Abstract

N. N. Nikitina, I. A. Chernov

SOLVABILITY OF THE DIFFERENCE EQUATIONS FOR THE DYNAMICS OF CUMULATIVE SUMS

KEY WORDS: *difference equations, boundary value difference problems.*

We consider the linear system of difference equations for the cumulative sum used in detecting network attacks. In the flow of events each can be dangerous with the known probability, in this case the cumulative sum is increased to the certain amount. In the opposite case it is reduced. Suspicious events are not dangerous if rare, therefore the cumulative sum traces the relative amount of them. Reaching the threshold means the alarm situation, while hitting zero is the reset. The average number of events up to the alarm for the initial value of the cumulative sum is driven by the system of difference equations. We construct the solution, prove that it is unique (there is only one bounded solution), establish some properties of this solution. In particular, it is positive, piecewise constant and non-increasing. The used technique is similar to the sweeping method and the maximum principle widely used in mathematical physics. Solvability is established using the spectral theory. The proof of the existence theorem is constructive: the presented algorithm can be used for calculating the solution.

DOI: 10.15393/j3.art.2013.2384 **Issues of Analysis.** Vol. 2(21), No. 2, 2014

УДК 517.929.2

Н. Н. Никитина, И. А. Чернов

РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДИНАМИКИ КУМУЛЯТИВНОЙ СУММЫ[1]

Аннотация. Рассматривается линейная система разностных уравнений, описывающих динамику кумулятивной суммы в задачах обнаружения кибератак. Доказывается существование, единственность и ряд свойств ограниченного решения.

Ключевые слова: *разностные уравнения, существование и единственность, корректность краевых разностных задач.*

2010 Mathematical Subject Classification: *39A06.*

§ 1. Постановка задачи

Одним из распространенных методов нарушения функционирования многопользовательской вычислительной системы (в частности, веб-сервера, DNS-сервера и др.) является атака типа «отказ в обслуживании» или DOS-атака (от англ. Denial of Service [1]). При ее проведении в систему поступают заявки, генерируемые автоматически таким образом, чтобы возросшая интенсивность входного потока не позволяла системе своевременно его обрабатывать. С точки зрения системного администратора, важно выявить наличие DOS-атаки и предпринять защитные действия.

Моделированию подсистемы безопасности вычислительных систем и сценариев атак посвящены, в частности, работы [2, 3]. При моделировании потока заявок как случайного процесса наличие DOS-атаки

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности и при поддержке РФФИ (проект а-13-07-00008).

отражается в изменении вероятностных характеристик данного процесса, и к его выявлению в таком случае может быть применен метод кумулятивных сумм, описанный в [4]. Принцип обнаружения DOS-атаки на вычислительную систему с использованием метода кумулятивных сумм исследуется, в частности, в работах [5, 6]. Данный принцип предполагает следующий контроль входящего сетевого трафика.

Предположим, что в систему поступает поток событий, каждое из которых с вероятностью p расценивается как «опасное». В случае наступления «безопасного» события некоторый показатель s уменьшается на единицу. Если же наступает опасное событие, показатель s увеличивается на заданную величину z. События можно трактовать как заявки на обслуживание на сервере, а опасные события — как вредоносные заявки, призванные нарушить работоспособность сервера. Понятно, что редкие вредоносные заявки не опасны, а рост их числа требует защитной реакции. Мерой необходимости защитных действий служит s. При достижении ситуации $s \geq b$, где b — некоторый порог, атака считается выявленной и предпринимаются защитные действия. Аналогично, при $s \leq 0$ происходит «сброс», после которого заявки отслеживаются с начала, а предыстория «забывается»; при этом показатель s обнуляется. Представляет интерес среднее число заявок j_s до тревоги при данном значении показателя s.

Динамика этой величины описывается следующим образом. Если s может быть увеличено на z без наступления тревоги и уменьшено на единицу без сброса, то есть если $1 < s < b-z$, то среднее число заявок j_s на единицу (текущую заявку) больше среднего числа заявок при увеличенном значении $s+z$, если заявка опасная, и на единицу больше среднего числа заявок при уменьшенном значении $s-1$, если заявка безобидная. Аналогично при высоких значениях $s \in [b-z, b)$ опасная заявка приводит к тревоге, так что среднее число заявок на единицу превосходит j_{s-1} при безобидной заявке либо равно 1 при опасной. Так же анализируются малые $s \in [0, 1]$: при безобидной заявке наступает сброс, поэтому независимо от s среднее число заявок равно $j_0 + 1$.

Формализуем эти рассуждения. Пусть функция $j_s = j(s)$ определена на полуинтервале $[0, b)$, $b > 1$, и удовлетворяет системе линейных разностных уравнений

$$j_s = 1 + \bar{p} j_{s-1}, \quad s \in [b - z, b), \tag{1}$$
$$j_s = 1 + p j_{s+z} + \bar{p} j_{s-1}, \quad s \in [1, b - z), \tag{2}$$
$$j_s = 1 + p j_{s+z} + \bar{p} j_0, \quad s \in [0, 1). \tag{3}$$

Здесь $p + \bar{p} = 1$, $z \geq 1$. Случай $z < 1$ рассматривается аналогично. В общем случае z вещественное, рациональное или иррациональное; в частном случае целого z задача сводится к дискретной системе разностных уравнений, а при $z = 1$ нетрудно выписать решение в виде формулы. Под решением системы (1)–(3) подразумеваем вещественнозначную функцию, определенную в каждой точке множества $[0, b)$ и обращающую уравнения системы в верные тождества.

В работе мы докажем, что система имеет не более одного ограниченного решения, а затем рассмотрим вопрос о неограниченных решениях; предложим алгоритм построения ограниченного решения, доказав существование такового; докажем некоторые свойства решения. Функциональным и разностным уравнениям, а также уравнениям в банаховых пространствах посвящена обширная литература [7, 8, 9, 10]; мы применяем методы функционального анализа и аналог принципа максимума из математической физики.

§ 2. Единственность ограниченного решения

Существование двух различных решений означает, в силу линейности и принципа суперпозиции, наличие ненулевого решения у однородной системы

$$x_s = \bar{p} x_{s-1}, \quad s \in [b - z, b), \tag{4}$$
$$x_s = p x_{s+z} + \bar{p} x_{s-1}, \quad s \in [1, b - z), \tag{5}$$
$$x_s = p x_{s+z} + \bar{p} x_0, \quad s \in [0, 1). \tag{6}$$

Для однородной системы справедлив аналог принципа максимума для параболических и эллиптических уравнений в частных производных. Предположим, что ненулевое ограниченное решение однородной системы существует. Без ограничения общности можно считать, что оно принимает и положительные значения. В противном случае решением является $-x_s$, также не равное нулю и принимающее только положительные значения.

Пусть максимальное значение $X > 0$ решения достигается в некоторой точке $s \in (1, b-z)$, то есть $x_s = X$. Из уравнения (5) следует, что $x_{s+z} = x_{s-1} = X$, так как если, например, $x_{s+z} < X$, то

$$X = x_s = pX + \bar{p}x_{s+z} < pX + \bar{p}X = X,$$

то есть противоречие. Рассматривая (5) в точке $s+z$, аналогично выясняем, что $x_{s+2z} = X$ и так далее, пока на каком-то шаге $s + kz$ не окажется больше $b - z$. Из (4) следует, что максимум в соответствующей области достигаться не может: $X = \bar{p}x_{s-1} \leq \bar{p}X < X$ — противоречие.

Следовательно, максимум не может достигаться при $s \geq 1$, так как тогда с необходимостью он также достигается в области $[b-z, b)$, что невозможно.

Предположим, что максимум достигнут при $s \in [0, 1)$; тогда из (6) следует, что $x_0 = X$. Однако $x_0 = x_z$, в чем легко убедиться, рассмотрев уравнение (6) при $s = 0$. Поэтому если $x_0 = X$, то $x_z = X$ и, следовательно, приходим к противоречию. Таким образом, положительный максимум не может достигаться ни в одной точке, что означает $x_s \equiv 0$.

Теперь рассмотрим случай, при котором максимальное значение не достигается (это возможно, если решение разрывно). Ограниченность решения означает существование такого B, что $x_s \leq B$ для всех s. Можно считать, что B — минимально, то есть точная нижняя грань всех чисел, превосходящих решение. Однако при всех s имеет место неравенство $x_s < B$, так как максимальное значение не достигается. В силу минимальности для любого ε найдется s такое, что $B - x_s < \varepsilon$.

Выберем положительное число ϵ и назовем значение $X = B - \epsilon$ «субмаксимальным». Если это значение X достигается в некоторой точке $s \in [1, b-z)$, то из (5) следует, что

$$B - \epsilon \leq px_{s+z} + \bar{p}B,$$

то есть

$$x_{s+z} \geq B - \epsilon/p.$$

Продолжая рассуждение, получим, что $x_t \geq B - \epsilon/p^m$, где m — константа, $m = [b/z]$, квадратные скобки означают целую часть. При этом $t \in [b-z, b)$.

Случай достижения субмаксимального значения в зоне $[0, 1)$ рассматривается аналогично.

Осталось выяснить, может ли субмаксимальное значение достигаться при $s > b - z$. Из (4) следует, что $x_t = (1-p)x_{t-1}$, то есть $B - \epsilon/p^m \leq (1-p)B$. Это означает, что

$$B \leq \frac{\epsilon}{p^{m+1}}.$$

Выбором числа ϵ правая часть может быть сделана сколь угодно малой, что означает, что $B = 0$, то есть решение не принимает положительных значений, а с учетом сказанного выше (об обязательном наличии положительных значений у ненулевого решения) — получаем, что $x_s \equiv 0$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Система* (1)–(3) *имеет не более одного ограниченного решения.*

Изучим вопрос о положительности решения. Предположим, что минимальное значение X на отрезке $[0, b)$ достигается в некоторой точке $s \in [1, b-z)$. Применим уравнение (2) и получим оценку:

$$X = j_s = 1 + pj_{s+z} + \bar{p}j_{s-1} \geq 1 + pX + \bar{p}X = 1 + X,$$

то есть — противоречие. Аналогичное противоречие возникает при предположении о $j_s = X$ при $s \in [0, 1)$. Остается единственный возможный случай: $j_s = X$ при $s \in [b-z, b)$. Уравнение (1) дает

$$X = j_s = 1 + \bar{p}j_{s-1} \geq 1 + \bar{p}X,$$

откуда следует $pX \geq 1$, то есть

$$X \geq \frac{1}{p}.$$

Следовательно, минимальное значение достигается при $s > b - z$, оно положительно, и более того — имеется положительная оценка снизу.

Кроме того, уравнение $j_s = 1 + \bar{p}j_{s-1}$ при $j_t > 1/p$ для всех t показывает, что $j_s \leq j_{s-1}$, так что минимум достигается при $s \geq b-1$.

Если же минимальное значение решения не достигается ни в одной точке, то рассуждение совершенно аналогично: рассматривается субоптиальное решение. Таким образом, справедлива теорема 2.

Теорема 2. *Ограниченное решение* j_s *системы* (1)–(3), *если существует, положительно,* $j_s \geq p^{-1}$ *и минимум может достигаться только на* $[b-1, b]$.

Этот результат будет усилен в следующем параграфе.

Решение системы кусочно-постоянно в следующем смысле: если решение имеет ограниченную производную на каком-либо множестве, то эта производная равна нулю. В самом деле, производная решения в тех точках, где она определена, подчиняется однородной системе, не имеющей ненулевых ограниченных решений. Доказана теорема 3.

Теорема 3. *Если решение* j_s *системы* (1)–(3) *существует, то оно кусочно-постоянно в указанном выше смысле.*

§ 3. О неограниченных решениях

Рассуждения выше остаются справедливыми, если рассматривать систему на любом непустом подмножестве полуинтервала $[0, b)$ при условии, что оно содержит нуль и вместе с любой точкой s оно содержит также $s+z$ и $s-1$, если эти значения входят в $[0, b)$. Такое множество назовем допустимым.

Выберем произвольное s и минимальное по включению допустимое множество, содержащее s. Такое множество назовем порожденным точкой s. Покажем, что в случае рационального z это множество конечно. В самом деле, оно содержит точки $s+mz-n$ при всевозможных натуральных m и n, при условии, что $s+mz-n \in [0, b)$, а также точки $Mz-N$ при всевозможных натуральных M и N, при условии, что $Mz-N \in [0, b)$. Числа вида $mz-n$ при рациональном z — это дроби со знаменателем, не превосходящим знаменателя z. Их конечное число на отрезке, поэтому указанных чисел — конечное количество.

Решение однородной системы (6)–(4) на этом множестве ограниченно в силу конечности множества и, следовательно, тождественно равно нулю, в том числе и в точке s. Поскольку s произвольно, получаем, что в рациональном случае решение также единственно и неограниченных решений быть не может. Таким образом, справедлива теорема 4.

Теорема 4. *Система* (1)–(3) *не имеет неограниченных решений при рациональном* z.

Вопрос о существовании неограниченных решений при иррациональном z оставим пока открытым.

§ 4. Существование и свойства решения

Выберем произвольную точку s и рассмотрим систему (1)–(3) на порожденном s множестве S. В случае рационального z это множество конечно, однако для иррационального — бесконечно, и более того — всюду плотно на $[0, b]$ (в силу теоремы Кронекера). В рациональном случае однородная система имеет единственное ограниченное решение (нулевое), а следовательно матрица невырождена и неоднородная система разрешима при любой правой части. Это и означает существование решения у исходной системы. Изучим иррациональный случай.

Рассмотрим линейный оператор $y = Tx$, задаваемый уравнениями

$$y_s = \bar{p}x_0 + px_{s+z}, \qquad 0 \le s \le 1, \tag{7}$$

$$y_s = \bar{p}x_{s-1} + px_{s+z}, \qquad 1 \le s < b - z, \tag{8}$$

$$y_s = \bar{p}x_{s-1}, \qquad b - z \le s < b. \tag{9}$$

Оператор действует на множестве функций x_s, определенных на множестве S. В случае рационального z, это конечномерное пространство и, соответственно, оператор задается квадратной матрицей; при иррациональном z, пространство после какой-либо нумерации совпадает с пространством ограниченных последовательностей; его можно отождествить с ℓ_∞, введя соответствующую норму (наименьшая верхняя грань абсолютных величин членов последовательности).

Разрешимость системы равносильна вопросу о вхождении числа 1 в резольвентное множество T. В самом деле, если единица не входит в спектр, то оператор $T - E$ имеет ограниченный обратный, то есть линейное уравнение $Tx - x = y$ имеет единственное решение при любой правой части y, а это и означает разрешимость системы, причем для любых «правых частей».

Чтобы доказать принадлежность единицы резольвентному множеству, достаточно оценить спектральный радиус оператора числом, меньшим, чем единица. Известен результат [7, 11]: спектральный радиус (любого линейного) оператора T равен

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Легко видеть, что для любой точки s значения $T^n x_s$ выражаются через всевозможные значения x_t при $t = s + kz - m$ при целых неотрицательных k и m таких, что $k+m=n$. Коэффициенты при этом положительны и равны $(\bar{p})^m p^k$ (считаем, что подобные члены не приводятся). Здесь мы также предполагаем, что $x_t = x_0$ при $t<0$ и $x_t = 0$ при $t \geq b$. Сумма всех коэффициентов равна единице. Число «шагов» длины z от любой точки $s \in [0, b)$ до b не превосходит, очевидно, величины $\alpha = [(b-z)/z]+1$ (скобки означают целую часть числа). Однако при достаточно большом n, а именно $n > \alpha - 1$, в выражение для $T^n x_s$ входят x_t при $t \geq b$, равные нулю. Поэтому сумма коэффициентов при ненулевых слагаемых меньше единицы, она не превосходит $1 - p^\alpha$.

Пусть $\|x_s\|_{\ell_\infty} = 1$. Тогда $y_s = T^n x_s \leq (1-p^\alpha) \cdot 1 < 1$, то есть даже если все значения функции x_s, через которые выражается y_s, равны единице, результат $y_s \leq 1$. Переходя к супремуму по s, получаем, что $\|T^\alpha x_s\| \leq 1 - p^\alpha < 1$.

Итерируя, получаем оценки

$$\|T^n x_s\| \leq (1-p^\alpha)^{\frac{n}{\alpha}}.$$

Отсюда следует, что спектральный радиус

$$\rho \leq (1-p^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < 1.$$

Это доказывает существование решения системы на множестве, порожденном произвольной точкой, а следовательно, и решение исходной системы на всем отрезке.

Теорема 5. *Система* (1)–(3) *имеет ограниченное решение при любом* $z > 1$.

Оценка нормы оператора T позволяет указать конструктивный способ нахождения решения системы (1)–(3), то есть операторного уравнения $x = Tx + r$, где r — последовательность из единиц (а также любая другая ограниченная последовательность в общем случае): итерационную процедуру

$$x_{\langle k+1 \rangle} = T x_{\langle k \rangle} + r. \tag{10}$$

Она сходится при любом начальном приближении $x_{\langle 0 \rangle}$, поскольку при последовательных итерациях член $T^k x_{\langle 0 \rangle}$ стремится к нулю по норме, а операторный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

сходится — в силу оценки $\|T\| < 1$.

Анализ оператора T позволяет сделать еще один вывод. Заметим, что T переводит положительные монотонно невозрастающие функции (то есть $x_s \le x_t$ при $s > t$) в положительные монотонно невозрастающие. В самом деле, положительная x_s переводится в положительную y_s, что очевидно. Пусть x_s не возрастает. Выберем произвольное $\delta s > 0$ и обозначим $\delta x_s = x_{s+\delta s} - x_s$, аналогично δy_s. Тогда справедливо одно из соотношений:

- $\delta y_s = p\delta x_{s+z} \le 0$,
- $\delta y_s = \bar{p}\delta x_{s-1} + p\delta x_{s+z} \le 0$,
- $\delta y_s = \bar{p}\delta x_{s-1} \le 0$,
- $\delta y_s = \bar{p}\big(x_{s-1} - x_0\big) + p\delta x_{s+z} \le 0$,
- $\delta y_s = \bar{p}\delta_{s-1} - px_{s+z} \le 0$.

В любом случае $\delta y_s \le 0$, независимо от s, и $\delta s > 0$. Следовательно, предел итерационной схемы также положителен и монотонен, если начальное приближение не возрастает (например, константа). То есть монотонно убывающее (и потому ограниченное) решение существует, но других (по крайней мере, ограниченных) решений нет. Доказана монотоность решения.

Теорема 6. *Решение j_s системы* (1)–(3) *является невозрастающей функцией s.*

Отметим, что монотонность интуитивно ожидаема для рассматриваемой прикладной задачи и, следовательно, является желательным свойством модели: среднее число заявок до достижения порогового значения кумулятивной суммы тем меньше, чем больше текущее значение этой суммы.

Итерационная схема (10) обладает монотонностью в следующем смысле. Пусть $u_{\langle k\rangle}$ и $v_{\langle k\rangle}$ — итерации (10); если $u_{\langle k\rangle} \le v_{\langle k\rangle}$ (знак $\le$ означает покомпонентное неравенство), то $u_{\langle k+1\rangle} \le v_{\langle k+1\rangle}$. В самом деле, это выполнено для любой матрицы T с неотрицательными элементами. Следовательно, если удастся найти такое $x_{\langle 0\rangle}$, что $x_{\langle 1\rangle} \le x_{\langle 0\rangle}$, то вся последовательность $x_{\langle k\rangle}$ окажется невозрастающей в покомпонентном смысле. Тогда каждая компонента вектора $x_{\langle 0\rangle}$ является оценкой сверху соответствующей компоненты решения.

Проверим, обладает ли линейная функция $x_{\langle 0\rangle} = -\nu s + \beta$ указанным свойством при каких-нибудь коэффициентах ν и β. Пусть r в (10) — вектор из единиц. Тогда для $s \in [1, b-z]$ должно выполняться

$$\nu(\bar{p} - pz) \le -1. \tag{11}$$

Имеем три случая: при $z = \bar{p}/p$ решений нет, в двух других — существуют, разного знака. Пусть $z > \bar{p}/p$. Тогда $\nu \ge (pz - \bar{p})^{-1}$. При $s \in [0,1]$ имеем неравенство

$$(-pz + \bar{p}s)\nu \le -1.$$

Его справедливость при всех $s \in [0,1]$ следует из (11). Осталось проверить соотношение при $s \in [b-z, b]$:

$$\beta \ge \nu s + \nu\frac{1+\bar{p}}{p}.$$

Для всех s это неравенство истинно, если

$$\beta = \nu b + \nu\frac{1+\bar{p}}{p}.$$

Положим ν равным минимальному значению $(pz - \bar{p})^{-1}$; тогда

$$x_{\langle 0\rangle}(0) = \beta = \frac{b}{pz - \bar{p}} + \frac{1+\bar{p}}{(pz - \bar{p})p}.$$

Это оценка сверху решения j_0 при условии $z > \bar{p}/p$. Например, при $p = \bar{p} = 0,5$ и $z = 1,5$ имеем $j_0 \le 4b+12$; в случаях, представленных на рис. 1, j_0, соответственно, оценивается числами 15,81, 8,9 и 5,65. Рисунок показывает, что оценка достаточно точна; она тем точнее, чем больше $p(z+1)-1$, в частности, чем больше p. Можно получить более точную оценку, подобрав подходящее $x_{\langle 0\rangle}$, а также оценить решение в случаях $z \le \bar{p}/p$.

Запишем исходную систему в форме $(T-E)x = r$, где вектор $r \ge 0$, и заметим, что если $r_1 = \gamma r_2$, то $x_1 = \gamma x_2$ в силу линейности (здесь r_1 и r_2 — различные правые части, а x_1 и x_2 — соответствующие решения). Более того, если $r_1 \ge r_2$, то $x_1 \ge x_2$. Эта монотонность устанавливается дословно так же, как и теорема 2: положительной правой части отвечают положительные решения, поэтому положительной правой части $r_1 - r_2$ отвечает $x_1 - x_2 > 0$.

Следовательно, если $\|r\| = \gamma$ (норма в смысле ℓ_∞, в конечномерном случае — максимальное абсолютное значение), а 1 означает вектор из единиц, то решение системы $(T - E)x = r$ оценивается по решению системы $(T - E)j = 1$:

$$x \leq \gamma j.$$

Этот результат представляет самостоятельный интерес при изучении динамики кумулятивных сумм более общего вида, однако мы используем его как вспомогательный. Из него следует, что $x \leq \gamma j_0$. Полученная выше оценка для j_0 позволяет оценить решение для любой правой части. Пусть $j_0 \leq M$, то есть $x \leq \|r\| M$.

Используем это для оценки спектрального радиуса обратного оператора $G = (T - E)^{-1}$. Очевидно, $G^n r \leq \|r\| M^n$, а следовательно, $\sqrt[n]{G^n r} \leq M \sqrt[n]{\|r\|} \to M$. Спектральный радиус самого оператора оценить легче: если $\|x\| = 1$, то $\|(T - E)x\| \leq 2$. Таким образом, $\|(T - E)^n\| \leq 2^n$ и спектральный радиус не превосходит числа 2. Число обусловленности оператора $T - E$ (равное произведению спектральных радиусов оператора и обратного к нему), таким образом, оценивается величиной $2M$. Оно широко используется для оценки возмущений решения при вариации оператора или правой части [12], в том числе при оценивании влияний ошибок округления при численном решении. Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 7. *Линейный оператор T системы* (1)–(3) *допускает оценку нормы $\|T\| \leq 2$, обратный к нему имеет норму*

$$\|T^{-1}\| \leq M = \frac{b}{pz - \bar{p}} + \frac{1 + \bar{p}}{(pz - \bar{p})p}$$

при условии $z > \bar{p}/p$, и число обусловленности $\sigma(T) \leq 2M$.

§ 5. Алгоритм построения решения при рациональном z

Систему уравнений можно решать любым пригодным методом, однако целесообразно учесть структуру матрицы — по следующим соображениям. Число b может быть велико по сравнению с N^{-1}, где N — знаменатель дроби, выражающей рациональное z. По этой причине размерность системы может оказаться большой, тогда как реальная сложность решения может быть существенно ниже. Например, при $z = 1{,}1$ имеем $N = 10$; но при $b = 10$ размерность системы уравнений имеет порядок 100. С другой стороны, предлагаемый ниже алгоритм приводит к системе порядка 10.

Сформулируем алгоритм вычисления решения для рационального $z = M/N$ (дробь несократима). Отрезок $[b-1, b]$ разобьем на равные части длины $1/N$: отрезки $[b-K/N, b-(K-1)/N]$, $K = 1 : N$. На K-ой части положим решение равным константе C_K. Эти константы определим далее. Для любого s вида $b-m/N$ при натуральном m (но $s > 0$) либо $s = 0$ положим

$$j_s = \sum_{K=1}^{N} A_{s,K} C_K + B_s$$

при неизвестных коэффициентах.

Уравнения системы приводят к рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}
A_{s,K} &= \frac{A_{s+1,K} - pA_{s+z+1,K}}{\bar{p}}, \quad 0 \le s < b-z-1, \\
B_s &= \frac{B_{s+1} - pB_{s+z+1} - 1}{\bar{p}}, \quad 0 \le s < b-z-1, \\
A_{s,K} &= \frac{A_{s+1,K}}{\bar{p}}, \quad B_s = \frac{B_{s+1} - 1}{\bar{p}}, \quad b-z-1 \le s < b-1, \\
A_{s,K} &= \delta_{m,K}, \quad B_{s,K} = 0, \quad b-1 \le s < b.
\end{aligned}$$

Здесь $\delta_{x,y}$ — символ Кронекера. Соотношения позволяют определить для любого s указанного вида коэффициенты за конечное число шагов. Осталось найти величины C_K.

Выразим j_s при $0 \le s < 1$ указанного вида через C_K иначе:

$$j_s = \sum_{K=1}^{N} A'_{s,K} C_K + B'_s,$$

где коэффициенты выражаются с помощью (3):

$$A'_{s,K} = \bar{p} A_{0,K} + pA_{s+z,K}, \quad B'_s = 1 + \bar{p} B_0 + pB_{s+z}.$$

Это дает необходимое число уравнений для неизвестных C_K.

Порядок системы линейных алгебраических уравнений, таким образом, равен N, тогда как порядок исходной системы линейных алгебраических уравнений есть bN. Отметим, что, в частности, при целых

z уравнение всего одно. Отметим еще, что размерность системы и, следовательно, сложность расчетов в прикладной задаче зависит от теоретико-числовых свойств параметра z; в частности, близким значениям параметра могут отвечать очень различные по размерности системы. Расчеты показывают, что решения для близких значений z близки, но строгое доказательство этого утверждения будет опубликовано позже (кроме устойчивости по отношению к z и возможности оптимизировать расчеты выбором подходящего z с минимальным знаменателем, этот результат будет основанием для замены иррационального z рациональным приближением).

На рис. 1, 2 приводятся примеры решений для различных значений параметров. Решения получены численно по предложенному алгоритму с использованием Perl Data Language [13].

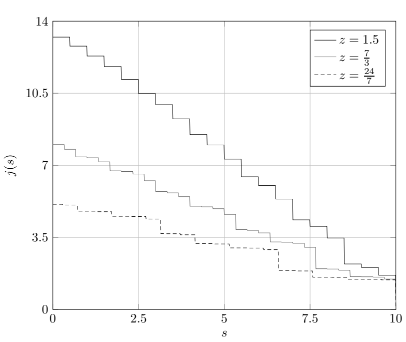

Рис. 1.

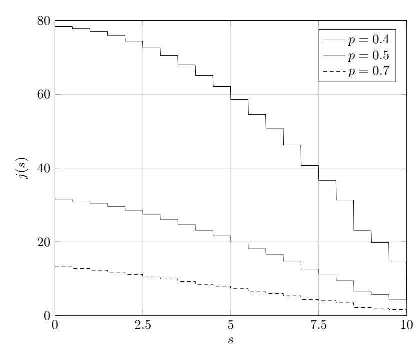

Рис. 2.

Библиографический список

[1] Loukas G., Öke G. *Protection Against Denial of Service Attacks: A Survey.* The Computer Journal // V. 53, No. 7. 2010. P. 1020–1037.

[2] Kim S., Li S., Long H., Pyke R. *Analyzing Network Traffic for Malicious Activity* // Canadian Applied Mathematics Quarterly. V. 12. 2004. P. 479–489.

[3] Котенко Д. И., Котенко И. В., Саенко И. Б. *Моделирование атак в больших компьютерных сетях* // Материалы XVII международной заочной научно-практической конференции «Технические науки — от теории к практике». Часть I. Новосибирск: «СибАК». 2013. С. 12–16.

[4] Page E. S. *Continuous Inspection Schemes* // Biometrika. 41. 1954. P. 100–114.

[5] Мазалов В. В., Журавлев Д. Н. *О методе кумулятивных сумм в задаче обнаружения изменения трафика компьютерных сетей* // Программирование. Вып. 6. 2002. С. 156–162.

[6] Nikitina N. N., Mazalov V. V. *CUSUM method in detection of a change point for Bernoulli distribution* // Extended abstracts of the International workshop «Networking Games and Management». Petrozavodsk. 2013. P. 62–69.

[7] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. 3-е изд. М.: Наука, 1984.

[8] Нечепуренко М. И. *Итерации вещественных функций и функциональные уравнения.* Новосибирск, 1997.

[9] Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. *Разностные уравнения и их приложения.* Киев: Наук. думка, 1986.

[10] Prusinska A. Tret'yakov A. *The theorem on existence of singular solutions to nonlinear equations* // Тр. ПетрГУ. Сер. Математика. 2005. Вып. 12. С. 22–36.

[11] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* 7-е изд. М.: Физматлит, 2004.

[12] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы.* Москва–Санкт-Петербург: Физматлит, 2000.

[13] Glazebrook K., Economou F. *PDL: The Perl Data Language* // Dr. Dobb's Journal. V. 22. No. 9. 1997. http://www.ddj.com/184410442 (19.08.2013).

Работа поступила 3 сентября 2013 г.

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11.

Петрозаводский государственный университет,
г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.
E-mail: chernov@krc.karelia.ru