DOI: 10.15393/j3.art.2013.2383 **Issues of Analysis.** Vol. 2(20), No. 2, 2013

УДК 517.542

И. А. Колесников

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА КРУГОВОЙ СЧЕТНОУГОЛЬНИК С ДВОЙНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Аннотация. В последнее время конформные отображения верхней полуплоскости на односвязные области типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π, с границей, состоящей из дуг окружностей, отрезков прямых и лучей, находят применение в задачах математической физики. В работе доказано, что конформные отображения верхней полуплоскости на такие области, обладающие дополнительным свойством симметрии относительно вертикальной прямой $w = \pi + iv$, $v \in \mathbb{R}$, являются решением дифференциального уравнения третьего порядка типа уравнения Кристоффеля – Шварца для круговых многоугольников. Полученное уравнение зависит от значений углов при конечном количестве вершин, прообразов этих вершин, акцессорных параметров. Доказательство опирается на принцип симметрии Римана – Шварца и формулу Кристоффеля – Шварца для круговых многоугольников. Записана система из двух линейных алгебраических уравнений для акцессорных параметров. Для отображения на конкретный круговой счетноугольник с двойной симметрией записанное дифференциальное уравнение, эквивалентное уравнению класса Фукса с тремя особыми точками, сведено к уравнению Гаусса. Отображение представлено через гипергеометрические интегралы.

Ключевые слова: *круговой счетноугольник, конформное отображение, симметрия переноса, производная Шварца, уравнение Гаусса.*

2010 Mathematical Subject Classification: *30C20.*

Введение

В конце XIX века Г. Шварцем было получено дифференциальное уравнение для конформного отображения верхней комплексной полуплоскости на односвязную область, ограниченную дугами окружностей [1, с. 412].

Теорема 1. *Функция $f(z)$, однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ на круговой многоугольник D, удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1-\varphi_k^2}{2(z-c_k)^2} + \frac{\widetilde{M}_k}{z-c_k}\right), \tag{1}$$

где $-\infty < c_1 < \ldots < c_{n+1} < +\infty$ — прообразы вершин кругового многоугольника D, $\varphi_1\pi, ..., \varphi_{n+1}\pi$ — углы при этих вершинах.

Уравнение для отображения верхней полуплоскости на круговой многоугольник в случае, когда один из прообразов вершин находится в бесконечно удаленной точке, получено в [4].

Левая часть уравнения (1) — производная Шварца функции f, будем обозначать ее $\{f, z\}$. Значения вещественных постоянных $\widetilde{M}_k$, c_k, $k = \overline{1, n+1}$, называемых акцессорными параметрами, заранее неизвестны. Эти акцессорные параметры связаны условиями:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n+1} \widetilde{M}_k = 0,\\ \sum_{k=1}^{n+1}\left(c_k\widetilde{M}_k + \frac{1-\varphi_k^2}{2}\right) = 0,\\ \sum_{k=1}^{n+1}\left(c_k^2\widetilde{M}_k + (1-\varphi_k^2)c_k\right) = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Для определения акцессорных параметров разработаны различные методы, например, в [2], на основе метода, предложенного П. П. Куфаревым [3], задача определения параметров сводится к задаче интегрирования системы дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение (1) для отображения верхней полуплоскости на круговой многоугольник с n вершинами можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка класса Фукса с n особыми точками [4].

В прикладных задачах представляют интерес конформные отображения на конкретные многоугольники. Многие задачи математической физики, использующие технику конформных отображений, связаны с нахождением конформных отображений на многоугольники специального вида. В последние десятилетия появился интерес к конформным отображениям верхней полуплоскости на счетноугольники типа полуплоскости с границей, состоящей из дуг окружностей, и обладающих симметрией переноса. J. M. Floryan [5] развивает численные методы, основанные на уравнении Кристоффеля – Шварца, для нахождения конформных отображений полуплоскости на односвязные области типа полуплоскости с симметрией переноса. И. А. Александровым и Л. С. Копаневой [6] получено дифференциальное уравнение типа уравнения Левнера для конформного отображения полуплоскости на односвязные области типа полуплоскости с симметрией переноса. Дифференциальное уравнение Шварца для круговых многоугольников распространено в работе [7] на случай отображения верхней полуплоскости на круговой счетноугольник типа полуплоскости с симметрией переноса.

Конформные отображения на счетноугольники с симметрией переноса используются в гидродинамике при изучении потока жидкостей, задачах теплопроводности и др. Так, I. L. Verbitskii [8], M. Neviere [9] показывают, что задача дифракции на произвольной периодической металлической границе может быть решена с помощью аппарата конформных отображений. Итальянские инженеры A. Baron, M. Quadrio, L. Vigevano [10] изучают с помощью конформных отображений поток вдоль ребристой поверхности с симметрией переноса.

Уравнение для отображения полуплоскости на круговой счетноугольник с двойной симметрией

Область Δ называют областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π, если при линейном преобразовании $L(w) = w+2\pi$ область остается неизменной: $L(\Delta) = \Delta$.

Область Δ называют областью типа полуплоскости, если при преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ среди всех простых концов [1] границы области Δ в бесконечно удаленной точке неподвижным остается только один простой конец.

Определение 1. *Круговым счетноугольником с двойной симметрией будем называть односвязную область Δ, обладающую следующими свойствами:*

- Δ — *область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на* 2π*;*
- Δ — *область типа полуплоскости;*
- Δ — *область с симметрией относительно прямой* $w = \pi + iv$, $v \in \mathbb{R}$*;*
- *часть границы области* Δ *от точки* w_0 *до точки* $w_0 + 2\pi$ *состоит из конечного числа дуг окружностей.*

Конечную точку ih_1, где $h_1 = \max\{w \in \mathbb{C} : w = iv, v \in \mathbb{R}\} \bigcap \partial\Delta$, будем считать вершиной счетноугольника Δ, обозначим ее A_1^0. Если бесконечно удаленная точка — единственная вершина счетноугольника Δ на мнимой оси, обозначим ее A_1^0. Аналогично выберем вершину на прямой $\{w \in \mathbb{C} : w = \pi + iv, v \in \mathbb{R}\}$ и обозначим ее A_n^0. Если вершины A_1^0, A_n^0 являются внутренними точками дуг окружностей границы счетноугольника $\partial\Delta$, то угол при этих вершинах равен π.

Обозначим через $A_1^0, A_2^0, ..., A_{2n-2}^0, A_1^1$, $A_1^1 = A_1^0 + 2\pi$, вершины кругового счетноугольника Δ, лежащие в полосе $P_{2\pi} = \{w \in \mathbb{C} : w = u + iv, u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}\}$, возрастание нижнего индекса соответствует движению вдоль границы кругового счетноугольника Δ в положительном направлении; пусть углы при этих вершинах равны соответственно $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, ..., \alpha_{2n-2}\pi, \alpha_1\pi$. Остальные вершины A_k^m определяются сдвигом вершин A_k^0 вдоль вещественной оси: $A_k^m = A_k^0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1, 2n-2}$. Ясно, что вершина A_{n-s}^0 симметрична вершине A_{n+s}^0, $s = \overline{1, n-2}$ относительно прямой $w = \pi + iv$, $v \in \mathbb{R}$, $A_1^0 + 2\pi = A_1^1$, кроме того, $\alpha_{n-s} = \alpha_{n+s}$, $s = \overline{1, n-2}$. Заметим, что некоторые из вершин A_k^m, $k = \overline{2, n-1}$, $m \in \mathbb{Z}$, могут находиться в бесконечно удаленной точке; некоторые дуги окружностей могут вырождаться в отрезки прямых или лучи.

Согласно теореме Римана [11], существует однолистное и конформное отображение верхней полуплоскости на круговой счетноугольник с двойной симметрией. Для такого отображения в настоящей работе получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* Δ — *круговой счетноугольник с двойной симметрией. Функция* $w(z)$*, однолистно и конформно отображающая верх-*

нюю полуплоскость Π^+ *на счетноугольник* Δ, *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2 = \frac{\sin^2 z}{2}\left(\frac{4-\alpha_1^2}{4(1-\cos z)^2} + \frac{M_1}{1-\cos z} + \right.$$
$$+ \frac{4-\alpha_n^2}{4(1+\cos z)^2} - \frac{M_n}{1+\cos z} +$$
$$\left. + \sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1-\alpha_k^2}{(a_k-\cos z)^2} + \frac{M_k}{a_k - \cos z}\right]\right) - 1 - \frac{3}{2}\cot^2 z, \qquad (3)$$

где $a_k = \cos z_k^0$, z_k^0 *— прообразы вершин* A_k^0, $k=\overline{1,n}$, *кругового счетноугольника* Δ, *лежащих в полосе* $P_\pi = \{w \in \mathbb{C} : w = u+iv, u \in [0,\pi], v \in \in \mathbb{R}\}$, $z_1^0 = 0$, $z_n^0 = \pi$; $\alpha_k\pi$ *— углы при этих вершинах,* $\alpha_k \in [0,2]$; M_k, $k=\overline{1,n}$ *— некоторые константы.*

Замечание 1. *Постоянные* M_k, a_k, $k=\overline{1,n}$, *из уравнения (3) связаны условиями:*

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} M_k = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} M_k a_k - \sum_{k=2}^{n-1}\left(1-\alpha_k^2\right) - \frac{4-\alpha_1^2-\alpha_n^2}{4} = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Доказательство теоремы 2. Построим отображение ζ, $\zeta = \zeta(z)$ полуполосы $\Pi^+ \bigcap P'_\pi$, где $P'_\pi = \{z \in \mathbb{C} : z = x+iy, x \in (0,\pi), y \in \mathbb{R}\}$ на полуплоскость Π^+. Пусть $\zeta(0)=0$, $\zeta(\pi)=\pi$, и бесконечно удаленная точка переходит в бесконечно удаленную, тогда отображение ζ будет иметь вид

$$\zeta(z) = \pi \sin^2 \frac{z}{2}.$$

Построим теперь отображение w, $w = w(\zeta)$, верхней полуплоскости Π^+ на многоугольник $\Delta \bigcap P'_\pi$. Он имеет $n+1$ вершину A_1^0, A_2^0, $\ldots$, A_n^0, A_{n+1}^*, $A_{n+1}^* = \infty$, и углы при вершинах соответственно $\frac{\alpha_1}{2}\pi, \alpha_2\pi, \ \ldots, \ \alpha_{n-1}\pi, \frac{\alpha_n}{2}\pi, \alpha_{n+1}^*\pi$, $\alpha_{n+1}^* = 0$. При отображении $w(\zeta)$ вершинам $A_1^0, A_2^0, ..., A_n^0$ w-плоскости соответствуют некоторые точки $0 = B_1^0, B_2^0, ..., B_n^0 = \pi$ на вещественной оси ζ-плоскости, и бесконечно удаленной точке A_{n+1}^* соответствует бесконечно удаленная точка

B^*_{n+1}. Согласно теореме 1, отображение $w(\zeta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\{w,\zeta\} = \frac{4-\alpha_1^2}{8\big(\zeta-B_1^0\big)^2} + \frac{\widetilde{M}_1}{\zeta-B_1^0} + \frac{4-\alpha_n^2}{8\big(\zeta-B_n^0\big)^2} + \frac{\widetilde{M}_n}{\zeta-B_n^0} + \\ + \sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1-\alpha_k^2}{2\big(\zeta-B_k^0\big)^2} + \frac{\widetilde{M}_k}{\zeta-B_k^0}\right], \qquad (5)$$

которое получается из уравнения (1) при $c_{n+1}=\infty$, $c_k = B_k^0$, $k=\overline{1,n}$, $\varphi_1 = \frac{\alpha_1}{2}$, $\varphi_n = \frac{\alpha_n}{2}$, $\varphi_k = \alpha_k$, $k = \overline{2, n-1}$.

Заметим, что точкам $B_1^0, B_2^0, ..., B_n^0$ ζ-плоскости при отображении $\zeta(z)$ соответствуют некоторые точки $z_1^0, z_2^0, ..., z_n^0$ z-плоскости, $\zeta\big(z_k^0\big) = B_k^0$, $k=\overline{1,n}$, причем, $z_1^0 = 0$, $z_n^0 = \pi$, бесконечно удаленной точке B_{n+1}^0 соответствует бесконечно удаленная точка. Композиция $w\big(\zeta(z)\big)$ отображает область $\Pi^+\bigcap P'_\pi$ на область $\Delta\bigcap P'_\pi$. В уравнении (5) выполним замену $\zeta=\zeta(z)$, пользуясь соотношением

$$\Big\{w\big(\zeta(z)\big),\zeta\Big\} = \frac{\{w,z\}-\{\zeta,z\}}{(\zeta'(z))^2},$$

получим

$$\{w,z\} = \frac{\sin^2 z}{2}\left(\frac{4-\alpha_1^2}{4(1-\cos z)^2} + \frac{\pi\widetilde{M}_1}{1-\cos z} + \frac{4-\alpha_n^2}{4(1+\cos z)^2} - \frac{\pi\widetilde{M}_n}{1+\cos z} + \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1-\alpha_k^2}{\big(\cos z_k^0-\cos z\big)^2} + \frac{\pi\widetilde{M}_k}{\cos z_k^0 - \cos z}\right]\right) - 1 - \frac{3}{2}\cot^2 z.$$

Обозначим $\pi\widetilde{M}_k = M_k$, $k=\overline{1,n}$.

По построению отображений $\zeta(z)$ и $w(\zeta)$, отображение $w\big(\zeta(z)\big)$ переводит точки $z_1^0, z_2^0, ..., z_n^0$ в вершины $A_1^0, A_2^0, ..., A_n^0$ многоугольника $\Delta\bigcap P'_\pi$ и бесконечно удаленную точку в бесконечно удаленную. Часть границы области $\Pi^+\bigcap P'_\pi$ — луч $l = \{z\in\mathbb{C} : z = \pi + iy, y>0\}$, отображение $w(z)$ переводит в часть границы области $\Delta\bigcap P'_\pi$ — луч $L = \{w\in\mathbb{C} : w = A_n^0 + iv, v>0\}$. Продолжим отображение $w(z)$ через луч l, согласно принципу симметрии Римана – Шварца. Продолженное отображение $w(z)$ переводит конформно и однолистно область $\Pi^+\bigcap P'_{2\pi}$ на область $\Delta\bigcap P'_{2\pi}$, $P'_{2\pi} = \{z\in\mathbb{C} : z = x+iy, x\in (0,2\pi), y\in\mathbb{R}\}$.

Следующим шагом продолжим полученное отображение $w(z)$ через луч $l_0 = \{z \in \mathbb{C} : z = iy, y > 0\}$, согласно принципу симметрии. Получим конформное, однолистное отображение $w(z)$ области $\Pi^+ \bigcap \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x \in (-2\pi, 2\pi), y \in \mathbb{R}\}$ на область $\Delta \bigcap \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x \in (-2\pi, 2\pi), y \in \mathbb{R}\}$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим конформное и однолистное отображение $w : \Pi^+ \to \Delta$, удовлетворяющее уравнению (3). □

С помощью алгебраических преобразований из системы (2) получаем эквивалентную ей систему

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}_k - \frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} c_k \widetilde{M}_k - \frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1-\varphi_k^2}{2} = 0,$$

$$\frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} c_k \widetilde{M}_k + \frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1-\varphi_k^2}{2} - M_{n+1} = 0,$$

$$\frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \widetilde{M}_k - \sum_{k=1}^{n} c_k \widetilde{M}_k - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1-\varphi_k^2}{2} + \frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} c_k \bigl(1-\varphi_k^2\bigr) = 0.$$

Перейдя к пределу при $c_{n+1} \to \infty$ и выполнив подстановку $c_k = \pi \sin^2 \frac{z_k^0}{2}$, $\pi\widetilde{M_k} = M_k$, $k = \overline{1,n}$, $\varphi_{n+1} = 0$, $\varphi_1 = \frac{\alpha_1}{2}$, $\varphi_n = \frac{\alpha_n}{2}$, $\varphi_k = \alpha_k$, $k = \overline{2, n-1}$, получим систему (4), которой удовлетворяют акцессорные параметры M_k, a_k, входящие в уравнение (3).

Пример

Для нахождения конкретного отображения используется следующий результат [1, с. 414].

Замечание 2. *Пусть* $f_1(z)$, $f_2(z)$ *— два линейно-независимых решения уравнения*

$$f''(z) + R(z)f(z) = 0.$$

Положим $w(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, *тогда имеем*

$$\{w, z\} = 2R(z).$$

Пусть функция $w(z)$ отображает верхнюю полуплоскость Π^+ на круговой счетноугольник Δ с двойной симметрией. Вершины счетноугольника Δ находятся в точках $2\pi m$, $\pi(2m+1)+i\pi\tan\dfrac{\pi(\psi-\varphi)}{4}$, $m\in\mathbb{Z}$, с углами при них $\varphi\pi$, $\psi\pi$, соответственно, $\varphi\in[0,2]$, $\psi\in(0,2]$.

Уравнение теоремы 2 для данного случая примет вид

$$\{w,z\}=\frac{\sin^2 z}{2}\left(\frac{4-\varphi^2}{4(1-\cos z)^2}+\frac{M_1}{1-\cos z}+\right.$$
$$\left.+\frac{4-\psi^2}{4(1+\cos z)^2}-\frac{M_2}{1+\cos z}\right)-1-\frac{3}{2}\cot^2 z.$$

Найдем константы M_1, M_2, используя систему (4):

$$M_1=-M_2=\frac{4-\varphi^2-\psi^2}{8}.$$

Уравнение для функции $w(z)$ перепишется в виде

$$\{w,z\}=\frac{\left(\psi^2-\varphi^2\right)\cos z+2-\psi^2-\varphi^2}{4\sin^2 z}. \tag{6}$$

Так как

$$\Big\{w\big(\zeta(z)\big),\zeta\Big\}=\frac{\{w,z\}-\{\zeta,z\}}{(\zeta'(z))^2},$$

то после замены $\dfrac{\cos z+1}{2}=\zeta(z)$ уравнение (6) примет вид

$$\{w,z\}=\frac{4\zeta^2+\left(\psi^2-\varphi^2-4\right)+4-\psi^2}{8\zeta^2(\zeta-1)^2}. \tag{7}$$

Согласно замечанию 2, решение уравнения (7) можно искать в виде $w(\zeta)=\dfrac{f_1(\zeta)}{f_2(\zeta)}$, где $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$ — два линейно-независимых решения уравнения

$$f''(\zeta)+\frac{4\zeta^2+\left(\psi^2-\varphi^2-4\right)+4-\psi^2}{16\zeta^2(\zeta-1)^2}f(\zeta)=0. \tag{8}$$

Выполнив в уравнении (8) замену $f(\zeta)=\zeta^{\frac{1}{2}-\frac{\psi}{4}}(\zeta-1)^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{4}}g(\zeta)$, получим уравнение Гаусса [4]

$$\zeta(1-\zeta)g''(\zeta)+(\gamma-(\alpha+\beta+1)\zeta)g'(\zeta)-\alpha\beta g(\zeta)=0, \tag{9}$$

где $\alpha=\beta=\dfrac{2-\varphi-\psi}{4}$, $\gamma=1-\dfrac{\psi}{2}$.

Если $\psi \neq 0$, то двумя линейно-независимыми интегралами уравнения (9) будут гипергеометрические ряды [4]

$$F(\alpha, \beta; \gamma; \zeta) = F\left(\frac{2-\varphi-\psi}{4}, \frac{2-\varphi-\psi}{4}; 1-\frac{\psi}{2}; \zeta\right),$$

$$\zeta^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; \zeta) = \zeta^{\frac{\psi}{2}} F\left(\frac{2-\varphi+\psi}{4}, \frac{2-\varphi+\psi}{4}; 1+\frac{\psi}{2}; \zeta\right),$$

которые сходятся при $|\zeta| < 1$.

Выражая гипергеометрические функции через определенные интегралы, получим

$$w_1(\zeta) = \zeta^{\frac{\psi}{2}} \frac{\int\limits_1^\infty t^{-1-\nu}(t-1)^\nu (t-\zeta)^\lambda dt}{\int\limits_0^1 t^\mu (t-1)^\lambda (t-\zeta)^\nu dt},$$

где $\zeta(z) = \dfrac{\cos z + 1}{2}$, $\nu = \dfrac{\varphi+\psi-2}{4}$, $\lambda = \dfrac{\varphi-\psi-2}{4}$, $\mu = \dfrac{\psi-\varphi-2}{4}$.

Заметим, что в силу инвариантности производной Шварца относительно дробно-линейного преобразования, искомая функция $w(z)$ имеет вид

$$w(z) = \left(\pi + i\pi \tan \frac{\pi(\psi-\varphi)}{4}\right)\left(e^{i\frac{\pi\varphi}{2}} w_1(\xi(z)) + 1\right).$$

Библиографический список

[1] Александров И. А. *Теория функций комплексного переменного.* Томск: Томск. гос. ун-т, 2002. 510 с.

[2] Александров И. А. *Параметрические продолжения в теории однолистных функций.* М.: Наука, Физматлит, 1976. 344 с.

[3] Куфарев П. П. *Об одном методе численного определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца* // ДАН СССР Т. 57, №6. 1947. С. 535–537.

[4] Голубев В. В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* 2-е изд. М.-Л.: ГТТИ, 1950. 436 с.

[5] Floryan J. M. *Schwarz-Christoffel methods for conformal mapping of regions with a periodic boundary* // J. comput. and applied math. №46. 1993. P. 77–102.

[6] Александров И. А., Копанева Л. С. *Левнеровские семейства отображений полуплоскости на области с симметрией переноса* // Вестн. Томск. ун-та. № 284. 2004. С. 5–7.

[7] Колесников И. А. *Отображение на круговой счетноугольник с симметрией переноса* // Вестн. Томск. ун-та. № 2(22). 2013. С. 33–44.

[8] Verbitskii I. L. *Quasistatic green function method as a powerful tool of diffraction problems solving* // Mathiarials of the VI international conference «Mathematical methods in electromagnetic theory» on 10–13 Sep. Lviv, Ukraine. 1996. P. 358–361.

[9] Neviere M., Cadilhac M., Petit R. *Application of conformal mapping to the diffraction of electromagnetic waves by a grating* // Antennas propagation V. 21, № 1. 1973. P. 37–46.

[10] Baron A, Quadrio M., Vigevano L. *On the boundary layer/riblets interaction mechanisms and the prediction of turbulent drag reduction* // Int L. J. heat and fluid flow V. 14, № 4. 1993. P. 324–332.

[11] Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ:* в 2 т. Т. 1. 4-е изд. СПб: Лань, 2004. 336 с.

Работа поступила 5 июля 2013 г.

Томский государственный университет,
г. Томск, пр. Ленина, 36.
E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru