DOI: 10.15393/j3.art.2013.2382 **Issues of Analysis.** Vol. 2(20), No. 2, 2013

УДК 517

Б. Ф. Иванов

# ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВА БОРА

**Аннотация.** Пусть $p \in (1,2]$, $n \geq 1$, $S \subseteq R^n$ и $\Gamma(S,p)$ — множество всех тех функций, $\gamma(t) \in L^p(R^n)$, носитель преобразования Фурье которых лежит в $S$. В работе получены условия выполнения неравенства

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} \leq C \left\| \gamma(\tau) \right\|_{L^p(R^n)},$$

где $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$, $E_t = \{\tau \,|\, \tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in R^n,$ $\tau_j \in [0, t_j]$, если $t_j \geq 0$ и $\tau_j \in (t_j, 0]$, если $t_j < 0$, $1 \leq j \leq$ $\leq n\}$, $\gamma(\tau) \in \Gamma(S,p)$ и константа $C$ не зависит от $\gamma(\tau)$. Также рассмотрены некоторые условия выполнения неравенства на нетривиальных подмножествах $\Gamma(S,p)$ в случаях, когда оно не выполняется на всем $\Gamma(S,p)$.

**Ключевые слова:** *неравенство Бора.*

**2010 Mathematical Subject Classification:** *26D99.*

## Введение

Пусть $\Lambda > 0$ и $P(\Lambda)$ — множество всевозможных конечных тригонометрических сумм вида:

$$p(t) = \sum_{m=1}^{n} p_m e^{i\lambda_m t},$$

показатели Фурье которых удовлетворяют условию

$$\min_{1 \leq m \leq N} |\lambda_m| \geq \Lambda.$$

В апрельском номере журнала [1] за 1935 г. Х. Бор анонсировал, а позднее в том же году опубликовал в [2] для таких сумм $p(t)$ доказательство неравенства, названного впоследствии ([4] и др.) неравенством Бора:

$$|p(t)| \le \frac{\pi}{2\Lambda} \|dp(t)/dt\|_{L^\infty(R^1)}, \quad p(t) \in P(\Lambda).$$

Далее Ж. Фавар [3] обобщил это неравенство на случай $f(t)$ — непрерывных, периодических, а позже — в [4] — равномерных почти периодических функций (т. е. почти периодических функций Бора). В 1937 г. Б. М. Левитан [5] усилил результат Фавара, распространив неравенство на более широкий класс функций, производные которых ограничены, измеримы и удовлетворяют некоторому дополнительному ограничению. В 1954 г. Л. Хермандер [6] обобщил результат Левитана. Согласно [6], вместо дополнительного ограничения Левитана достаточно потребовать, чтобы носитель преобразования Фурье функции $f(t)$ не содержал интервал $(-\Lambda, \Lambda)$.

Впоследствии обобщение неравенства Бора продолжалось разными авторами: [7–10]; фактически один из вариантов обобщения неравенства Бора содержится в работе [11]; свое доказательство для почти периодического случая, но без точной оценки константы дано в [12].

В настоящей статье, в отличие от работ перечисленных выше авторов, неравенство Бора в форме оценки интеграла от функции через норму самой этой функции распространено на некоторые классы функций из $L^p(R^n)$, $n \ge 1$, $p \in (1, 2]$, и при этом точки носителя преобразования Фурье функций из этих классов могут иметь нулевые координаты. Такого рода неравенство, но только для функций, носители преобразования Фурье которых отделены от нуля, существенным образом использовалось автором при $n = 1$ для построения частотного критерия ограниченности и гладкости в смысле Фреше по параметрам решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений [13, 14].

Пусть $p > 1$, $n \ge 1$, $S \subseteq R^n$ и $\Gamma(S, p)$ — множество всех тех функций $\gamma(t) \in L^p(R^n)$, носитель преобразования Фурье которых лежит в $S$. Для каждого $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$ обозначим

$$E_t = \{\tau \mid \tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \in R^n,\ \tau_j \in [0, t_j], \text{ если } t_j \ge 0, \text{ и } \tau_j \in (t_j, 0], \\ \text{если } t_j < 0,\ 1 \le j \le n\}.$$

В настоящей работе устанавливаются условия выполнения неравенства

$$\left\| \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} \leq C \, \|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^n)}, \tag{0.1}$$

где $\gamma(t)$ принадлежит $\Gamma(S,p)$ или, если (0.1) не выполняется на всем $\Gamma(S,p)$, то — специально построенному нетривиальному подмножеству множества $\Gamma(S,p)$, а константа $C$ не зависит от выбора $\gamma(\tau)$ из $\Gamma(S,p)$ или, соответственно, его подмножества.

Если $p \in (1,2]$, то, согласно основному утверждению настоящей работы, содержащемуся в теореме 2.1, для выполнения неравенства (0.1) достаточно при некоторых дополнительных предположениях относительно $S$, чтобы функция

$$K(S,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{R^n} e^{i(y,t)} \left[ \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{iy_m} \right] \cdot \xi_S(y) dy$$

удовлетворяла условию

$$K(S,t) \in L^q(R^n), \tag{0.2}$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $\xi_S(y)$ — характеристическая функция множества $S$. Если же $p = 2$, то (теорема 2.2) при тех же предположениях относительно $S$ условие (0.2) является необходимым и достаточным для выполнения (0.1). В случае, когда (0.2) не выполняется, в пространстве $\Gamma(S,p)$ можно (теоремы 3.0–3.2) выделить нетривиальные подмножества, на которых (0.1) выполняется с константой $C$, не зависящей от функции $\gamma(\tau)$, выбранной из соответствующего подмножества. Отметим, что если $p = 1$, то неравенство (0.1), очевидно, выполняется при любом $S \subseteq R^n$.

Работа состоит из введения и трех параграфов. Первый носит вспомогательный характер. Он начинается с выбора формы записи преобразования Фурье и сводки (с учетом введенных обозначений) ряда известных теорем и формул. Далее доказываются леммы 1.0–1.2, характеризующие строение множества $S \subseteq R^n$, удовлетворяющего некоторому (определение 1.1) условию $(N)$.

Во втором параграфе доказывается (теорема 2.0), что если $p \in \in (1, 2]$, то условие

$$\sup_{t \in R^n} \|K(S, t, \tau)\|_{L^q(R^n)} < +\infty, \tag{0.3}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$K(S, t, \tau) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} e^{i(y,\tau)} \left[\prod_{m=1}^{n} \frac{1 - e^{-iy_m t_m}}{iy_m}\right] \xi_S(y) dy,$$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, является достаточным для выполнения (0.1) при любом $\gamma(\tau) \in \Gamma(S, p)$; если же $p = 2$, то — необходимым и достаточным. Далее доказывается упоминавшаяся выше теорема 2.1 и устанавливается (следствие 2.1.1), что при $n = 1$ и выполнении (0.2) существуют всевозможные несобственные интегралы от функций $\gamma(\tau) \in \Gamma(S, p)$. Согласно теореме 2.2, условие (0.2) при $p = 2$ является необходимым и достаточным для выполнения (0.1) при $\gamma(\tau) \in \Gamma(S, p)$. Если $p = 2$ и $n = 1$, то, по следствию 2.2.1, множество $\Gamma(S, 2)$, на котором выполняется (0.2), целиком состоит из функций, для которых существуют всевозможные несобственные интегралы. Завершает второй параграф теорема 2.3, в которой утверждается, что, если $S \subset R^n$ отделено от каждой из $n$ координатных гиперплоскостей на расстояние $\varepsilon_m > 0$, $1 \leq m \leq n$ соответственно, то

$$\left\|\int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau\right\|_{L^\infty(R^n)} \leq \frac{C_{22}}{\left(\prod\limits_{m=1}^{n} \varepsilon_m\right)^{1/q}} \|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^n)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

где $C_{22} > 0$ не зависит от $\gamma(\tau) \in \Gamma(S, p)$. Это неравенство, представляющее собой при $n = 1$ прямое обобщение неравенства Бора (замечание 2.2), использовалось автором в работах [13, 14].

Пусть $S \subseteq R^n$ произвольное множество, $\overline{S} \cap F \neq \varnothing$, где $F$ — объединение координатных гиперплоскостей, и не выполняются достаточные условия, сформулированные в теоремах 2.0–2.1, тогда неравенство (0.1) может не выполняться, например из-за наличия в $\Gamma(S, p)$ функций с неограниченными интегралами. В теоремах 3.0–3.2 из третьего параграфа рассмотрен вопрос о выполнении неравенства (0.1) на некоторых нетривиальных подмножествах $\Gamma(S, p)$, таких, что неравенство сохраняется и при некоторых малых возмущениях функции $\gamma(\tau)$.

Помимо перечисленных утверждений, работа содержит и некоторые другие результаты, а также примеры. Утверждения, полученные в настоящей работе, позволяют усилить результаты по ограниченности и гладкости по параметрам в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также расширить область применения построенного автором частотного критерия.

## §1. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть $n \geq 1$ и $u(t) \in L^1(R^n)$. Как и в [15, с. 77] будем обозначать преобразование Фурье функции $u(t) \in L^1(R^n)$ через $\hat{u}(y)$, где $y \in R^n$, но, следуя [16, с. 425], выберем $\hat{u}(y)$ в виде

$$\hat{u}(y) = \int\limits_{R^n} e^{-i(y,t)} u(t) dt.$$

Обратное преобразование Фурье функции $v(y) \in L^1(R^n)$, опять-таки следуя [15, с. 77], будем обозначать через $\tilde{v}(t)$, $t \in R^n$, где $\tilde{v}(t)$, согласно [16, с. 427], имеет вид

$$\tilde{v}(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} e^{i(y,t)} v(y) dy.$$

Пусть $n \geq 1$ и $p \in (0, 2]$, тогда [17, с. 128], если $\gamma(t) \in L^p(R^n)$, то существует $\hat{\gamma}(y) \in L^q(R^n)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Будем обозначать через $H_p$ константу из неравенства Хаусдорфа–Юнга

$$\|\hat{\gamma}(y)\|_{L^q(R^n)} \leq H_p \|\gamma(t)\|_{L^p(R^n)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если $n \geq 1$, $p \in (1, 2]$, $\alpha(\tau) \in L^p(R^n)$, $\beta(y) \in L^p(R^n)$ и $\gamma(\tau) \in L^2(R^n)$, то в силу введенных обозначений

$$\{\hat{\alpha}(y)\beta(y)\}\tilde{}\,(\tau) = \alpha(\tau) * \tilde{\beta}(\tau) \tag{1.1}$$

и
$$\int\limits_{R^n} \overline{\hat{\alpha}(y)}\beta(y)dy = (2\pi)^n \int\limits_{R^n} \overline{\alpha(\tau)}\,\tilde{\beta}(\tau)d\tau,$$
$$\|\gamma(\tau)\|_{L^2(R^n)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \|\hat{\gamma}(y)\|_{L^2(R^n)}.$$

Построим две вспомогательные функции. Выберем произвольное $\delta > 0$ и обозначим через $\omega(\delta, t)$ такую функцию, преобразование Фурье которой имеет вид:

$$\hat{\omega}(\delta, y) = \frac{1}{\delta^2}\,\xi_{[-\delta/2,\delta/2]}(y) * \xi_{[-\delta/2,\delta/2]}(y), \tag{1.2}$$

где $\xi_M(y)$ — характеристическая функция множества $M \subseteq R^1$. Тогда, согласно (1.2):
$$\int\limits_{R^1} \hat{\omega}(\delta, y)dy = 1,$$
$$\hat{\omega}(\delta, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta^2}(\delta - |y|), & \text{при } |y| \le \delta, \\ \quad 0, & \text{при } |y| > \delta. \end{cases} \tag{1.3}$$

Пусть $a, b \in R^1$, $a < b$ и число $\delta > 0$ столь мало, что $a + \delta < b - \delta$. Обозначим через $\Omega([a, b], \delta, t)$ такую функцию, преобразование Фурье которой имеет вид:

$$\widehat{\Omega}([a, b], \delta, y) = \xi_{[a,b]}(y) * \hat{\omega}(\delta, y). \tag{1.4}$$

Тогда
$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \widehat{\Omega}([a, b], \delta, y) \le 1 \\ \widehat{\Omega}([a, b], \delta, y) = 0, \quad y \notin (a - \delta,\, b + \delta) \\ \widehat{\Omega}([a, b], \delta, y) = 1, \quad y \in [a + \delta,\, b - \delta] \\ \Omega([a, b], \delta, t) \in L^p(R^1), \quad \text{при любом } p \ge 1 \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

Теперь рассмотрим некоторые утверждения о множестве $S \subseteq R^n$ при $n \ge 1$, параметре $p > 1$ и множестве $\Gamma(S, p)$, являющимся нормированным подпространством пространства $L^p(R^n)$.

**Определение 1.1.** *Будем говорить, что множество $S \subseteq R^n$, $n \ge 1$, $S \ne \varnothing$ удовлетворяет условию $(N)$, если для каждой точки $y_0 \in S$ можно указать такую функцию $\gamma_0(\tau) \in \Gamma(S, p)$, что $y_0 \in supp\ \hat{\gamma}_0(y)$.*

Таким образом, если $S$ удовлетворяет условию $(N)$, то $\Gamma(S,p) \neq \varnothing$. Ясно, что функция $\gamma_0(t)$ из определения (1.1) не может равняться нулю для почти всех $t \in R^n$, так как в противном случае $\hat{\gamma}_0(y) = 0$ для $y \in R^n$. Но тогда $supp\ \hat{\gamma}_0(y) = \varnothing$, и условие $y_0 \in supp\ \hat{\gamma}_0(y)$ не выполняется.

**Пример 1.1.** Если $S \subseteq R^n$ открыто, $S \neq \varnothing$, то оно удовлетворяет условию $(N)$.

Действительно, для любой точки $y_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) \in S$ в качестве $\gamma_0(t)$ можно взять функцию

$$\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} \Omega([y_{0k} - 2\delta,\ y_{ok} + 2\delta], \delta, t_k),$$

поскольку $\varphi(t) \in L^p(R^n)$ при любом $p \geq 1$ и при $\delta > 0$ достаточно малом $y_0 \in supp\ \hat{\gamma}_0(y) \subset S$.

**Лемма 1.0.** *Пусть $p \geq 1$, $n \geq 1$, $S \subseteq R^n$ — произвольное множество, удовлетворяющее условию $(N)$, и для любой функции $\gamma(\tau) \in \Gamma(S,p)$ выполняется (0.1). Тогда $S \neq R^n$.*

**Доказательство.** Пусть $p > 1$, $n \geq 1$ и, вопреки утверждению леммы, $S = R^n$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\gamma(\tau) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 \tau_k}{\tau_k} \in L^p(R^n) = \Gamma(R^n, p),$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$, $supp\ \hat{\gamma}_0(y) = \{y \,|\, y = (y_1, y_2, \dots, y_n),\ |y_k| \leq 2,\ 1 \leq k \leq n\} \subset R^n$. Так как $\|\gamma(t)\|_{L^p(R^n)} < +\infty$ и

$$\left| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right| = \prod_{k=1}^{n} \left| \int\limits_{0}^{t_k} \frac{\sin^2 \tau_k}{\tau_k}\, d\tau_k \right| \to \infty,$$

при $\min\limits_{1 \leq k \leq n} |t_k| \to +\infty$, то невозможно указать константу $C$, обеспечивающую выполнение неравенства (0.1). $\square$

Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $a_k < b_k$, $1 \leq k \leq n$ и $\Pi[a,b] = \{y \,|\, y = (y_1, y_2, \dots, y_n),\ a_k \leq y_k \leq b_k,\ 1 \leq k \leq n\}$.

Выберем произвольный вектор $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k)$ с положительными, но столь малыми координатами, что $a_k + \delta_k < b_k - \delta_k$, $1 \le k \le n$, и обозначим

$$\Omega\,(\Pi[a,b],\delta,t) = \prod_{k=1}^{n} \Omega([a_k,b_k],\delta_k,t_k),$$

где $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

**Лемма 1.1.** *Пусть* $n \ge 1$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ *— произвольный вектор с положительными координатами,* $1 < p \le 2$, $\gamma(t) \in L^p(R^n)$, *и* $y_0 \in$ $\in supp\ \hat{\gamma}(y)$ *— произвольная точка. Тогда*

$$mes_n\,\{(\Pi[y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon]) \cap supp\ \hat{\gamma}(y)\} > 0.$$

**Доказательство.** Допустим вопреки утверждению леммы, что существует вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, для которого

$$mes_n\{(\Pi[y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon]) \cap supp\ \hat{\gamma}(y)\} = 0.$$

Рассмотрим функцию $h(t) = \gamma(t) * \Omega\left(\Pi\left[y_0 - \dfrac{2}{3}\,\varepsilon,\ y_0 + \dfrac{2}{3}\,\varepsilon\right], \dfrac{1}{3}\,\varepsilon, t\right)$.

Так как $\Omega\left(\Pi\left[y_0 - \dfrac{2}{3}\,\varepsilon,\ y_0 + \dfrac{2}{3}\,\varepsilon\right], \dfrac{1}{3}\,\varepsilon, t\right) \in L^1(R^n)$, то $h(t) \in L^p(R^n)$ и,

следовательно, $\hat{h}(y) \in L^q(R^n)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Найдем $supp\ \hat{h}(y)$. По построению функции $h(t)$ и определению $\widehat{\Omega}(\Pi[a,b],\delta,t)$:

$$supp\ \hat{h}(y) \subseteq \{\Pi[y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon]\} \cap supp\ \hat{\gamma}(y),$$

так что в силу исходного предположения $mes_n\, supp\ \hat{h}(y) = 0$.

Пусть $S(R^n)$ — пространство основных функций [15, с. 73], т. е. пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности. Для любой основной функции $\varphi(\tau) \in S(R^n)$ имеем:

$$\int\limits_{R^n} \overline{h(t)}\varphi(t)dt = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} \overline{\hat{h}(y)}\hat{\varphi}(y)dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{supp\ \hat{h}(y)} \overline{\hat{h}(y)}\hat{\varphi}(y)dy = 0.$$

Следовательно, $h(t) = 0$ для п. в. $t \in R^n$. Но тогда $\hat{h}(y) \equiv 0$ и $supp\ \hat{h}(y) = \varnothing$, т. е. $y_0 \notin supp\ \hat{h}(y)$, что противоречит условию леммы. $\square$

**Лемма 1.2.** *Пусть* $p \in (1,2]$, $n \geq 1$, $S \neq \varnothing$, $S \subset R^n$ *измеримо и удовлетворяет условию* $(N)$. *Тогда* $mes_n S > 0$.

**Доказательство.** Выберем произвольную точку $y_0 \in S$. В силу условия $(N)$, для этой точки $y_0 \in S$ можно указать функцию $\gamma_0(\tau) \in \Gamma(S,p)$ такую, что $y_0 \in supp\ \hat{\gamma}_0(y) \subseteq S$. Выберем произвольный вектор $\varepsilon \in R^n$ с положительными координатами. Тогда по лемме 1.1: $mes_n S \geq mes_n\{(\Pi[y_0 - \varepsilon,\, y_0 + \varepsilon]) \cap S\} \geq mes_n\{(\Pi[y_0 - \varepsilon,\, y_0 + \varepsilon]) \cap \cap\, supp\ \hat{\gamma}_0(y)\} > 0$. $\square$

**Замечание 1.1.** *Учитывая результат леммы 1.2, в дальнейшем при рассмотрении измеримых множеств* $S$, *удовлетворяющих условию* $(N)$, *мы будем дополнительно предполагать, что* $mes_n S > 0$.

## §2. Условия выполнения (0.1) при $\gamma(\mathbf{t}) \in \mathbf{\Gamma}(\mathbf{S},\mathbf{p})$

Пусть $n \geq 1$, $S \subset R^n$, $mes_n S > 0$ и $\tau \in R^n$. Так как по определению

$$K(S,t,\tau) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} e^{i(y,\tau)} \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k}\right] \xi_S(y)dy,$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, то, согласно обозначениям из параграфа 1:

$$\widehat{K}(S,t,y) = \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k}\right] \xi_S(y)$$

для п. в. $y \in R^n$. Легко видеть, что при каждом $t \in R^n$ и $r \in (1,+\infty]$ функция $\widehat{K}(S,t,\cdot) \in L^r(R^n)$, и, если $r \in (1,2]$, то в силу теоремы Хаусдорфа – Юнга функция $K(S,t,\cdot) \in L^{r'}(R^n)$, где $r' = r/(r-1) \in [2,+\infty)$.

Для каждой точки $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$ будем обозначать через $n(t)$ число ее отрицательных координат. Тогда в соответствии с определением множества $E_t$ для любой функции $\gamma(t) \in L^p(R^n)$ получаем:

$$(-1)^{n(t)} \int\limits_{E_t} \gamma(\tau)d\tau = \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_n} \gamma(\tau_1, \dots, \tau_n)d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

**Лемма 2.0.** *Пусть* $p \in (1, 2]$, $n \geq 1$, $S \subset R^n$ *и* $mes_n S > 0$. *Тогда при каждом* $t \in R^n$ *имеет место равенство*

$$(-1)^{n(t)} \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \int\limits_{R^n} \overline{K(S, t, \tau)}\, \gamma(\tau) d\tau, \quad \gamma(\tau) \in \Gamma(S, p). \tag{2.1}$$

**Доказательство.** Так как $p \in (1, 2]$, то [17, с. 128] для любой функции $\gamma(t) \in \Gamma(S, p) \subset L^p(R^n)$ существует

$$\hat{\gamma}(y) = \int\limits_{R^n} e^{-i(y,\tau)} \gamma(\tau) d\tau \in L^q(R^n), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

и

$$\lim_{R \to +\infty} \|\gamma(\tau) - \gamma(\tau, R)\|_{L^p(R^n)} = 0,$$

где

$$\gamma(\tau, R) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\|y\| \leq R} \hat{\gamma}(y) e^{i(y,\tau)} dy.$$

Пусть $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$ — произвольная точка, не имеющая нулевых координат. Сделав в случае необходимости замену переменных, можно без ограничения общности полагать, что $t_m > 0$, $m = 1, 2, \ldots, n$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим через $R_0$ такое число, что

$$\|\gamma(\tau) - \gamma(\tau, R_0)\|_{L^p(R^n)} < \varepsilon.$$

Тогда

$$\int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \int\limits_{E_t} \gamma(\tau, R_0) d\tau + \int\limits_{E_t} [\gamma(\tau) - \gamma(\tau, R_0)] d\tau.$$

Рассмотрим каждое слагаемое из правой части этого равенства. Имеем:

$$\left| \int\limits_{E_t} [\gamma(\tau) - \gamma(\tau, R_0)] d\tau \right| \leq \|\gamma(\tau) - \gamma(\tau, R_0)\|_{L^p(R^n)} \cdot \{mes_n\, E_t\}^{1/q}$$

и

$$\int\limits_{E_t} \gamma(\tau, R_0) d\tau = \int\limits_{E_t} \left[ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\|y\| \leq R_0} \hat{\gamma}(y) e^{i(y,\tau)} dy \right] d\tau =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\|y\|\le R_0} \hat{\gamma}(y) \left[\int\limits_{E_t} e^{i(y,\tau)} d\tau\right] dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\|y\|\le R_0} \hat{\gamma}(y) \left\{\prod_{m=1}^{n} \frac{e^{iy_m t_m} - 1}{iy_m}\right\} dy,$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Переходя к пределу при $R_0 \to +\infty$, получим:

$$\int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} \left[\prod_{m=1}^{n} \frac{e^{iy_m t_m} - 1}{iy_m}\right] \hat{\gamma}(y) dy.$$

Так как *supp* $\hat{\gamma}(y) \subseteq S$ для любой функции $\gamma(\tau) \in \Gamma(S,p)$, то

$$\int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} \left[\prod_{m=1}^{n} \frac{e^{iy_m t_m} - 1}{iy_m}\right] \xi_S(y) \hat{\gamma}(y) dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} \overline{\left[\prod_{m=1}^{n} \frac{e^{-iy_m t_m} - 1}{-iy_m}\right] \xi_S(y)} \cdot \hat{\gamma}(y) dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} \overline{\widehat{K}(S,t,y)}\, \hat{\gamma}(y) dy, \tag{2.2}$$

откуда в силу теоремы Планшереля и следует утверждение леммы:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} \overline{\widehat{K}(S,t,y)}\, \hat{\gamma}(y) dy = \int\limits_{R^n} \overline{K(S,t,\tau)}\, \gamma(\tau) d\tau.$$

□

Обозначим через

$$C(S,p) = \sup_{\gamma(\tau)\in\Gamma(S,p)} \frac{\left\|\int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau\right\|_{L^\infty(R^n)}}{\|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^n)}} \tag{2.3}$$

наименьшую из констант $C$, при которой для любого $\gamma(\tau) \in \Gamma(S,p)$ выполняется неравенство (0.1).

**Теорема 2.0.** *Пусть $p \in (1,2]$, $n \geq 1$, $S \subset R^n$ и $mes_n S > 0$. Тогда: 1) если выполнено условие (0.3):*

$$\sup_{t\in R^n} \|K(S,t,\tau)\|_{L^q(R^n)} < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

*то справедливо неравенство (0.1):*

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau)d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} \leq C(S,p)\, \|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^n)}, \quad \gamma(\tau) \in \Gamma(S,p),$$

*где*

$$C(S,p) \leq \sup_{t\in R^n} \|K(S,t,\tau)\|_{L^q(R^n)};$$

*2) если же $p = 2$, то условие (0.3):*

$$\sup_{t\in R^n} \|K(S,t,\tau)\|_{L^2(R^n)} < +\infty$$

*является необходимым и достаточным для выполнения неравенства (0.1):*

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau)d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} \leq C(S,2)\, \|\gamma(\tau)\|_{L^2(R^n)}, \quad \gamma(\tau) \in \Gamma(S,p),$$

*где*

$$C(S,2) = \sup_{t\in R^n} \|K(S,t,\tau)\|_{L^2(R^n)}.$$

**Доказательство.** 1) Если выполнено (0.3), то при каждом $t \in R^n$ :

$$\left| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau)d\tau \right| \leq \|K(S,t,\cdot)\|_{L^q(R^n)} \cdot \|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^n)},$$

откуда следует первое утверждение теоремы, поскольку $C(S,p)$ — наименьшая константа при оценке модуля интеграла через норму подинтегральной функции.

2) Пусть $p = 2$ и выполнено неравенство (0.1) с константой $C = C(S,2)$ :

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau)d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} \le C(S,2)\, \|\gamma(\tau)\|_{L^2(R^n)}.$$

Тогда по тереме Планшереля

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau)d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} \le C(S,2) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \|\hat{\gamma}(y)\|_{L^2(R^n)}.$$

Но, согласно (2.2),

$$(-1)^{n(t)} \int\limits_{E_t} \gamma(\tau)d\tau = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n} \int\limits_{R^n} \overline{\widehat{K}(S,t,y)}\, \hat{\gamma}(y)dy$$

для любой функции $\hat{\gamma}(y) \in L^2(S)$. Следовательно,

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \left\| \widehat{K}(S,t,\cdot) \right\|_{L^2(S)} \le C(S,2),$$

а так как

$$\|K(S,t,\cdot)\|_{L^2(R^n)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \left\| \widehat{K}(S,t,\cdot) \right\|_{L^2(S)}$$

и константа $C(S,2)$ по определению минимальная, то

$$\sup_{t\in R^n} \|K(S,t,\tau)\|_{L^2(R^n)} = C(S,2).$$

Теорема доказана. $\square$

Продолжим рассмотрение достаточных условий выполнения неравенства (0.1). Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ — произвольный вектор с положительными координатами и $Q(\varepsilon) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{y \mid y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),\ |y_k| \le \varepsilon_k\}$. Множество $Q(\varepsilon)$ представляет собой замкнутую окрестность системы координатных гиперплоскостей $F = \bigcup_{k=1}^{n} \{y \,|\, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$ $y_k = 0\}$.

Так как $p \in (1, 2]$, то

$$\left[\prod_{m=1}^{n} \frac{1}{iy_m}\right] \xi_S(y) \in L^p(R^n \setminus Q(\varepsilon))$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n \setminus Q(\varepsilon)} e^{i(y,\tau)} \left[\prod_{m=1}^{n} \frac{1}{iy_m}\right] \xi_S(y) dy \in L^q(R^n).$$

По определению, условие (0.2) будем понимать в том смысле, что существует функция $K(S, \tau) \in L^q(R^n)$, для которой

$$\lim_{\|\varepsilon\| \to 0} \left\| K(S, \tau) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n \setminus Q(\varepsilon)} e^{i(y,\tau)} \left[\prod_{m=1}^{n} \frac{1}{iy_m}\right] \xi_S(y) dy \right\|_{L^q(R^n)} = 0.$$

**Теорема 2.1.** *Пусть $n \geq 1$, $t \in R^n$, $S \subset R^n$, $mes_n S > 0$ и $p \in (1, 2]$. Тогда, если выполняется условие (0.2):*

$$K(S, \tau) \in L^q(R^n), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

*то для интеграла от любой функции $\gamma(\tau) \in \Gamma(S, p)$ имеет место равенство:*

$$(-1)^{n(t)} \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \int\limits_{R^n} \overline{K(S, \tau)}\, \gamma(\tau) d\tau -$$

$$- \sum_{a=1}^{n} \int\limits_{R^n} \overline{K(S, \ldots, \tau_a - t_a, \ldots)}\, \gamma(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{\substack{a,b=1 \\ a<b}}^{n} \int\limits_{R^n} \overline{K(S, \ldots, \tau_a - t_a, \ldots, \tau_b - t_b, \ldots)}\, \gamma(\tau) d\tau + \ldots +$$

$$+(-1)^n \int\limits_{R^n} \overline{K(S,\tau_1 - t_1, \ldots, \tau_n - t_n)}\, \gamma(\tau) d\tau, \tag{2.4}$$

*где* $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *и выполняется неравенство (0.1):*

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} \leq C(S,p) \left\| \gamma(\tau) \right\|_{L^p(R^n)}$$

*при*

$$C(S,p) \leq 2^n \| K(S,\tau) \|_{L^q(R^n)}. \tag{2.5}$$

**Замечание 2.1.** *Ясно, что (0.2) выполняется, если*

$$\left[ \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{iy_m} \right] \xi_S(y) \in L^p(R^n).$$

**Доказательство теоремы 2.1** Пусть $p \in (1,2]$, $\gamma(\tau) \in \Gamma(S,p)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — произвольная точка, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ — произвольный вектор с положительными координатами и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Согласно (2.1):

$$(-1)^{n(t)} \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \int\limits_{R^n} \overline{K(S,t,\tau)}\, \gamma(\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_{R^n} \gamma(\tau) \overline{\left\{ \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int\limits_{R^n} e^{i(y,\tau)} \left[ \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k} \right] \xi_S(y) dy \right\}} d\tau =$$

$$= \int\limits_{R^n} \gamma(\tau) \overline{\left\{ \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \lim_{\|\varepsilon\| \to 0} \int\limits_{R^n \setminus Q(\varepsilon)} e^{i(y,\tau)} \left[ \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k} \right] \xi_S(y) dy \right\}} d\tau, \tag{2.6}$$

где в силу (0.2):

$$\lim_{\|\varepsilon\|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n\setminus Q(\varepsilon)} e^{i(y,\tau)}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-iy_kt_k}}{iy_k}\right]\xi_S(y)dy =$$

$$= \lim_{\|\varepsilon\|\to 0}\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n\setminus Q(\varepsilon)} e^{i(y,\tau)}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{iy_k}\right]\xi_S(y)dy-\right.$$

$$-\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n\setminus Q(\varepsilon)} e^{i(y,\tau)}\left[\prod_{\substack{k=1\\ k\neq a}}^{n}\frac{1}{iy_k}\right]\frac{e^{-iy_at_a}}{iy_a}\xi_S(y)dy+$$

$$+\sum_{\substack{a,b=1\\ a<b}}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n\setminus Q(\varepsilon)} e^{i(y,\tau)}\left[\prod_{\substack{k=1\\ k\neq a,b}}^{n}\frac{1}{iy_k}\right]\frac{e^{-iy_at_a}}{iy_a}\cdot\frac{e^{-iy_bt_b}}{iy_b}\xi_S(y)dy+$$

$$\left.+\ldots+(-1)^n\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n\setminus Q(\varepsilon)} e^{i(y,\tau)}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-iy_kt_k}}{iy_k}\right]\xi_S(y)dy\right\} =$$

$$= K(S,\tau)-\sum_{a=1}^{n}K(S,\ldots,\tau_a-t_a,\ldots)+$$

$$+\sum_{\substack{a,b=1\\ a<b}}^{n}K(S,\ldots,\tau_a-t_a,\ldots,\tau_b-t_b,\ldots)+\ldots+$$

$$+(-1)^nK(S,\tau_1-t_1,\ldots,\tau_n-t_n). \tag{2.7}$$

При любом $t\in R^n$ каждое слагаемое, стоящее в правой части (2.7), принадлежит $L^q(R^n)$. Поэтому в равенстве (2.6) можно перейти к сумме интегралов, что и дает (2.4). Из (2.4) получаем:

$$\left\|\int\limits_{E_t}\gamma(\tau)d\tau\right\|_{L^\infty(R^n)} \leq 2^n\|K(S,t)\|_{L^q(R^n)}\,\|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^n)},$$

и тогда из (2.3), очевидно, следует (2.5). □

**Следствие 2.1.1.** *Пусть $n = 1$, $S \subset R^1$, $mes\, S > 0$, $p \in (1, 2]$ и выполняется условие (0.2). Тогда для любой функции $\gamma(\tau) \in \Gamma(S, p)$ :*

$$1) \quad \int\limits_0^{+\infty} \gamma(\tau)d\tau = -\int\limits_0^{-\infty} \gamma(\tau)d\tau, \tag{2.8}$$

$$2) \quad \left| \int\limits_0^{\pm\infty} \gamma(\tau)d\tau \right| \le \|K(S,\tau)\|_{L^q(R^1)} \cdot \|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^1)}, \tag{2.9}$$

*причем если $p = 2$, то оценка*

$$\left| \int\limits_0^{\pm\infty} \gamma(\tau)d\tau \right| \le \|K(S,\tau)\|_{L^2(R^1)} \cdot \|\gamma(\tau)\|_{L^2(R^1)} \tag{2.10}$$

*точная.*

**Доказательство.** 1) Выберем произвольную функцию $\gamma(\tau) \in \Gamma(S, p)$. При $n = 1$ из (2.4) получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \gamma(\tau)d\tau = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_0^{t} \gamma(\tau)d\tau =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left\{ \int\limits_{R^1} \overline{K(S,\tau)}\,\gamma(\tau)d\tau - \int\limits_{R^1} \overline{K(S,\tau-t)}\,\gamma(\tau)d\tau \right\}.$$

Покажем, что

$$\lim_{|t|\to+\infty} \left| \int\limits_{R^1} \overline{K(S,\tau-t)}\,\gamma(\tau)d\tau \right| = 0.$$

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие $T$, $t_0 > 0$, что:

$$\|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^1\setminus[-T,T])} < \frac{\varepsilon}{2\|K(S,\tau)\|_{L^p(R^1)}},$$

и при $t > t_0$

$$\|K(S,\tau-t)\|^q_{L^q[-T,T]} = \int\limits_{-T}^{T} |K(S,\tau-t)|^q d\tau < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \cdot \frac{1}{\|\gamma(\tau)\|^q_{L^p(R^1)}}.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{R^1} \overline{K(S,\tau-t)}\,\gamma(\tau)d\tau\right| = \left|\left\{\int\limits_{R^1\setminus[-T,T]} + \int\limits_{-T}^{T}\right\}\overline{K(S,\tau-t)}\,\gamma(\tau)d\tau\right| \leq$$

$$\leq \|K(S,\tau-t)\|_{L^q(R^1)}\,\|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^1\setminus[-T,T])}+$$
$$+\|K(S,\tau-t)\|_{L^q[-T,T]}\,\|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^1)} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty}\gamma(\tau)d\tau = \int\limits_{R^1}\overline{K(S,\tau)}\,\gamma(\tau)d\tau.$$

Аналогично рассматривается и второй интеграл

$$(-1)\int\limits_0^{-\infty}\gamma(\tau)d\tau = \int\limits_{R^1}\overline{K(S,\tau)}\,\gamma(\tau)d\tau.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{+\infty}\gamma(\tau)d\tau = (-1)\int\limits_0^{-\infty}\gamma(\tau)d\tau = \int\limits_{R^1}\overline{K(S,\tau)}\,\gamma(\tau)d\tau. \tag{2.11}$$

2) Неравенство (2.9) очевидным образом следует из (0.2) и (2.11). Покажем, что при $p=2$ оценка (2.10) точная. В силу (0.2) для любой функции $\gamma(\tau)\in\Gamma(S,2)$ выполняется неравенство (0.1), поэтому, согласно (2.11),

$$\left|\int\limits_{R^1}\overline{K(S,\tau)}\,\gamma(\tau)d\tau\right| = \left|\int\limits_0^{\pm\infty}\gamma(\tau)d\tau\right| \leq C(S,2)\,\|\gamma(\tau)\|_{L^2(R^1)},$$

где

$$\left|\int\limits_{R^1}\overline{K(S,\tau)}\,\gamma(\tau)d\tau\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^1}\overline{\widehat{K}(S,y)}\,\hat{\gamma}(y)dy\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S}\overline{\widehat{K}(S,y)}\,\hat{\gamma}(y)dy\right|$$

и

$$\|\gamma(\tau)\|_{L^2(R^1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{\gamma}(y)\|_{L^2(R^1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{\gamma}(y)\|_{L^2(S)},$$

поскольку $supp\ \hat{\gamma}(y) \subseteq S$.

Следовательно, для любой функции $\hat{\gamma}(y) \in L^2(S)$ выполняется неравенство:

$$\left|\int\limits_S \overline{\widehat{K}(S,y)}\,\hat{\gamma}(y)dy\right| \leq \sqrt{2\pi}\,C(S,2)\,\|\hat{\gamma}(y)\|_{L^2(S)}.$$

Так как оценка

$$\left|\int\limits_S \overline{\widehat{K}(S,y)}\,\hat{\gamma}(y)dy\right| \leq \|\widehat{K}(S,y)\|_{L^2(S)}\,\|\hat{\gamma}(y)\|_{L^2(S)}$$

точная, то

$$\|\widehat{K}(S,y)\|_{L^2(S)} \leq \sqrt{2\pi}\,C(S,2),$$

откуда

$$\sqrt{2\pi}\,\|K(S,\tau)\|_{L^2(R^1)} \leq \sqrt{2\pi}\,C(S,2).$$

Константа $C(S,2)$ в неравенстве (0.1) минимальная, поэтому из (2.9):

$$C(S,2) \leq \|K(S,\tau)\|_{L^2(R^1)}.$$

Таким образом, $C(S,2) = \|K(S,\tau)\|_{L^2(R^1)}$, и оценка (2.10) является точной. □

Прежде чем переходить к теореме 2.3, рассмотрим одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 2.1.** *Пусть* $n \geq 1$, $S \subset R^n$, $mes_n S > 0$ *и* $p = 2$, *тогда*

$$\|K(S,\tau)\|_{L^2(R^n)} \leq \frac{1}{2^{n/2}}\sup_{t\in R^n}\|K(S,t,\tau)\|_{L^2(R^n)}.$$

**Доказательство.** Так как

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-iy_kt_k}}{iy_k}\right|^2 = 2^n\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\cos y_kt_k}{y_k^2} =$$

$$= 2^n \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{y_k^2} - \sum_{a=1}^{n} \left[ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a}}^{n} \frac{1}{y_k^2} \right] \frac{\cos y_a t_a}{y_a^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{a,b=1 \\ a<b}}^{n} \left[ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a,b}}^{n} \frac{1}{y_k^2} \right] \frac{\cos y_a t_a}{y_a^2} \cdot \frac{\cos y_b t_b}{y_b^2} + \ldots + (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{\cos y_k t_k}{y_k^2} \right\},$$

то для любого вектора $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ с положительными координатами имеем:

$$2^n \int\limits_{R^n \setminus Q(\rho)} \left[ \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{y_k^2} \right] \xi_S(y) dy =$$

$$\int\limits_{R^n \setminus Q(\rho)} \left| \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k} \right|^2 \xi_S(y) dy + \mathcal{F}(\rho, t),$$

где

$$\mathcal{F}(\rho, t) = 2^n \sum_{a=1}^{n} \int\limits_{R^n \setminus Q(\rho)} \left[ \prod_{\substack{k = 1 \\ k \neq a}}^{n} \frac{1}{y_k^2} \right] \frac{\cos y_a t_a}{y_a^2} \xi_S(y) dy -$$

$$-2^n \sum_{\substack{a,b=1 \\ a<b}}^{n} \int\limits_{R^n \setminus Q(\rho)} \left[ \prod_{\substack{k = 1 \\ k \neq a, b}}^{n} \frac{1}{y_k^2} \right] \frac{\cos y_a t_a}{y_a^2} \cdot \frac{\cos y_b t_b}{y_b^2} \xi_S(y) dy +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1} 2^n \int\limits_{R^n \setminus Q(\rho)} \left[ \prod_{k=1}^{n} \frac{\cos y_k t_k}{y_k^2} \right] \xi_S(y) dy, \tag{2.12}$$

откуда

$$2^n \int\limits_{R^n \setminus Q(\rho)} \left( \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{y_k^2} \right) \xi_S(y) dy \leq$$

$$\leq \int\limits_{R^n} \left| \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k} \right|^2 \xi_S(y) dy + |\mathcal{F}(\rho, t)| =$$

$$= \left\| \widehat{K}(S,t,\cdot) \right\|^2_{L^2(R^n)} + |\mathcal{F}(\rho,t)|.$$

Для $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ обозначим $m(t) = \min\limits_{1\le k\le n} |t_k|$. Имеем

$$\overline{\lim_{m(t)\to+\infty}} \left\| \widehat{K}(S,t,y) \right\|^2_{L^2(R^n)} \le \sup_{t\in R^n} \left\| \widehat{K}(S,t,y) \right\|^2_{L^2(R^n)}.$$

Покажем, что

$$\lim_{m(t)\to+\infty} \mathcal{F}(\rho,t) = 0.$$

Рассмотрим первое слагаемое из первой суммы, стоящей в правой части (2.12):

$$2^n \int\limits_{R^n\setminus Q(\rho)} \left[\prod_{k=2}^n \frac{1}{y_k^2}\right] \frac{\cos y_1 t_1}{y_1^2}\, \xi_S(y)dy.$$

Функция

$$\left[\prod_{k=1}^n \frac{1}{y_k^2}\right] \xi_S(y) \in L^1(R^n \setminus Q(\rho)).$$

Следовательно,

$$\lim_{t_1\to+\infty} \int\limits_{R^n\setminus Q(\rho)} \cos y_1 t_1 \left[\prod_{k=1}^n \frac{1}{y_k^2}\right] \xi_S(y)dy = 0.$$

Аналогично устанавливается, что все слагаемые из правой части (2.12) стремятся к нулю при $m(t) \to +\infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $m_0 = m_0(\rho,\varepsilon) > 0$, что при $m(t) > m_0$ будет выполняться неравенство

$$2^n \int\limits_{R^n\setminus Q(\rho)} \left[\prod_{k=1}^n \frac{1}{y_k^2}\right] \xi_S(y)dy \le \left\| \widehat{K}(S,t,y) \right\|^2_{L^2(R^n)} + \varepsilon,$$

откуда следует, что для любого вектора $\rho \in R^n$ с положительными координатами имеет место оценка

$$\int\limits_{R^n\setminus Q(\rho)} \left[\prod_{k=1}^n \frac{1}{y_k^2}\right] \xi_S(y)dy \le \frac{1}{2^n} \sup_{t\in R^n} \left\| \widehat{K}(S,t,y) \right\|^2_{L^2(R^n)}.$$

Таким образом,

$$\left\|\widehat{K}(S,y)\right\|^2_{L^2(R^n)} = \lim_{\|\rho\|\to 0} \int\limits_{R^n\setminus Q(\rho)} \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{y_k^2}\right] \xi_S(y)dy \le$$

$$\le \frac{1}{2^n} \sup_{t\in R^n} \left\|\widehat{K}(S,t,y)\right\|^2_{L^2(R^n)},$$

откуда в силу теоремы Планшереля и следует утверждение леммы. □

**Теорема 2.2.** *Пусть $n \ge 1$, $t \in R^n$, $S \subset R^n$, $mes_n S > 0$ и $p = 2$. Условие (0.2)*

$$K(S,\tau) \in L^2(R^n)$$

*является необходимым и достаточным для выполнения равенства (2.4):*

$$(-1)^{n(t)} \int\limits_{E_t} \gamma(\tau)d\tau = \int\limits_{R^n} \overline{K(S,\tau)}\,\gamma(\tau)d\tau -$$

$$-\sum_{a=1}^{n} \int\limits_{R^n} \overline{K(S,\ldots,\tau_a - t_a,\ldots)}\,\gamma(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{\substack{a,b=1\\ a<b}}^{n} \int\limits_{R^n} \overline{K(S,\ldots,\tau_a - t_a,\ldots,\tau_b - t_b,\ldots)}\,\gamma(\tau)d\tau + \ldots +$$

$$+(-1)^n \int\limits_{R^n} \overline{K(S,\tau_1 - t_1,\ldots,\tau_n - t_n)}\,\gamma(\tau)d\tau,$$

*где $\tau = (\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)$, $t = (t_1,t_2,\ldots,t_n)$, и неравенства (0.1):*

$$\left\|\int\limits_{E_t} \gamma(\tau)d\tau\right\|_{L^\infty(R^n)} \le C(S,2)\,\|\gamma(\tau)\|_{L^2(R^n)}, \quad \gamma(\tau) \in \Gamma(S,p),$$

*где*

$$C(S,2) \le 2^n \|K(S,t)\|_{L^2(R^n)}.$$

**Доказательство.** Необходимость. Согласно теореме 2.0, условие (0.3)

$$\sup_{t\in R^n} \|K(S,t,\tau)\|_{L^2(R^n)} < +\infty$$

является необходимым для выполнения (0.1). Но если выполнено (0.3), то по лемме 2.1 выполняется и условие (0.2):

$$\|K(S,t)\|_{L^2(R^n)} < +\infty,$$

являющееся в соответствии с теоремой 2.1 достаточным для выполнения (2.4) и (2.5).

Достаточность следует из теоремы 2.1. □

**Следствие 2.2.1.** *Пусть $n = 1$, $S \subset R^1$, $mes\, S > 0$ и $p = 2$. Тогда, если для любой функции $\gamma(\tau) \in \Gamma(S,p)$ выполняется неравенство (0.1)*

$$\left\| \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(R^1)} \le C(S,2)\, \|\gamma(\tau)\|_{L^2(R^1)},$$

*где $C(S,2)$ не зависит от $\gamma(\tau) \in \Gamma(S,p)$, то для каждой функции $\gamma(\tau) \in \in \Gamma(S,p)$ имеет место и равенство (2.8):*

$$\int_0^{+\infty} \gamma(\tau) d\tau = - \int_0^{-\infty} \gamma(\tau) d\tau.$$

**Доказательство.** В силу теоремы 2.2, для выполнения неравенства (0.1) при $p = 2$ и любой функции $\gamma(\tau) \in \Gamma(S,p)$ необходимо и достаточно выполнение (0.2)

$$K(S,\tau) \in L^2(R^1).$$

Но если выполнено (0.2), то, согласно следствию 2.1.1, выполняется и (2.8). □

**Теорема 2.3.** *Пусть $n \ge 1$, $S \subset R^n$, $mes_n S > 0$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — вектор с положительными координатами, $S \cap Q(\varepsilon) = \varnothing$ и $p \in (1,2]$. Тогда:*

*1)* $K(S,\tau) \in L^q(R^n)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1;$

*2) для интеграла от любой функции $\gamma(\tau) \in \Gamma(S,p)$ имеет место представление (2.4);*

*3) выполняется неравенство*

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} \leq \frac{C_{22}}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n)^{1/q}} \, \|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^n)}, \tag{2.13}$$

*где $C_{22} > 0$ не зависит от $\gamma(\tau) \in \Gamma(S,p)$.*

**Доказательство.** 1) По условию теоремы 2.3

$$\left[ \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{iy_m} \right] \xi_S(y) \in L^p(R^n \setminus Q(\varepsilon)) \subset L^p(R^n),$$

и, следовательно, существует

$$K(S,t) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int\limits_{R^n} e^{i(y,t)} \left[ \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{iy_m} \right] \xi_S(y) dy \in L^q(R^n),$$

при этом по теореме Хаусдорфа–Юнга:

$$\|K(S,t)\|_{L^q(R^n)} \leq H_p \left\| \left[ \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{iy_m} \right] \xi_S(y) \right\|_{L^p(R^n)} \leq$$

$$\leq H_p \left\{ \int\limits_{R^n \setminus Q(\varepsilon)} \left| \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{iy_m} \right|^p dy \right\}^{1/p} = H_p \left\{ 2^n \prod_{m=1}^{n} \int\limits_{\varepsilon_m}^{+\infty} \frac{1}{y_m^p} dy_m \right\}^{1/p} =$$

$$= H_p \, 2^{n/p} \left[ \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_m^{(p-1)/p}} \right] \left( \frac{1}{p-1} \right)^{n/p} =$$

$$= H_p \left( \frac{2}{p-1} \right)^{n/p} \left[ \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_m^{1/q}} \right]. \tag{2.14}$$

2) В силу (2.14) и теоремы 2.1, для любой функции $\gamma(\tau) \in \Gamma(S, p)$ имеет место представление (2.4).

3) Неравенство (2.13) следует из (2.5) и (2.14):

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^p(R^n)} \leq 2^n H_p \left( \frac{2}{p-1} \right)^{n/p} \left[ \prod_{m=1}^n \frac{1}{\varepsilon_m^{1/q}} \right] \cdot \|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^n)}. \square$$

**Замечание 2.2.** *Неравенство (2.13) можно рассматривать в качестве прямого обобщения неравенства Бора, связывающего $L^\infty(R^1)$ норму интеграла от функции и норму самой функции, при условии отделенности спектра функции от нуля.*

## §3. Случай, когда $\overline{\mathbf{S}} \cap \mathbf{F} \neq \varnothing$

Пусть $p \in (1, 2]$, $n \geq 1$, $S \subseteq R^n$, $mes_n S > 0$ — произвольное множество, удовлетворяющее условию $(N)$, $\overline{S} \cap F \neq \varnothing$, и не выполняются достаточные условия, сформулированные в теоремах 2.0–2.1. В этом случае неравенство (0.1) может не выполняться, например из-за неограниченности интегралов от некоторых функций из $\Gamma(S, p)$. Однако в $\Gamma(S, p)$ всегда можно выделить (теорема 3.0) нормированное подпространство $\Gamma(S_0, p) \neq \varnothing$, $\overline{S}_0 \cap F = \varnothing$, $mes_n S_0 > 0$, $S_0 \subset S$, $S_0 \neq S$, на котором выполняется (0.1). Также существует (теорема 3.1) и множество $\Gamma_{31} \subset \Gamma(S, p)$, функции из которого удовлетворяют неравенству (0.1)

$$\left\| \int\limits_{E_t} \mu(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} \leq C_{31} \|\mu(\tau)\|_{L^p(R^n)},$$

где $C_{31} > 0$ не зависит от $\mu(t) \in \Gamma_{31}$. Множество $\Gamma_{31}$ не является подпространством $\Gamma(S, p)$, но (теорема 3.2), если $\mu(t) \in \Gamma_{31}$, то (0.1) выполняется и при некоторых малых возмущениях функции $\mu(t)$; кроме того

$$\bigcup_{\mu(t) \in \Gamma_{31}} supp\ \hat{\mu}(y) = S.$$

**Теорема 3.0.** *Пусть $p \in (1, 2]$, $n \geq 1$, $t \in R^n$, $S \subseteq R^n$, $mes_n S > 0$ — произвольное множество, удовлетворяющее условию $(N)$. Тогда существует множество $S_0 \subset S$, также удовлетворяющее условию $(N)$ и* *такое, что* $\overline{S}_0 \cap F = \varnothing$, *и для любой функции* $\gamma(\tau) \in \Gamma(S_0, p)$ *выполняется неравенство (0.1):*

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} \leq C(S_0,p)\, \|\gamma(\tau)\|_{L^p(R^n)},$$

*где константа* $C(S_0,p) > 0$ *не зависит от* $\gamma(\tau) \in \Gamma(S_0,p)$.

**Доказательство.** Пусть $y_0 = (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n}) \in S$, $y_0 \notin F$ — произвольная точка. В силу условия $(N)$ существует функция $\mu_0(t) \in \in \Gamma(S,p)$ такая, что $y_0 \in supp\ \hat{\mu}_0(y) \subseteq S$. Выберем какой-либо вектор $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ с положительными координатами и столь малой нормой, что множество $\Pi[y_0 - 3\delta,\, y_0 + 3\delta] = \{y \,|\, y = (y_1, \ldots, y_n),$ $y_{0m} - 3\delta_m \leq y_m \leq y_{0m} + 3\delta_m,\ 1 \leq m \leq n\}$ не пересекается с $F$.

Обозначим

$$\gamma_0(t) = \mu_0(t) * \Omega(\Pi[y_0 - 2\delta,\, y_0 + 2\delta], \delta, t), \quad S_0 = supp\ \hat{\gamma}_0(y),$$

где (§1):

$$\Omega(\Pi[y_0 - 2\delta,\, y_0 + 2\delta], \delta, t) = \prod_{m=1}^{n} \Omega(\Pi[y_{0m} - 2\delta_m,\, y_{0m} + 2\delta_m], \delta_m, t_m),$$

$t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$.

Тогда $S_0 = supp\ \hat{\mu}_0(y) \cap (\Pi[y_0 - 3\delta,\, y_0 + 3\delta]) \subset S$ и удалено от каждой из $1 \leq m \leq n$ координатных гиперплоскостей на расстояние не менее чем $3\delta_m$ соответственно. А так как в силу (1.5) $\Omega(\Pi[y_0 - 2\delta,\, y_0 + 2\delta], \delta, t) \in L^1(R^n)$, то $\gamma_0(t) \in L^p(R^n)$.

Покажем, что $\|\gamma_0(t)\|_{L^p(R^n)} > 0$. Из (1.5) получаем, что $\widehat{\Omega}(\Pi[y_0 - 2\delta,\, y_0 + 2\delta], \delta, y) = \prod_{m=1}^{n} \Omega([y_{0m} - 2\delta_m,\, y_{0m} + 2\delta_m], \delta_m, y_m) = 1$, если $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Pi[y_0 - \delta,\, y_0 + \delta]$. Так как $\hat{\gamma}_0(y) = \hat{\mu}_0(y) \cdot \widehat{\Omega}(\Pi[y_0 - 2\delta,\, y_0 + 2\delta], \delta, y)$, то $\hat{\gamma}_0(y) = \hat{\mu}_0(y)$ для $y \in \Pi[y_0 - \delta,\, y_0 + \delta]$. По лемме 1.1,

$$mes_n\{(\Pi[y_0 - \delta,\, y_0 + \delta]) \cap supp\ \hat{\mu}_0(y)\} > 0$$

и, следовательно, $\|\hat{\gamma}_0(y)\|_{L^q(R^n)} > 0$. Но тогда в силу неравенства Хаусдорфа – Юнга получаем, что $\|\hat{\gamma}_0(t)\|_{L^p(R^n)} > 0$.

При этом $S_0$ удовлетворяет условию $(N)$, поскольку для любой точки $y_1 \in S_0 \subset S$ можно указать функцию $\gamma_1(t) \in \Gamma(S_0, p)$ такую, что $y_1 \in supp\ \hat{\gamma}_1(y)$. В качестве такой функции $\gamma_1(t)$ можно взять, например, функцию $\gamma_0(t)$.

По теореме 2.3, для функций, носители преобразований Фурье которых лежат в $S_0$, выполняется неравенство (0.1). □

Рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения и построения. Пусть $S \subseteq R^n$, $mes_n S > 0$ — произвольное множество, удовлетворяющее условию $(N)$. Обозначим через $k_{31}(y)\colon R^n \to R^1$ функцию, удовлетворяющую условиям:

$$1)\ k_{31}(y) \in L^{\infty}(R^n); \tag{3.1}$$

$$2)\ k_{31}(y) > 0, \quad y \in R^n \setminus F; \tag{3.2}$$

$$3)\ \left\{\prod_{m=1}^{n} \frac{1}{y_m}\right\} \xi_S(y) \cdot k_{31}^{1/p}(y) \in L^p(R^n); \tag{3.3}$$

4) для любой функции $\alpha(t) \in \Gamma(S,p)$

$$\{k_{31}(y)\,\hat{\alpha}(y)\}\tilde{\ }(t) \in L^p(R^n). \tag{3.4}$$

**Пример 3.1.** Если $S \subset R^n$, $mes_n S > 0$ удовлетворяет условию $\left\{\prod_{m=1}^{n} \frac{1}{y_m}\right\} \xi_S(y) \in L^p(R^n)$, то в качестве $k_{31}(y)$ можно взять $k_{31}(y) \equiv a$.

**Пример 3.2.** Пусть $p \in (1,2]$, $S \subseteq R^1$ и $mes_n S > 0$. Функция $G(y) = \dfrac{y^2}{1+y^2}$ удовлетворяет условиям (3.1)–(3.4), предъявляемым к функции $k_{31}(y)$.

Условия (3.1)–(3.3), очевидно, выполняются. Проверим выполнение (3.4). Для любой функции $\alpha(t) \in \Gamma(S,p)$, согласно (1.1), имеем:

$$\{G(y)\,\hat{\alpha}(y)\}\tilde{\ }(t) = \left\{\frac{y^2}{1+y^2}\,\hat{\alpha}(y)\right\}^{\sim}(t) = \left\{\hat{\alpha}(y) - \frac{1}{1+y^2}\,\hat{\alpha}(y)\right\}^{\sim}(t) =$$

$$= \alpha(t) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^1} e^{iyt}\,\frac{1}{1+y^2}\,\hat{\alpha}(y)dy = \alpha(t) - \frac{1}{2}\,\alpha(t) * e^{-|t|}.$$

Следовательно,

$$\|\{G(y)\,\hat{\alpha}(y)\}\check{}(t)\|_{L^p(R^1)} = \left\|\alpha(y) - \frac{1}{2}\,\alpha(t) * e^{-|t|}\right\|_{L^p(R^1)} \le$$

$$\le \left\{1 + \left\|\frac{1}{2}\,e^{-|t|}\right\|_{L^1(R^1)}\right\} \cdot \|\alpha(t)\|_{L^p(R^1)}.$$

**Лемма 3.1.** *Пусть* $n \ge 1$, $S \subseteq R^n$, $mes_n S > 0$, $p \in (1,2]$ *и функция* $k_{31}(y)$ *удовлетворяет условиям (3.1)–(3.4). Тогда, если* $\alpha(t) \in \Gamma(S,p)$, *то* $supp\,\hat{\alpha}(y) = supp\,[k_{31}(y)\,\hat{\alpha}(y)]$.

**Доказательство.** Очевидно, что

$$supp\,[k_{31}(y)\,\hat{\alpha}(y)] \subseteq supp\;k_{31}(y) \cap supp\;\hat{\alpha}(y) \subseteq supp\;\hat{\alpha}(y).$$

Покажем, что справедливо и обратное:

$$supp\;\hat{\alpha}(y) \subseteq supp\,[k_{31}(y)\,\hat{\alpha}(y)].$$

Пусть, напротив, существует точка $y_0 \in supp\;\hat{\alpha}(y)$, но

$$y_0 \notin supp\,[k_{31}(y)\,\hat{\alpha}(y)].$$

Тогда существует $V(y_0)$ — окрестность точки $y_0$, не пересекающаяся с $supp\,[k_{31}(y)\,\hat{\alpha}(y)]$, в которой для любой бесконечно дифференцируемой функции $\hat{\varphi}(y)$ с носителем в $V(y_0)$ будет выполняться равенство

$$\int\limits_{R^n} [k_{31}(y)\,\hat{\alpha}(y)]\,\hat{\varphi}(y)dy = \int\limits_{V(y_0)} [k_{31}(y)\,\hat{\alpha}(y)]\,\hat{\varphi}(y)dy = 0.$$

Но тогда, как следует из [15, с. 75], $k_{31}(y)\,\hat{\alpha}(y) = 0$ для п. в. $y \in$ $\in V(y_0)$, что невозможно, так как $\hat{\alpha}(y)$ не является функцией, равной нулю, для п. в. $y \in V(y_0)$, а $k_{31}(y) > 0$ для $y \notin F$, $y \in S$.

Полученное противоречие показывает, что

$$supp\;\hat{\alpha}(y) \subseteq supp\,[k_{31}(y)\,\hat{\alpha}(y)],$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Обозначим $\widehat{\Gamma}(S,p) = \{\hat{\beta}(y) \mid \beta(\tau) \in \Gamma(S,p)\}$ и $\Phi\colon \widehat{\Gamma}(S,p) \to \widehat{\Gamma}(S,p)$ — отображение, задаваемое следующим образом:

$$\Phi\,\hat{\gamma}(y) = k_{31}(y)\,\hat{\gamma}(y), \quad \hat{\gamma}(y) \in \widehat{\Gamma}(S,p).$$

**Лемма 3.2.** *Пусть $p \in (1, 2]$, $n \geq 1$, $S \subseteq R^n$, $mes_n S > 0$ — произвольное множество, удовлетворяющее условию $(N)$, и функция $k_{31}(y)$ удовлетворяет (3.1)–(3.4). Тогда $\Phi \neq 0$.*

**Доказательство.** Так как $S \neq \varnothing$ и удовлетворяет условию $(N)$, то $\Gamma(S,p) \neq \varnothing$.

Пусть $\alpha(t) \in \Gamma(S,p)$, тогда в силу леммы 1.1 $mes_n\, supp\, \hat{\alpha}(y) > 0$ и, следовательно, $\|\hat{\alpha}(y)\|_{L^q(R^n)} > 0$.

В силу леммы 3.1

$$mes_n\, supp\, [k_{31}(y)\, \hat{\alpha}(y)] = mes_n\, supp\, \hat{\alpha}(y) > 0,$$

поэтому $\|k_{31}(y)\, \hat{\alpha}(y)\|_{L^q(R^n)} > 0$. Но тогда

$$\|\Phi\| > \frac{\|k_{31}(y)\, \hat{\alpha}(y)\|_{L^q(R^n)}}{\|\hat{\alpha}(y)\|_{L^q(R^n)}} > 0,$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Выберем какое-либо число $m_{31} \in (0, \|\Phi\|))$ и обозначим

$$\Gamma_{31} = \Gamma_{31}(S, p, k_{31}(y), m_{31}) = \{\mu(t) \,|\, \mu(t) \in \Gamma(S,p),\ \hat{\mu}(y) = k_{31}(y)\, \hat{\lambda}(y),$$

$$\lambda(t) \in \Gamma(S,p),\ \|\hat{\mu}(y)\|_{L^q(R^n)} \geq\ m_{31}\|\hat{\lambda}(y)\|_{L^q(R^n)}\} \subseteq \Gamma(S,p).$$

С геометрической точки зрения $\Gamma_{31}$ — это множество, построенное следующим образом.

Пусть $q \in [2, +\infty)$ и $\rho > 0$. Обозначим через:

1) $B_q(\rho) = \{\lambda(y) \,|\, \lambda(y) \in L^q(R^n),\ \|\lambda(y)\|_{L^q(R^n)} \leq \rho\}$ шар радиуса $\rho > 0$ в пространстве $L^q(R^n)$;

2) $S_q(\rho) = \{\lambda(y) \,|\, \lambda(y) \in L^q(R^n),\ \|\lambda(y)\|_{L^q(R^n)} = \rho\}$ сферу радиуса $\rho > 0$ в пространстве $L^q(R^n)$.

Отображение $\Phi_1 \colon L^q(R^n) \to L^q(R^n)$, задаваемое формулой

$$\Phi_1\, \lambda(y) = k_{31}(y)\, \xi_S(y) \lambda(y), \quad \lambda(y) \in L^q(R^n),$$

переводит шар $B_q(1)$ в некоторое множество $\Phi_1 B_q(1)$.

Если, например,

$$k_{31}(y) \geq a > 1, \tag{3.5}$$

то $\Phi_1 B_q(1)$ содержит внутри себя шар $B_q(a)$ радиуса $a$. Но условие (3.5) не всегда выполняется. Например, если $n = 1$, $0 \in \overline{S}$ и

$$\int\limits_S \frac{1}{|y|^p}\, dy = +\infty,$$

то для выполнения (3.3) необходимо, чтобы

$$\lim_{y\to 0} k_{31}(y) = 0. \tag{3.6}$$

Следующий пример 3.3 показывает, что если $n = 1$, $p \in (1,2]$, $0 \in \overline{S}$ и выполнено (3.6), то ноль может принадлежать замыканию множества $\Phi_1 \left\{ S_q(1) \cap \widehat{\Gamma}(S,p) \right\}$.

**Пример 3.3.** Пусть $p \in (1,2]$, $n = 1$, $k_{31}(y) = \dfrac{y^2}{1+y^2}$, $S_m = \left[\frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2m}\right]$, $\hat{\alpha}_m(y) = [2m(2m+1)]^{1/q}\xi_S(y)$, $m = 1, 2\ldots$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ и $S = \bigcup\limits_{m=1}^{n} S_m$.

Тогда при $m = 1, 2\ldots$:

$$\|\hat{\alpha}_m(y)\|_{L^q(R^1)} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{m\to+\infty} \|k_{31}(y)\, \hat{\alpha}_m(y)\|_{L^q(R^1)} = 0.$$

Проверим это. Имеем

$$\|\hat{\alpha}_m(y)\|_{L^q(R^1)} = \left\{ \int\limits_{1/(2m+1)}^{1/2m} 2m(2m+1) dy \right\}^{1/q} = 1,$$

$$\|k_{31}(y)\, \hat{\alpha}_m(y)\|_{L^q(R^1)} = [2m(2m+1)]^{1/q} \left\{ \int\limits_{1/(2m+1)}^{1/2m} \left| \frac{y^2}{1+y^2} \right|^q dy \right\}^{1/q} <$$

$$< \left( \frac{1}{2m} \right)^2 \to 0$$

при $m \to +\infty$.

В силу определения числа $m_{31}$, по крайней мере, часть множества $\Phi\{S_q(1) \cap \widehat{\Gamma}(S,p)\}$ будет располагаться вне открытого шара $\overset{\circ}{B}_q(m_{31})$ радиуса $m_{31}$. Таким образом, $\widehat{\Gamma}_{31} = \{\hat{\mu}(y) \,|\, \mu(t) \in \Gamma_{31}\}$ — это множество лучей, проходящих через часть образа сферы

$$\left( \Phi\{S_q(1) \cap \widehat{\Gamma}(S,p)\} \right) \setminus \overset{\circ}{B}_q(m_{31}).$$

**Теорема 3.1.** *Пусть* $n \geq 1$, $p \in (1,2]$, $S \subseteq R^n$, $mes_n S > 0$ — *произвольное множество, удовлетворяющее условию* $(N)$, *функция* $k_{31}(y)$ *удовлетворяет условиям (3.1)–(3.4),* $m_{31} \in (0, \|\Phi\|)$ *и* $\Gamma_{31} = \Gamma_{31}(S, p, k_{31}(y), m_{31})$. *Тогда для любой функции* $\mu(t) \in \Gamma_{31}$ *выполняется неравенство (0.1):*

$$\left\| \int\limits_{E_t} \mu(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} \leq C_{31} \, \|\mu(\tau)\|_{L^p(R^n)},$$

*где константа* $C_{31} > 0$ *не зависит от* $\mu(t) \in \Gamma_{31}$.

**Доказательство.** Пусть $\lambda(t) \in \Gamma(S, p)$, $\|\hat{\lambda}(y)\|_{L^q(R^n)} \neq 0$. Обозначим $\mu(t) = \{k_{31}(y)\,\hat{\lambda}(y)\}\tilde{}(t)$. В силу (3.4) $\mu(t) \in L^p(R^n)$. Для каждого $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ имеем:

$$(-1)^{n(t)} \int\limits_{E_t} \mu(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} \left\{ \prod_{m=1}^{n} \frac{e^{iy_m t_m} - 1}{iy_m} \right\} \hat{\mu}(y) dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} \left\{ \prod_{m=1}^{n} \frac{e^{iy_m t_m} - 1}{iy_m} \right\} k_{31}(y)\,\hat{\lambda}(y) dy, \tag{3.7}$$

где $n(t)$ — число отрицательных координат точки $t$ и $\hat{\mu}(y) = k_{31}(y)\,\hat{\lambda}(y)$.

**Предложение 3.1.1.** *При сделанных выше предположениях справедлива оценка:*

$$\left| \int\limits_{R^n} \left\{ \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{y_m} \right\} k_{31}(y)\,\hat{\lambda}(y) dy \right| \leq C_{31} \, \|\hat{\mu}(y)\|_{L^q(R^n)}^{1/q} \, \|\hat{\lambda}(y)\|_{L^q(R^n)}^{1/p},$$

*где*

$$C_{31} = \left\{ \int\limits_{R^n} \left[ \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{|y_m|^p} \right] \xi_S(y) k_{31}(y) dy \right\}^{1/p}, \quad \hat{\mu}(y) = k_{31}(y)\,\hat{\lambda}(y).$$

**Доказательство предложения 3.1.1.** Воспользуемся неравенством Гельдера для трех показателей [19, с. 232]:

$$\int\limits_D |a(y)\,b(y)\,c(y)|\,dy \le \|a(y)\|_{L^u(D)}\,\|b(y)\|_{L^v(D)}\,\|c(y)\|_{L^w(D)},$$

где $D$ измеримо и $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w}=1,\ \ u,v,w>0$. Обозначим:

$$a(y)=\left\{\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{|y_m|}\right\}\xi_S(y)k_{31}^{1/p}(y),\quad u=p,$$

$$b(y)=|k_{31}(y)\,\hat\lambda(y)|^{1/q},\quad v=q^2,$$
$$c(y)=|\hat\lambda(y)|^{1/p},\quad w=pq.$$

Так как $supp\ \hat\lambda(y)\subseteq S$, то $\left\{\prod\limits_{m=1}^{n}\dfrac{1}{y_m}\right\}k_{31}(y)\,\hat\lambda(y)=\left\{\prod\limits_{m=1}^{n}\dfrac{1}{y_m}\right\}\times$ $\times\xi_S(y)k_{31}(y)\,\hat\lambda(y)$ и, на основании неравенства Гельдера для трех показателей, получаем:

$$\left|\int\limits_{R^n}\left\{\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{y_m}\right\}k_{31}(y)\,\hat\lambda(y)dy\right|\le$$

$$\le\int\limits_{R^n}\left\{\left[\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{|y_m|}\right]\xi_S(y)\,k_{31}^{1/p}(y)\right\}\cdot\left\{\left|k_{31}(y)\,\hat\lambda(y)\right|^{1/q}\right\}\times$$

$$\times\left\{\left|\hat\lambda(y)\right|^{1/p}\right\}dy\le\left\{\int\limits_{R^n}\left[\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{|y_m|^p}\right]\xi_S(y)\,k_{31}(y)dy\right\}^{1/p}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{R^n}\left|k_{31}(y)\,\hat\lambda(y)\right|^q dy\right\}^{1/q^2}\cdot\left\{\int\limits_{R^n}\left|\hat\lambda(y)\right|^q dy\right\}^{1/pq}=$$

$$=\left\|\left[\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{y_m}\right]\xi_S(y)\,k_{31}(y)\right\|_{L^p(R^n)}\cdot\|\hat\mu(y)\|_{L^q(R^n)}^{1/q}\,\|\hat\lambda(y)\|_{L^q(R^n)}^{1/p}.$$

Предложение 3.1.1 доказано. $\square$

Следовательно, из (3.7) получаем:

$$\left|\int\limits_{E_t} \mu(\tau)d\tau\right| \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \left\| \left[\prod_{m=1}^{n} \frac{2}{y_m}\right] \xi_S(y)\, k_{31}(y)\right\|_{L^p(R^n)} \times$$

$$\times \|\hat{\mu}(y)\|_{L^q(R^n)} \left\{\frac{\|\hat{\lambda}(y)\|_{L^q(R^n)}}{\|\hat{\mu}(y)\|_{L^q(R^n)}}\right\}^{1/p} \le$$

$$\le C_{311} \cdot H_p \cdot \|\mu(\tau)\|_{L^p(R^n)} \left\{\frac{\|\hat{\lambda}(y)\|_{L^q(R^n)}}{\|\hat{\mu}(y)\|_{L^q(R^n)}}\right\}^{1/p}, \tag{3.8}$$

где $C_{311} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \left\| \left[\prod_{m=1}^{n} \frac{1}{y_m}\right] \xi_S(y)\, k_{31}(y)\right\|_{L^p(R^n)}$ и $H_p$ — константа из неравенства Хаусдорфа – Юнга. Так как $m_{31} \in (0, \|\Phi\|)$, то для любой функции $\mu(t) \in \Gamma_{31}$, не являющейся равной нулю при п. в. $t \in R^n$, из определения $\Gamma_{31}$ следует, что $\hat{\mu}(y) = k_{31}(y)\,\hat{\lambda}(y)$,

$$\|\hat{\mu}(y)\|_{L^q(R^n)} = \left\|k_{31}(y)\,\hat{\lambda}(y)\right\|_{L^q(R^n)} \ge m_{31} \left\|\hat{\lambda}(y)\right\|_{L^q(R^n)}.$$

Следовательно, из (3.8) получаем, что для любой функции $\mu(t) \in \Gamma_{31}$:

$$\left|\int\limits_{E_t} \mu(\tau)d\tau\right| \le C_{311} \cdot H_p \cdot \frac{1}{m_{31}^{1/p}}\, \|\mu(\tau)\|_{L^p(R^n)},$$

откуда

$$\left\|\int\limits_{E_t} \mu(\tau)d\tau\right\|_{L^\infty(R^n)} \le C_{31}\, \|\mu(\tau)\|_{L^p(R^n)}, \quad \mu(\tau) \in \Gamma_{31},$$

где $C_{31} = \dfrac{H_p}{m_{31}^{1/p}}\, C_{311}$. $\square$

**Замечание 3.1.** *Если*

$$\left\{\prod_{m=1}^{n} \frac{1}{y_m}\right\} \xi_S(y) \in L^p(R^n),$$

*то, полагая в условии теоремы 3.1* $k_{31}(y) \equiv 1$, *получаем, как следствие, утверждения теорем 2.1 и 2.3 о существовании констант, для которых выполняется неравенство (0.1), при этом, согласно примеру 3.1,* $\Gamma_{31} = \Gamma(S,p)$.

**Замечание 3.2.** *Как видно из доказательства теоремы 3.1, если* $\hat{\gamma}(y) = k_{31}(y)\,\hat{\lambda}(y)$ *и* $\|\hat{\gamma}(y)\|_{L^q(R^n)} > m_{31}\left\|\hat{\lambda}(y)\right\|_{L^q(R^n)}$, *то неравенство в (0.1) — строгое.*

**Теорема 3.2.** *Пусть* $p \in (1,2]$, $n \geq 1$, $S \subseteq R^n$, $mes_n S > 0$ — *произвольное множество, удовлетворяющее условию* $(N)$, *функция* $k_{31}(y)$ *такова, что выполняются (3.1)–(3.4);* $m_{31} \in (0, \|\Phi\|)$ *и* $\Gamma_{31} = \Gamma_{31}(S,p,k_{31}(y),m_{31})$. *Тогда:*
*1) если* $\lambda(t) \in \Gamma(S,p)$, $\mu(t) = \{k_{31}(y)\,\hat{\lambda}(y)\}\check{}(t)$ *и*

$$\|\hat{\mu}(y)\|_{L^q(R^n)} > m_{31}\,\|\hat{\lambda}(y)\|_{L^q(R^n)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{3.9}$$

*то существует* $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) > 0$ *такое, что для любой функции* $\xi(t) \in \Gamma(S,p)$, $\|\xi(t)\|_{L^p(R^n)} < \varepsilon$ *выполняются условия:*

$$\mu(\tau) + \eta(\tau) \in \Gamma_{31}, \tag{3.10}$$

*где* $\eta(\tau) = \{k_{31}(y)\,\hat{\xi}(y)\}\check{}(\tau)$, *и справедливо неравенство:*

$$\left\| \int\limits_{E_t} [\mu(\tau) + \eta(\tau)] d\tau \right\|_{L^\infty(R^n)} < C_{31}\|\mu(\tau) + \eta(\tau)\|_{L^p(R^n)}, \tag{3.11}$$

*где* $C_{31} > 0$ — *константа из теоремы 3.1;*

2) $$S = \bigcup_{\alpha(\tau)\in\Gamma_{31}} supp\ \hat{\alpha}(y).$$

**Доказательство.** 1) Пусть выполнены условия теоремы 3.2, $\lambda(t) \in \Gamma(S,p)$ удовлетворяет (3.9) и

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{H_p}\left(\|\hat{\mu}(y)\|_{L^q(R^n)} - m_{31}\|\hat{\lambda}(y)\|_{L^q(R^n)}\right) / (\|k_{31}(y)\|_{L^\infty(R^n)} + m_{31}). \tag{3.12}$$

Выберем произвольное $\xi(t) \in \Gamma(S,p)$ такое, что $\|\xi(t)\|_{L^p(R^n)} < \varepsilon$. Тогда $\|\hat{\xi}(y)\|_{L^q(R^n)} < \varepsilon H_p$,

$$m_{31} \left\| \hat{\lambda}(y) + \hat{\xi}(y) \right\|_{L^q(R^n)} \leq m_{31} \left\| \hat{\lambda}(y) \right\|_{L^q(R^n)} + \varepsilon\, m_{31} H_p \tag{3.13}$$

и, если $\eta(\tau) = \{k_{31}(y)\,\hat{\xi}(y)\}\tilde{}\,(\tau)$, то $\hat{\eta}(y) = k_{31}(y)\,\hat{\xi}(y)$,

$$\|\hat{\mu}(y) + \hat{\eta}(y)\|_{L^q(R^n)} \geq \|\hat{\mu}(y)\|_{L^q(R^n)} - \|\hat{\eta}(y)\|_{L^q(R^n)} >$$

$$> \|\hat{\mu}(y)\|_{L^q(R^n)} - \|k_{31}(y)\|_{L^\infty(R^n)} \cdot \varepsilon \cdot H_p. \tag{3.14}$$

Следовательно, в силу (3.12), (3,13) и (3.14)

$$\|\hat{\mu}(y) + \hat{\eta}(y)\|_{L^q(R^n)} - m_{31}\|\hat{\lambda}(y) + \hat{\xi}(y)\|_{L^q(R^n)} >$$

$$> \|\hat{\mu}(y)\|_{L^q(R^n)} - m_{31}\|\hat{\lambda}(y)\|_{L^q(R^n)} - \varepsilon H_p \left(\|k_{31}(y)\|_{L^\infty(R^n)} + m_{31}\right) > 0,$$

откуда в силу определения $\Gamma_{31}$ следует (3.10). Неравенство (3.11) следует из (3.10) и замечания 3.2.

2) Пусть вопреки утверждению теоремы существует точка $y_0 \in S$ такая, что

$$y_0 \notin \bigcup_{\alpha(\tau)\in\Gamma_{31}} supp\ \hat{\alpha}(y). \tag{3.15}$$

Выберем произвольную функцию $\lambda(t)\in\Gamma(S,p)$, для которой $\mu(t) = \left\{k_{31}(y)\,\hat{\lambda}(y)\right\}\tilde{}\,(t) \in \Gamma_{31}$. В силу (3.15) $y_0 \notin supp\ \hat{\mu}(y)$. Согласно условию $(N)$, существует функция $\xi_0(t) \in \Gamma(S,p)$, для которой $y_0 \in supp\ \hat{\xi}_0(y)$. Выберем столь малые $a_1, a_2 > 0$, $a_1 \neq a_2$, что $\mu(t) + a_1\eta_0(t)$, $\mu(t) + a_2\eta_0(t) \in \Gamma_{31}$.

Обозначим $\eta_0(t) = \left\{k_{31}(y)\,\hat{\xi}_0(y)\right\}\tilde{}\,(t)$. Из леммы 1.1 следует, что $y_0 \in supp\ \hat{\eta}_0(y)$.

Тогда, согласно (3.15),

$$y_0 \notin supp\,\{\hat{\mu}(y) + a_1\hat{\eta}_0(y)\}, \quad y_0 \notin supp\,\{\hat{\mu}(y) + a_2\hat{\eta}_0(y)\},$$

т. е. функции $\hat{\mu}(y) + a_1\hat{\eta}_0(y)$ и $\hat{\mu}(y) + a_2\hat{\eta}_0(y)$ тождественно равны нулю в некоторой малой окрестности точки $y_0$. Но тогда их разность, т. е. функция $(a_1 - a_2)\hat{\eta}_0(y)$ тождественно равна нулю в этой окрестности точки $y_0$ и, следовательно, $y_0 \notin supp\ \hat{\eta}_0(y)$.

Полученное противоречие доказывает второе утверждение теоремы. □

## Библиографический список


[1] Bohr H. *Un théoréme général sur l'intégration d'un polynome trigonométrigue* // Comptes Rendus De L'Academie des sciences. 1935. Vol. 200. No. 15. P. 1276–1277.

[2] Bohr H. *Ein allgemeiner Sats über die Integration eines trigonometrischen Polynomials* // Prace Mathematyzcne Fizyczne. 1935. H. 43. P. 273–288 (Collected Mathematical works. 1952. Vol. 2. P. 36).

[3] Favard J. *Sur une propriete extremale de l'integrale d'une function periodique* // Cjmptes Rendus De L'Academie des Sciences. 1936. Vol. 202. P. 273–276.

[4] Favard J. *Application de la formule sommatorie d'Euler á la démonstration de quelques propriétés extremales des integrales des fonctions periodiques on Presque-periodiques* // Matematisk Tidsskrift. 1936. P. 81–94.

[5] Левитан Б. М. *Об одном обобщении неравенств С. Н. Бернштейна и H. Bohr'a* // ДАН СССР. 1937. Т. XV. № 4. С. 169–172.

[6] Hörmander L. *A new proof and a generalization of an inequality of Bohr* // Mathematica Scandinavica. 1954. Vol. 2. P. 33–45.

[7] Камзолов А. И. *О неравенстве Бора–Фавара для функций на компактных симметрических пространствах ранга I* // Математические заметки. 1983. Т. 33. № 2. С. 187–193.

[8] Акопян Р. Р. *Неравенства Бора и Бернштейна для аналитических и ограниченных в полуплоскости функций* // Современные проблемы математики, механики, информатики. Материалы международной научной конференции — Россия. Тула 28–30 ноября 2006 г.

[9] Баскаков А. Г., Синтяева К. А. *О неравенствах Бора–Фавара для операторов* // Известия вузов. Математика. 2009. № 12. С. 14–21.

[10] Юдин В. А. *К неравенству Бора* // Труды института математики и механики Уральского отделения РАН. 2010. Т. 16. № 4. С. 312–313.

[11] Купцов Н. П. *Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов* // Успехи математических наук. 1968. Т. XXIII, вып. 4(142). С. 118–178.

[12] Бредихина Е. А. *О приближении почти-периодических фунций с ограниченным спектром* // Математический сборник. 1962. Т. 56(98). № 1. С. 59–76.

[13] Иванов Б. Ф. *Частотный критерий ограниченности решений одного класса линейных систем* // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 704–706.

[14] Иванов Б. Ф. *Частотный критерий гладкости по параметрам решений одного класса линейных систем* // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 7. С. 1001.

[15] Функциональный анализ. Серия: «Справочная математическая библиотека». Под ред. С. Г. Креина; М.: Наука, 1972.

[16] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1968.

[17] Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье.* М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

[18] Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации.* М.: Наука, 1965.

[19] Бурбаки Н. *Интегрирование. Меры, интегрирование мер.* М.: Наука, 1967.

*Работа поступила 11 июля 2013 г.*

Санкт-Петербургский государственный технологический
университет растительных полимеров.
E-mail: ivanov-bf@yandex.ru.