r) \geq \frac{1}{2\pi} \int\limits_r^1 \frac{1}{P_f(t)} \frac{dt}{t}. \tag{7}$$

С другой стороны, двусвязная область Ω_r очевидно содержит в себе кольцо $K(M_f(r),1)$ и не пересекается с кругом $\{w : |w| \leq m_f(r)\}$, где $m_f(r) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Без ограничения общности можно считать, что $M_f(r) = f(r) > 0$.

Для оценки модуля области Ω_r отобразим ее с помощью функции $F(w) = (1+m_f(r)\,w)/(w+m_f(r))$ на двусвязную область D_R, ограниченная компонента дополнения которой совпадает с замкнутым единичным кругом, а внешняя неограниченная компонента дополнения не содержит точки:

$$R(r) = F(M_f(r)) = \frac{1+m_f(r)\,M_f(r)}{m_f(r)+M_f(r)}.$$

В соответствии с известной задачей Г. Греча (см., например, [2]) о максимуме модулей двусвязных областей, не содержащих круга Δ и континуума, связывающего точки R и ∞,

$$\mathrm{Mod}\,(D_R) \leq \mathrm{Mod}\,(D_R^*)\,, \tag{8}$$

где экстремальная область D_R^* представляет собой внешность единичного круга с разрезом по лучу действительной оси $[R,+\infty)$.

Для модуля экстремальной области D_R^* в задаче Греча принято использовать обозначение

$$\frac{1}{2\pi} \ln\, \Phi(R),$$

где функция $\Phi(R)$ связана с эллиптической функцией Вейерштрасса $\wp$ и удовлетворяет неравенству

$$\Phi(R) \leq 4R.$$

В нашем случае неравенство (8) и приведенная выше оценка функции Φ позволяют заключить, что

$$\mathrm{Mod}\,(D_R) \leq \frac{1}{2\pi} \ln\, \Phi(R(r)) \leq \frac{1}{2\pi} \ln\, 4\frac{1+m_f(r)\,M_f(r)}{m_f(r)+M_f(r)}. \tag{9}$$

Комбинируя неравенство (7) с оценкой (9), приходим к (6.a).

б) Для доказательства неравенства (6.b) используем сходные рассуждения, дополнительно потребовав дифференцируемость отображения f в начале координат. Таким образом, f — локально-квазиконформный автоморфизм Δ, такой, что

$$f(0) = 0,\ |f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)| > 0.$$

В случае расходимости интеграла в правой части неравенства (6.b) доказываемая оценка тривиальна. Поэтому далее предполагаем, что

$$\int\limits_0^r \left(1 - 1/P_f(t)\right)/t\, dt < +\infty.$$

Рассмотрим произвольно малое значение $\varepsilon > 0$ и $r \in (\varepsilon, 1)$. Образом кольца $K(\varepsilon, r) = \{z : \varepsilon < |z| < r\}$ при отображении f является двусвязная область $\Omega_{\varepsilon,r}$, внутренняя граничная компонента которой с точностью до $o(\varepsilon)$ совпадает с эллипсом с центром в нуле и полуосями $\varepsilon\left(|f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)|\right)$, $\varepsilon\left(|f_z(0)| + |f_{\bar z}(0)|\right)$. При этом окружность $\{w : |w| = m_f(r)\}$ лежит в $\Omega_{\varepsilon,r}$, а окружность $\{w : |w| = M_f(r)\}$ — во внешности этой области. Без ограничения общности можно считать, что $m_f(r) = -f(-r)$.

При соответствующем значении $o(\varepsilon) > 0$, таком, что $m_f(\varepsilon) = \varepsilon\left(|f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)|\right) - o(\varepsilon)$, дробно-линейная функция

$$G(w) = \frac{1}{m_f(\varepsilon)} \frac{w + (m_f(\varepsilon))^2/m_f(r)}{1 + w/m_f(r)}$$

отображает область $\Omega_{\varepsilon,r}$ на неограниченную двусвязную область $D_{\varepsilon,R}$, ограниченная компонента дополнения которой содержит замкнутый единичный круг $\{\omega : |\omega| \le 1\}$, а неограниченная компонента дополнения содержит точку

$$R(\varepsilon, r) = G(M_f(r)) = \frac{1}{\varepsilon\left(|f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)|\right)} \left(\frac{m_f(r)\, M_f(r)}{m_f(r) + M_f(r)} + o(1)\right)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Как и в пункте а), в соответствии с конформной инвариантностью и монотонностью модуля, а также со свойствами экстремальной области в задаче Г. Греча и неравенством (8) получаем

$$\operatorname{Mod}(\Omega_{\varepsilon,r}) = \operatorname{Mod}(D_{\varepsilon,R}) \le \operatorname{Mod}(D^*_R) = \frac{1}{2\pi} \ln \Phi(R(\varepsilon, r)) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \ln \frac{4}{\varepsilon\left(|f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)|\right)} + \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{m_f(r)\, M_f(r)}{m_f(r) + M_f(r)} + o(1)\right). \quad (10)$$

Нижняя оценка $\mathrm{Mod}\,(\Omega_{\varepsilon,r})$ производится, как и в пункте a), с помощью теоремы 1:

$$\mathrm{Mod}\,(\Omega_{\varepsilon,r}) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{P_f(t)}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{r}\left(\frac{1}{P_f(t)}-1\right)\frac{dt}{t} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{\varepsilon}. \quad (11)$$

Комбинируя оценки (10), (11) и совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, приходим к требуемому неравенству (6.b). □

Применим доказанную теорему в случае, когда характеристика Лаврентьева мажорируется функцией $P(t) = (1+t)/(1-t)$.

Следствие 2. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, такой, что $f(0) = 0$, отображение f конформно в нуле и $|\mu_f(z)| \leq |z|$, где μ_f — комплексная характеристика отображения f. Тогда*

$$\frac{m_f(r)+M_f(r)}{1+m_f(r)M_f(r)} \leq 16\frac{r}{(1+r)^2},$$

$$\frac{m_f(r)M_f(r)}{m_f(r)+M_f(r)} \geq \frac{|f'(0)|}{4}\frac{r}{(1+r)^2}.$$

Замечание 1. *Следствие 2 позволяет получить оценки роста для автоморфизма f, такого, что $f(0) = 0$ и $|\mu_f(z)| \leq |z|$:*

$$\frac{|f'(0)|}{2}\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq 16\frac{|z|}{(1+|z|)^2}.$$

Заметим также, что в случае постоянства характеристики Лаврентьева $p_f(z) \equiv \mathbb{K}_f$ неравенство (6.b) тривиально, а (6.a) приобретает вид

$$\frac{m_f(r)+M_f(r)}{1+m_f(r)M_f(r)} \leq 4\,r^{1/\mathbb{K}_f},$$

что по порядку роста соответствует оценке, доказанной А. Мори.

Использование приведенных модулей областей позволяет получить еще один вариант теоремы роста для локально квазиконформных отображений.

Теорема 3. *Пусть локально-квазиконформный автоморфизм f единичного круга Δ конформен в начале координат, причем $f(0) = 0$.*

Тогда

$$\frac{|f(z)|}{|f'(0)|(1+|f(z)|)^2} \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \cdot e^{\int\limits_0^1 (1/\tilde{P}_f(t)-1)/t \cdot dt}, \tag{12}$$

где

$$\tilde{P}_f(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{|\zeta|=t} p_{f\circ H}(\zeta),$$

$p_f(z)$ *— первая характеристика М. А. Лаврентьева отображения* f*, а функция* H *определяется равенством*

$$H(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)a - b - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)a-b\right)^2 - 1}, \tag{13}$$

при $a = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\left(|z|+|z|^{-1}\right)\right)$, $b = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\left(|z|+|z|^{-1}\right)\right)$ *и выборе ветви корня, определяемой равенством* $\sqrt{1}=1$.

Доказательство. Пусть отображение f удовлетворяет условиям доказываемой теоремы, и $r=|z|\in(0,1)$, $R=|f(z)|$. Фиксируем малое значение $\varepsilon>0$ и рассмотрим двусвязную область $\Delta_{r,\varepsilon} = \{\zeta : \varepsilon < |\zeta| < 1\} \setminus [r,1)$. Прообразом области $\Delta_{r,\varepsilon}$ при конформном отображении H, определяемом равенством (13), является кольцо $K(\tilde{\varepsilon},1) = \{\zeta : \tilde{\varepsilon} < |\zeta| < 1\}$, где $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\cdot(1+r)^2/(4r)$. Локально-квазиконформное отображение $f\circ H$ преобразует кольцо $K(\tilde{\varepsilon},1)$ в двусвязную область $D_{R,\varepsilon}$ — единичный круг Δ с разрезом по дуге $f([r,1))$ и выброшенным континуумом $f(|\zeta|\leq\varepsilon)$ — образ $\Delta_{r,\varepsilon}$ при отображении f. Тогда в соответствии с теоремой 1 имеет место оценка

$$\operatorname{Mod}(D_{R,\varepsilon}) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\tilde{\varepsilon}}^{1} \frac{1}{\tilde{P}_f(t)}\frac{dt}{t}. \tag{14}$$

В силу конформности отображения f в начале координат внутренняя граничная компонента области $D_{R,\varepsilon}$ с точностью до $o(\varepsilon)$ совпадает с окружностью $\{\zeta : |\zeta| = \varepsilon|f'(0)|\}$.

Произведем круговую симметризацию области $D_{R,\varepsilon}$ относительно отрицательного луча действительной оси. В результате $D_{R,\varepsilon}$ преобразуется в область $D^*_{R^*,\varepsilon}$, с точностью до $o(\varepsilon)$ совпадающую с кольцом $\{\zeta : \varepsilon|f'(0)| < |\zeta| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[R^*,1)$ действительной оси, причем $0 < R^* \le R$. Свойствам различных процедур симметризации многосвязных областей посвящено значительное количество работ (см., например, [3, 4, 11]). В нашем случае существенно, что при симметризации модули двусвязных областей не убывают. В силу этого обстоятельства и свойства монотонности модулей двусвязных областей

$$\mathrm{Mod}(D_{R,\varepsilon}) \le \mathrm{Mod}(D^*_{R^*,\varepsilon}) \le \mathrm{Mod}(\Delta_{R,\varepsilon}),$$

где $\Delta_{R,\varepsilon} = \{\zeta : \varepsilon|f'(0)| < |\zeta| < 1\} \setminus [R,1)$. Комбинируя последнюю оценку с неравенством (14), получаем

$$\mathrm{Mod}(\Delta_{R,\varepsilon}) \ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\tilde{P}_f(t)}\frac{dt}{t}.$$

Добавляя к обоим частям данного неравенства $\dfrac{1}{2\pi}\ln(\varepsilon|f'(0)|)$, производя тождественные преобразования правой части и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к следующей оценке:

$$\mathrm{Mod}(\Delta_R, 0) \ge \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{4|f'(0)|r}{(1+r)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\tilde{\varepsilon}}^{1}\left(\frac{1}{\tilde{P}_f(t)} - 1\right)\frac{dt}{t}\right), \qquad (15)$$

где $\mathrm{Mod}(\Delta_R, 0)$ — приведенный модуль односвязной области $\Delta_R = \Delta \setminus [R,1)$ относительно начала координат, а предел в правой части (15) равен несобственному интегралу $\int\limits_0^1 (1/\tilde{P}_f(t) - 1)/t \cdot dt$, причем $\tilde{P}_f(0) = 1$.

С другой стороны, как известно (см., например, [3]),

$$\mathrm{Mod}(\Delta_R, 0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{4R}{(1+R)^2}.$$

Таким образом, потенциируя неравенство (15) и учитывая равенства $r = |z|$, $R = |f(z)|$, приходим к доказываемой оценке (12).

Заметим, что неравенство (12) точно в случае, когда имеет место равенство в нижней оценке теоремы 1 и функция f отображает область $\Delta \setminus [r,1)$ на область Δ_R. $\square$

Применим теорему 3 в случае, когда характеристика М. А. Лаврентьева отображения f мажорируется функцией $P(t) = (1+t)/(1-t)$.

Следствие 3. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, такой, что отображение f конформно в нуле, $f(0) = 0$ и $|\mu_f(z)| \le |z|$, где μ_f — комплексная характеристика отображения f. Тогда справедливо точное при $|z| \to 0$, $|z| \to 1$ неравенство*

$$\frac{|f(z)|}{|f'(0)|(1+|f(z)|)^2} \ge \frac{|z|}{(1+\sqrt{|z|})^4}. \tag{16}$$

Доказательство. Для доказательства сформулированного утверждения применим к отображению f теорему 3. Заметим, что в соответствии с приципом Линделефа [12] максимум модуля отображения H на окружности $\{\zeta : |\zeta| = t\}$, определяемого формулой (13), достигается в точке $-t$ и равен $-H(-t)$. Следовательно, с учетом условия $|\mu_f(z)| \le |z|$, мажоранта характеристики Лаврентьева композиции $f \circ H$ имеет вид

$$\tilde{P}_f(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{|\zeta|=t} p_{f\circ H}(\zeta) = \frac{1-H(-t)}{1+H(-t)}.$$

Таким образом, интеграл в правой части неравенства (12)

$$\int\limits_0^1 \frac{1-\tilde{P}_f(t)}{\tilde{P}_f(t)}\frac{dt}{t} = 2\int\limits_0^1 \frac{-H(-t)}{1-H(-t)}\frac{dt}{t}.$$

После замены $s = -H(-t)$ последний интеграл преобразуется к виду

$$\int\limits_0^1 \frac{s-1}{s}\frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(s+s^{-1}\right)-b\right)^2-a^2}},$$

где $a = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\left(|z|+|z|^{-1}\right)\right)$, $b = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\left(|z|+|z|^{-1}\right)\right)$.

В итоге

$$\int\limits_0^1 \frac{1-\tilde{P}_f(t)}{\tilde{P}_f(t)}\frac{dt}{t} = -2\int\limits_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s^2+s\left(r+r^{-1}\right)+1}} = \ln\frac{(1+r)^2}{(1+\sqrt{r})^4}.$$

Подстановка последнего выражения в неравенство (12) приводит к требуемой оценке (16).

Точность неравенства (16) при $|z|\to 0$ очевидна. В силу (4) имеет место точная оценка $|f'(0)|\le 4$. Для отображений f, удовлетворяющих равенству $|f'(0)|=4$, неравенство (12) является точным также и при $|z|\to 1$. $\square$

3. Использование метода симметризации и свойств эллиптических функций Якоби позволяет получить асимптотически точные при $|z|\to 0$ и при $|z|\to 1$ теоремы роста для локально квазиконформных автоморфизмов круга с заданной мажорантой характеристики М. А. Лаврентьева, из которых следуют точные оценки $|f(z)|$ в случае квазиконформности f.

Теорема 4. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, причем $f(0)=0$ и $p_f(z)$ — первая характеристика М. А. Лаврентьева отображения f. Тогда для любых z_1, $z_2\in\Delta$ справедлива оценка*

$$\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(A)}{\mathbf{K}(A)}\ge\int\limits_{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(a)}{\mathbf{K}(a)}}^{0}\frac{dt}{\tilde{P}_f(t)}\tag{17}$$

при условии существования интеграла справа.

Здесь $\mathbf{K}(x)$, $\mathbf{K}'(x)$ — полные эллиптические интегралы Якоби,

$$A=\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{1-\overline{f(z_1)}\,f(z_2)}\right|,\ a=\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar z_1\,z_2}\right|,\tag{18}$$

функция $\tilde{P}_f(t)$ определяется равенством

$$\tilde{P}_f(t)=\operatorname*{ess\,sup}_{\ln|\zeta|=t}p_{f\circ\Phi_2\circ\Phi_1}(\zeta),$$

где

$$\Phi_2(\omega)=\frac{\omega+z_1}{1+\bar z_1\,\omega},\tag{19}$$

функция Φ_1 удовлетворяет условию симметрии $\overline{\Phi_1(\zeta)}=\Phi_1(\bar\zeta)$ в коль-

це $\left\{\zeta:\ e^{-\pi \boldsymbol{K}'(a)/2\boldsymbol{K}(a)} < |\zeta| < 1\right\}$ *и определяется равенством*

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1 + k\cdot \operatorname{sn}\left(\mathbf{K}'(k)\dfrac{\ln\zeta}{\pi}, k\right)}{1 - k\cdot \operatorname{sn}\left(\mathbf{K}'(k)\dfrac{\ln\zeta}{\pi}, k\right)} \quad \textit{при} \quad \operatorname{Im}\zeta > 0, \tag{20}$$

а модуль эллиптического синуса

$$k = \frac{1-a}{1+a} \in (0,1).$$

Неравенство (17) является асимптотически точным при $a \to 0$, $a \to 1$ *и точным, например, при* $p_{f\circ\Phi_2\circ\Phi_1}(\zeta) \equiv \tilde{P}_f(t)$ *на окружностях* $\{\zeta : |\zeta| = t\}$, $t \in (0,1)$.

Доказательство. Пусть локально-квазиконформное отображение f удовлетворяет условиям доказываемой теоремы. Будем считать, что интеграл в правой части неравенства (17) существует, что имеет место в случае измеримости функции $\tilde{P}_f(t)$.

Рассмотрим произвольные точки $z_1, z_2 \in \Delta$. Их прообразами при конформном автоморфизме Φ_2 единичного круга, определяемом равенством (19), с точностью до поворота вокруг начала координат являются соответственно точки 0 и a, где параметр a удовлетворяет второму из соотношений (18).

Рассмотрим двусвязную область $D_a = \Delta \setminus [0,a]$ — единичный круг с разрезом по отрезку $[0,a]$ действительной оси. Образом области D_a при отображении Φ_2 с точностью до вращения является область Δ_a — круг Δ с разрезом по дуге окружности, ортогональной $\partial\Delta$ и соединяющей точки z_1, z_2.

При локально-квазиконформном отображении f область Δ_a преобразуется в двусвязную область Δ_A — круг Δ с разрезом по некоторой дуге, соединяющей точки $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Дробно-линейная функция $\Phi_3(w) = e^{i\theta}(w - f(z_1))/(1 - \overline{f(z_1)}\,w)$ при некотором $\theta \in \mathbb{R}$ переводит Δ_A в круг с разрезом по дуге, соединяющей точки $\Phi_3(f(z_1)) = 0$ и $\Phi_3(f(z_2)) = A$, где A определяется первым из соотношений (18).

Произведем круговую симметризацию области $\Phi_3(\Delta_A)$ относительно отрицательного луча действительной оси. В результате $\Phi_3(\Delta_A)$ преобразуется в единичный круг с разрезом по отрезку $[0, A^*]$ действительной оси, причем $A \le A^* < 1$.

В силу того, что модули двусвязных областей при симметризации не убывают, а также в силу конформной инвариантности и монотонности модулей имеет место неравенство

$$\mathrm{Mod}\,(\Delta_A) \le \mathrm{Mod}\,(D_A)\,,$$

где D_A — круг Δ с разрезом по отрезку $[0, A]$. Отсюда в силу известных (см., например, [2, 3]) формул для модулей единичного круга с разрезом получаем следующую верхнюю оценку модуля:

$$\mathrm{Mod}\,(\Delta_A) \le \frac{1}{2\pi} \ln \Phi\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{4} \frac{\mathbf{K}'(A)}{\mathbf{K}(A)}, \tag{21}$$

где $\dfrac{1}{2\pi} \ln \Phi\,(R)$ — модуль экстремальной области в задаче Гретча [2].

Для получения нижней оценки рассмотрим определяемую равенством (20) функцию $\Phi_1(\zeta)$. Пусть

$$r(a) = e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(a)}{\mathbf{K}(a)}} \quad и \quad k = \frac{1-a}{1+a}.$$

Тогда функция Φ_1 осуществляет конформное отображение верхнего полукольца $K^+(r(a), 1) = \{\zeta : r(a) < |\zeta| < 1, \, \mathrm{Im}\,\zeta > 0\}$ на верхний полукруг $\{z : |z| < 1, \, \mathrm{Im}\,z > 0\}$, причем внутренняя полуокружность области $K^+(r(a), 1)$ при данном отображении переходит в отрезок $[0, a]$ действительной оси. Продолженная в соответствии с принципом симметрии Римана – Шварца в нижнее полукольцо $K^-(r(a), 1)$ функция Φ_1 реализует конформное отображение кругового кольца $K(r(a), 1)$ на двусвязную область D_a. Модули областей $K(r(a), 1)$, D_a и Δ_a очевидно равны в силу конформной инвариантности.

Определим локально-квазиконформное отображение $\tilde{f} = f \circ \Phi_2 \circ \Phi_1$ кругового кольца $K(r(a), 1)$ на определенную выше двусвязную область Δ_A. Мажоранта характеристики М. А. Лаврентьева отображения $\tilde{f}$ равна $\operatorname*{ess\,sup}_{|\zeta|=t} p_{f\circ\Phi_2\circ\Phi_1}(\zeta)$. Тогда в соответствии с неравенством (3) теоремы 1 имеет место следующая нижняя оценка модуля двусвязной области Δ_A:

$$\mathrm{Mod}\,(\Delta_A) \ge \frac{1}{2\pi} \int\limits_{r(a)}^{1} \frac{1}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{|\zeta|=t} p_{f\circ\Phi_2\circ\Phi_1}(\zeta)} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(a)}{\mathbf{K}(a)}}^{0} \frac{dt}{\tilde{P}_f(t)},$$

где a определяется вторым из равенств (18).

Комбинируя последнее неравенство с соотношением (21), приходим к доказываемой оценке (17).

Неравенство (17) является точным при выполнении следующих условий:

1) характеристика М. А. Лаврентьева $p_{f\circ\Phi_2\circ\Phi_1}(\zeta)=const$ на любой окружности $\{\zeta : |\zeta| = t\}$, что соответствует условиям равенства в теореме 1 и очевидно верно при $p_f(z)\equiv\mathbb{K}_f<\infty$;

2) образ Δ_A области Δ_a при отображении f представляет собой единичный круг с разрезом по дуге окружности, соединяющей точки $f(z_1)$, $f(z_2)$ и ортогональной $\partial\Delta$.

Асимптотическая точность неравенства (17) при $a\to 1$ следует из того, что в этом случае $A\to 1$, и в силу известных свойств полных эллиптических интегралов [3]

$$\mathbf{K}(x)=\mathbf{K}'(\sqrt{1-x^2})\to\infty,\ \mathbf{K}'(x)=\mathbf{K}(\sqrt{1-x^2})\to\frac{\pi}{2}\ \text{ при }\ x\to 1,$$

обе части неравенства (17) стремятся к 0.

Аналогично при $a\to 0$ величина A также стремится к нулю, и обе части (17) стремятся к ∞ в силу приведенных выше предельных соотношений для полных эллиптических интегралов $\mathbf{K}(x)$, $\mathbf{K}'(x)$ при $x\to 0$. $\square$

Замечание 2. *Если отображение f квазиконформно, то $p_f(z)\le\mathbb{K}_f$ и из неравенства (17) следует оценка*

$$\frac{\mathbf{K}'(a)}{\mathbf{K}(a)}\le\mathbb{K}_f\,\frac{\mathbf{K}'(A)}{\mathbf{K}(A)}, \tag{22}$$

где параметры a, A определяются соотношениями (18). Последнее неравенство приводит к известной [9] точной оценке $|f(z)|$ для $\mathbb{K}_f$-квазиконформных отображений.

В силу асимптотических формул для полных эллиптических интегралов [3]

$$e^{-\pi\mathbf{K}'(k)/\mathbf{K}(k)}=\frac{k^2}{16}+o(k^2).$$

Таким образом, при $z_2-z_1\to 0$, $|z_1|,|z_2|\not\to 1$ из (22) получаем точную локальную оценку

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{1-\overline{f(z_1)}\,f(z_2)}\right|\le 4^{1-1/\mathbb{K}_f}\left|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}\,z_2}\right|^{1/\mathbb{K}_f}+o(|z_2-z_1|^{1/\mathbb{K}_f}),\ |z_2-z_1|\to 0,$$

по порядку роста совпадающую с неравенством А. Мори (5).

В случае, когда характеристика Лаврентьева функции f мажорируется функцией $P(t)=(1+t)/(1-t)$, $t\in[0,1)$, теорема 4 позволяет получить асимптотически точные оценки $|f(z)|$.

Следствие 4. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, такой, что отображение f конформно в нуле, $f(0)=0$ и $|\mu_f(z)|\le|z|$, где μ_f — комплексная характеристика отображения f. Тогда*

$$\mathbf{K}(|z|)\frac{\mathbf{K}'(|f(z)|)}{\mathbf{K}(|f(z)|)}\le\frac{\ln 1/|z|}{1+|z|}. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть отображение f удовлетворяет условиям доказываемого следствия. Применим к f теорему 4, полагая $z_1=0$, $z_2=z$. Тогда $a=|z|$, $A=|f(z)|$ и Φ_2 представляет собой тождественное отображение. При значении модуля эллиптического синуса $k=(1-|z|)/(1+|z|)$ и $r=e^{-\frac{\pi}{2}\mathbf{K}'(|z|)/\mathbf{K}(|z|)}$ функция Φ_1 реализует конформное отображение кругового кольца $K(r,1)$ на круг Δ с разрезом по отрезку $[0,|z|]$. При этом в соответствии с принципом Линделефа [12] максимум $|\Phi_1(\zeta)|$ на окружности $|\zeta|=t$, $t\in(0,1)$ достигается в точке $\zeta=t$, причем $\Phi_1(t)\in(|z|,1)$. Отсюда с учетом условия $|\mu_f(w)|\le|w|$ приходим к равенству

$$\tilde{P}_f(t)=\operatorname*{ess\,sup}_{\ln|\zeta|=t}p_{f\circ\Phi_1}(\zeta)=\Phi_1(e^t).$$

Таким образом, правая часть неравенства (17) принимает вид

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(|z|)}{\mathbf{K}(|z|)}}^{0}\frac{dt}{\tilde{P}_f(t)}=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(|z|)}{\mathbf{K}(|z|)}}^{0}\frac{1-\Phi_1(e^t)}{1+\Phi_1(e^t)}dt=$$

$$=-k\int\limits_{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(|z|)}{\mathbf{K}(|z|)}}^{0}\operatorname{sn}\left(\mathbf{K}'(k)\frac{t}{\pi},k\right)dt=\frac{\pi}{2}\frac{\ln 1/|z|}{\mathbf{K}'(k)}.$$

Отсюда, с учетом свойств полных эллиптических интегралов Якоби [3] и равенств

$$\mathbf{K}'(k) = \mathbf{K}'\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right) = \mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{|z|}}{1+|z|}\right) = (1+|z|)\mathbf{K}(|z|),$$

приходим к требуемой оценке (23). □

Замечание 3. *Если f удовлетворяет условиям следствия 4, то при $|z| \to 0$ из (23), с учетом известных [3] неравенств*

$$\frac{\mathbf{K}'(x)}{\mathbf{K}(x)} \leq \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{x},\ \mathbf{K}(x) \leq \frac{\pi}{2} - \ln\sqrt{1-x^2}, \tag{24}$$

следует точная до величин порядка $o(|z|)$ локальная оценка роста функции f в окрестности начала координат:

$$|f(z)| \leq 4|z|^{-((1+|z|)(1-1/\pi\ln(1-|z|^2)))^{-1}} =$$

$$= 4|z| - 4|z|^2\ln|z| + o(|z|^2\ln|z|).$$

Функция $f_0(z) = \dfrac{4\,z}{(1+|z|)^2} = 4z - 8z^2 + \ldots$ *удовлетворяет условиям следствия 4 и демонстрирует точность последней оценки.*

Аналогично, при $r \to 1$ из неравенств (23), (24) следует оценка

$$|f(z)| \leq \left(1 - 16e^{(1+|z|)(\pi-\ln(1-|z|^2))(\pi/2-\ln|f(z)|)/\ln|z|}\right)^{1/2},$$

где множитель $\pi/2 - \ln|f(z)|$ в показателе близок к $\pi/2$.

Библиографический список

[1] Mori A. *On an absolute constant in the theory of quasi-conformal mappings* // J. Math. Soc. Japan. 1956. No. 8, P. 156–166.

[2] Альфорс Л. *Лекции по квазиконформным отображениям.* М., 1969.

[3] Vasil'ev A. *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings.* Berlin; N. Y., 2002.

[4] Дженкинс Дж. *Однолистные функции и конформные отображения.* М., 1962.

[5] Граф С. Ю., Эйланголи О. Р. *Об искажении модулей двусвязных областей при локально-квазиконформных отображениях* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2009. С. 34–43.

[6] Белинский П. П. *Общие свойства квазиконформных отображений.* Новосибирск, 1974.

[7] Старков В. В. *Гармонические локально-квазиконформные отображения* // Тр. ПетрГУ. Сер. Математика. 1993. Вып. 1. С. 61–69.

[8] Граф С. Ю., Эйланголи О. Р. *Дифференциальные неравенства в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений* // Известия ВУЗов. Математика. Казань, 2010. N. 10. С. 69–72.

[9] Anderson G. D., Vamanamurthy M. K., Vuorinen M. *Conformal invariants, inequalities an quasiconformal maps.* New York, 1997.

[10] Граф С. Ю. *Аналог теоремы Мори для локально-квазиконформных автоморфизмов единичного круга* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2013. С. 34–47.

[11] Дубинин В. Н. *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. Вып. 1(295). С. 3–76.

[12] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* М., 1973.

Работа поступила 9 сентября 2013 г.

Тверской государственный университет,
г. Тверь, ул. Желябова, 33.

Петрозаводский государственный университет,
г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.
E-mail: Sergey.Graf@tversu.ru