DOI: 10.15393/j3.art.2013.2384 **Issues of Analysis.** Vol. 2(21), No. 2, 2014

УДК 517.929.2

Н. Н. Никитина, И. А. Чернов

РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДИНАМИКИ КУМУЛЯТИВНОЙ СУММЫ[1]

Аннотация. Рассматривается линейная система разностных уравнений, описывающих динамику кумулятивной суммы в задачах обнаружения кибератак. Доказывается существование, единственность и ряд свойств ограниченного решения.

Ключевые слова: *разностные уравнения, существование и единственность, корректность краевых разностных задач.*

2010 Mathematical Subject Classification: *39A06.*

§ 1. Постановка задачи

Одним из распространенных методов нарушения функционирования многопользовательской вычислительной системы (в частности, веб-сервера, DNS-сервера и др.) является атака типа «отказ в обслуживании» или DOS-атака (от англ. Denial of Service [1]). При ее проведении в систему поступают заявки, генерируемые автоматически таким образом, чтобы возросшая интенсивность входного потока не позволяла системе своевременно его обрабатывать. С точки зрения системного администратора, важно выявить наличие DOS-атаки и предпринять защитные действия.

Моделированию подсистемы безопасности вычислительных систем и сценариев атак посвящены, в частности, работы [2, 3]. При моделировании потока заявок как случайного процесса наличие DOS-атаки

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности и при поддержке РФФИ (проект а-13-07-00008).

отражается в изменении вероятностных характеристик данного процесса, и к его выявлению в таком случае может быть применен метод кумулятивных сумм, описанный в [4]. Принцип обнаружения DOS-атаки на вычислительную систему с использованием метода кумулятивных сумм исследуется, в частности, в работах [5, 6]. Данный принцип предполагает следующий контроль входящего сетевого трафика.

Предположим, что в систему поступает поток событий, каждое из которых с вероятностью p расценивается как «опасное». В случае наступления «безопасного» события некоторый показатель s уменьшается на единицу. Если же наступает опасное событие, показатель s увеличивается на заданную величину z. События можно трактовать как заявки на обслуживание на сервере, а опасные события — как вредоносные заявки, призванные нарушить работоспособность сервера. Понятно, что редкие вредоносные заявки не опасны, а рост их числа требует защитной реакции. Мерой необходимости защитных действий служит s. При достижении ситуации $s \geq b$, где b — некоторый порог, атака считается выявленной и предпринимаются защитные действия. Аналогично, при $s \leq 0$ происходит «сброс», после которого заявки отслеживаются с начала, а предыстория «забывается»; при этом показатель s обнуляется. Представляет интерес среднее число заявок j_s до тревоги при данном значении показателя s.

Динамика этой величины описывается следующим образом. Если s может быть увеличено на z без наступления тревоги и уменьшено на единицу без сброса, то есть если $1 < s < b-z$, то среднее число заявок j_s на единицу (текущую заявку) больше среднего числа заявок при увеличенном значении $s+z$, если заявка опасная, и на единицу больше среднего числа заявок при уменьшенном значении $s-1$, если заявка безобидная. Аналогично при высоких значениях $s \in [b-z, b)$ опасная заявка приводит к тревоге, так что среднее число заявок на единицу превосходит j_{s-1} при безобидной заявке либо равно 1 при опасной. Так же анализируются малые $s \in [0, 1]$: при безобидной заявке наступает сброс, поэтому независимо от s среднее число заявок равно $j_0 + 1$.

Формализуем эти рассуждения. Пусть функция $j_s = j(s)$ определена на полуинтервале $[0, b)$, $b > 1$, и удовлетворяет системе линейных разностных уравнений

$$j_s = 1 + \bar{p} j_{s-1}, \quad s \in [b - z, b), \tag{1}$$
$$j_s = 1 + p j_{s+z} + \bar{p} j_{s-1}, \quad s \in [1, b - z), \tag{2}$$
$$j_s = 1 + p j_{s+z} + \bar{p} j_0, \quad s \in [0, 1). \tag{3}$$

Здесь $p + \bar{p} = 1$, $z \geq 1$. Случай $z < 1$ рассматривается аналогично. В общем случае z вещественное, рациональное или иррациональное; в частном случае целого z задача сводится к дискретной системе разностных уравнений, а при $z = 1$ нетрудно выписать решение в виде формулы. Под решением системы (1)–(3) подразумеваем вещественнозначную функцию, определенную в каждой точке множества $[0, b)$ и обращающую уравнения системы в верные тождества.

В работе мы докажем, что система имеет не более одного ограниченного решения, а затем рассмотрим вопрос о неограниченных решениях; предложим алгоритм построения ограниченного решения, доказав существование такового; докажем некоторые свойства решения. Функциональным и разностным уравнениям, а также уравнениям в банаховых пространствах посвящена обширная литература [7, 8, 9, 10]; мы применяем методы функционального анализа и аналог принципа максимума из математической физики.

§ 2. Единственность ограниченного решения

Существование двух различных решений означает, в силу линейности и принципа суперпозиции, наличие ненулевого решения у однородной системы

$$x_s = \bar{p} x_{s-1}, \quad s \in [b - z, b), \tag{4}$$
$$x_s = p x_{s+z} + \bar{p} x_{s-1}, \quad s \in [1, b - z), \tag{5}$$
$$x_s = p x_{s+z} + \bar{p} x_0, \quad s \in [0, 1). \tag{6}$$

Для однородной системы справедлив аналог принципа максимума для параболических и эллиптических уравнений в частных производных. Предположим, что ненулевое ограниченное решение однородной системы существует. Без ограничения общности можно считать, что оно принимает и положительные значения. В противном случае решением является $-x_s$, также не равное нулю и принимающее только положительные значения.

Пусть максимальное значение $X > 0$ решения достигается в некоторой точке $s \in (1, b-z)$, то есть $x_s = X$. Из уравнения (5) следует, что $x_{s+z} = x_{s-1} = X$, так как если, например, $x_{s+z} < X$, то

$$X = x_s = pX + \bar{p}x_{s+z} < pX + \bar{p}X = X,$$

то есть противоречие. Рассматривая (5) в точке $s+z$, аналогично выясняем, что $x_{s+2z} = X$ и так далее, пока на каком-то шаге $s + kz$ не окажется больше $b - z$. Из (4) следует, что максимум в соответствующей области достигаться не может: $X = \bar{p}x_{s-1} \le \bar{p}X < X$ — противоречие.

Следовательно, максимум не может достигаться при $s \ge 1$, так как тогда с необходимостью он также достигается в области $[b-z, b)$, что невозможно.

Предположим, что максимум достигнут при $s \in [0, 1)$; тогда из (6) следует, что $x_0 = X$. Однако $x_0 = x_z$, в чем легко убедиться, рассмотрев уравнение (6) при $s = 0$. Поэтому если $x_0 = X$, то $x_z = X$ и, следовательно, приходим к противоречию. Таким образом, положительный максимум не может достигаться ни в одной точке, что означает $x_s \equiv 0$.

Теперь рассмотрим случай, при котором максимальное значение не достигается (это возможно, если решение разрывно). Ограниченность решения означает существование такого B, что $x_s \le B$ для всех s. Можно считать, что B — минимально, то есть точная нижняя грань всех чисел, превосходящих решение. Однако при всех s имеет место неравенство $x_s < B$, так как максимальное значение не достигается. В силу минимальности для любого ε найдется s такое, что $B - x_s < \varepsilon$.

Выберем положительное число ϵ и назовем значение $X = B - \epsilon$ «субмаксимальным». Если это значение X достигается в некоторой точке $s \in [1, b-z)$, то из (5) следует, что

$$B - \epsilon \le px_{s+z} + \bar{p}B,$$

то есть

$$x_{s+z} \ge B - \epsilon/p.$$

Продолжая рассуждение, получим, что $x_t \ge B - \epsilon/p^m$, где m — константа, $m = [b/z]$, квадратные скобки означают целую часть. При этом $t \in [b-z, b)$.

Случай достижения субмаксимального значения в зоне $[0, 1)$ рассматривается аналогично.

Осталось выяснить, может ли субмаксимальное значение достигаться при $s > b - z$. Из (4) следует, что $x_t = (1-p)x_{t-1}$, то есть $B - \epsilon/p^m \leq (1-p)B$. Это означает, что

$$B \leq \frac{\epsilon}{p^{m+1}}.$$

Выбором числа ϵ правая часть может быть сделана сколь угодно малой, что означает, что $B = 0$, то есть решение не принимает положительных значений, а с учетом сказанного выше (об обязательном наличии положительных значений у ненулевого решения) — получаем, что $x_s \equiv 0$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Система* (1)–(3) *имеет не более одного ограниченного решения.*

Изучим вопрос о положительности решения. Предположим, что минимальное значение X на отрезке $[0, b)$ достигается в некоторой точке $s \in [1, b - z)$. Применим уравнение (2) и получим оценку:

$$X = j_s = 1 + pj_{s+z} + \bar{p}j_{s-1} \geq 1 + pX + \bar{p}X = 1 + X,$$

то есть — противоречие. Аналогичное противоречие возникает при предположении о $j_s = X$ при $s \in [0, 1)$. Остается единственный возможный случай: $j_s = X$ при $s \in [b - z, b)$. Уравнение (1) дает

$$X = j_s = 1 + \bar{p}j_{s-1} \geq 1 + \bar{p}X,$$

откуда следует $pX \geq 1$, то есть

$$X \geq \frac{1}{p}.$$

Следовательно, минимальное значение достигается при $s > b - z$, оно положительно, и более того — имеется положительная оценка снизу.

Кроме того, уравнение $j_s = 1 + \bar{p}j_{s-1}$ при $j_t > 1/p$ для всех t показывает, что $j_s \leq j_{s-1}$, так что минимум достигается при $s \geq b-1$.

Если же минимальное значение решения не достигается ни в одной точке, то рассуждение совершенно аналогично: рассматривается субоптиальное решение. Таким образом, справедлива теорема 2.

Теорема 2. *Ограниченное решение j_s системы* (1)–(3), *если существует, положительно,* $j_s \geq p^{-1}$ *и минимум может достигаться только на* $[b-1, b]$.

Этот результат будет усилен в следующем параграфе.

Решение системы кусочно-постоянно в следующем смысле: если решение имеет ограниченную производную на каком-либо множестве, то эта производная равна нулю. В самом деле, производная решения в тех точках, где она определена, подчиняется однородной системе, не имеющей ненулевых ограниченных решений. Доказана теорема 3.

Теорема 3. *Если решение j_s системы* (1)–(3) *существует, то оно кусочно-постоянно в указанном выше смысле.*

§ 3. О неограниченных решениях

Рассуждения выше остаются справедливыми, если рассматривать систему на любом непустом подмножестве полуинтервала $[0, b)$ при условии, что оно содержит нуль и вместе с любой точкой s оно содержит также $s+z$ и $s-1$, если эти значения входят в $[0, b)$. Такое множество назовем допустимым.

Выберем произвольное s и минимальное по включению допустимое множество, содержащее s. Такое множество назовем порожденным точкой s. Покажем, что в случае рационального z это множество конечно. В самом деле, оно содержит точки $s + mz - n$ при всевозможных натуральных m и n, при условии, что $s + mz - n \in [0, b)$, а также точки $Mz - N$ при всевозможных натуральных M и N, при условии, что $Mz - N \in [0, b)$. Числа вида $mz - n$ при рациональном z — это дроби со знаменателем, не превосходящим знаменателя z. Их конечное число на отрезке, поэтому указанных чисел — конечное количество.

Решение однородной системы (6)–(4) на этом множестве ограниченно в силу конечности множества и, следовательно, тождественно равно нулю, в том числе и в точке s. Поскольку s произвольно, получаем, что в рациональном случае решение также единственно и неограниченных решений быть не может. Таким образом, справедлива теорема 4.

Теорема 4. *Система* (1)–(3) *не имеет неограниченных решений при рациональном z.*

Вопрос о существовании неограниченных решений при иррациональном z оставим пока открытым.

§ 4. Существование и свойства решения

Выберем произвольную точку s и рассмотрим систему (1)–(3) на порожденном s множестве S. В случае рационального z это множество конечно, однако для иррационального — бесконечно, и более того — всюду плотно на $[0, b]$ (в силу теоремы Кронекера). В рациональном случае однородная система имеет единственное ограниченное решение (нулевое), а следовательно матрица невырождена и неоднородная система разрешима при любой правой части. Это и означает существование решения у исходной системы. Изучим иррациональный случай.

Рассмотрим линейный оператор $y = Tx$, задаваемый уравнениями

$$y_s = \bar{p}x_0 + px_{s+z}, \qquad 0 \le s \le 1, \tag{7}$$

$$y_s = \bar{p}x_{s-1} + px_{s+z}, \qquad 1 \le s < b - z, \tag{8}$$

$$y_s = \bar{p}x_{s-1}, \qquad b - z \le s < b. \tag{9}$$

Оператор действует на множестве функций x_s, определенных на множестве S. В случае рационального z, это конечномерное пространство и, соответственно, оператор задается квадратной матрицей; при иррациональном z, пространство после какой-либо нумерации совпадает с пространством ограниченных последовательностей; его можно отождествить с ℓ_∞, введя соответствующую норму (наименьшая верхняя грань абсолютных величин членов последовательности).

Разрешимость системы равносильна вопросу о вхождении числа 1 в резольвентное множество T. В самом деле, если единица не входит в спектр, то оператор $T - E$ имеет ограниченный обратный, то есть линейное уравнение $Tx - x = y$ имеет единственное решение при любой правой части y, а это и означает разрешимость системы, причем для любых «правых частей».

Чтобы доказать принадлежность единицы резольвентному множеству, достаточно оценить спектральный радиус оператора числом, меньшим, чем единица. Известен результат [7, 11]: спектральный радиус (любого линейного) оператора T равен

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Легко видеть, что для любой точки s значения $T^n x_s$ выражаются через всевозможные значения x_t при $t = s + kz - m$ при целых неотрицательных k и m таких, что $k + m = n$. Коэффициенты при этом положительны и равны $(\bar{p})^m p^k$ (считаем, что подобные члены не приводятся). Здесь мы также предполагаем, что $x_t = x_0$ при $t < 0$ и $x_t = 0$ при $t \geq b$. Сумма всех коэффициентов равна единице. Число «шагов» длины z от любой точки $s \in [0, b)$ до b не превосходит, очевидно, величины $\alpha = [(b-z)/z]+1$ (скобки означают целую часть числа). Однако при достаточно большом n, а именно $n > \alpha - 1$, в выражение для $T^n x_s$ входят x_t при $t \geq b$, равные нулю. Поэтому сумма коэффициентов при ненулевых слагаемых меньше единицы, она не превосходит $1 - p^\alpha$.

Пусть $\|x_s\|_{\ell_\infty} = 1$. Тогда $y_s = T^n x_s \leq (1 - p^\alpha) \cdot 1 < 1$, то есть даже если все значения функции x_s, через которые выражается y_s, равны единице, результат $y_s \leq 1$. Переходя к супремуму по s, получаем, что $\|T^\alpha x_s\| \leq 1 - p^\alpha < 1$.

Итерируя, получаем оценки

$$\|T^n x_s\| \leq (1 - p^\alpha)^{\frac{n}{\alpha}}.$$

Отсюда следует, что спектральный радиус

$$\rho \leq (1 - p^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < 1.$$

Это доказывает существование решения системы на множестве, порожденном произвольной точкой, а следовательно, и решение исходной системы на всем отрезке.

Теорема 5. *Система* (1)–(3) *имеет ограниченное решение при любом* $z > 1$.

Оценка нормы оператора T позволяет указать конструктивный способ нахождения решения системы (1)–(3), то есть операторного уравнения $x = Tx + r$, где r — последовательность из единиц (а также любая другая ограниченная последовательность в общем случае): итерационную процедуру

$$x_{\langle k+1 \rangle} = T x_{\langle k \rangle} + r. \tag{10}$$

Она сходится при любом начальном приближении $x_{\langle 0 \rangle}$, поскольку при последовательных итерациях член $T^k x_{\langle 0 \rangle}$ стремится к нулю по норме, а операторный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

сходится — в силу оценки $\|T\| < 1$.

Анализ оператора T позволяет сделать еще один вывод. Заметим, что T переводит положительные монотонно невозрастающие функции (то есть $x_s \leq x_t$ при $s > t$) в положительные монотонно невозрастающие. В самом деле, положительная x_s переводится в положительную y_s, что очевидно. Пусть x_s не возрастает. Выберем произвольное $\delta s > 0$ и обозначим $\delta x_s = x_{s+\delta s} - x_s$, аналогично δy_s. Тогда справедливо одно из соотношений:

- $\delta y_s = p\delta x_{s+z} \leq 0$,
- $\delta y_s = \bar{p}\delta x_{s-1} + p\delta x_{s+z} \leq 0$,
- $\delta y_s = \bar{p}\delta x_{s-1} \leq 0$,
- $\delta y_s = \bar{p}\big(x_{s-1} - x_0\big) + p\delta x_{s+z} \leq 0$,
- $\delta y_s = \bar{p}\delta_{s-1} - px_{s+z} \leq 0$.

В любом случае $\delta y_s \leq 0$, независимо от s, и $\delta s > 0$. Следовательно, предел итерационной схемы также положителен и монотонен, если начальное приближение не возрастает (например, константа). То есть монотонно убывающее (и потому ограниченное) решение существует, но других (по крайней мере, ограниченных) решений нет. Доказана монотоность решения.

Теорема 6. *Решение j_s системы* (1)–(3) *является невозрастающей функцией s.*

Отметим, что монотонность интуитивно ожидаема для рассматриваемой прикладной задачи и, следовательно, является желательным свойством модели: среднее число заявок до достижения порогового значения кумулятивной суммы тем меньше, чем больше текущее значение этой суммы.

Итерационная схема (10) обладает монотонностью в следующем смысле. Пусть $u_{\langle k\rangle}$ и $v_{\langle k\rangle}$ — итерации (10); если $u_{\langle k\rangle} \leq v_{\langle k\rangle}$ (знак $\leq$ означает покомпонентное неравенство), то $u_{\langle k+1\rangle} \leq v_{\langle k+1\rangle}$. В самом деле, это выполнено для любой матрицы T с неотрицательными элементами. Следовательно, если удастся найти такое $x_{\langle 0\rangle}$, что $x_{\langle 1\rangle} \leq x_{\langle 0\rangle}$, то вся последовательность $x_{\langle k\rangle}$ окажется невозрастающей в покомпонентном смысле. Тогда каждая компонента вектора $x_{\langle 0\rangle}$ является оценкой сверху соответствующей компоненты решения.

Проверим, обладает ли линейная функция $x_{\langle 0\rangle} = -\nu s + \beta$ указанным свойством при каких-нибудь коэффициентах ν и β. Пусть r в (10) — вектор из единиц. Тогда для $s \in [1, b-z]$ должно выполняться

$$\nu(\bar{p} - pz) \leq -1. \tag{11}$$

Имеем три случая: при $z = \bar{p}/p$ решений нет, в двух других — существуют, разного знака. Пусть $z > \bar{p}/p$. Тогда $\nu \geq (pz - \bar{p})^{-1}$. При $s \in [0, 1]$ имеем неравенство

$$(-pz + \bar{p}s)\nu \leq -1.$$

Его справедливость при всех $s \in [0, 1]$ следует из (11). Осталось проверить соотношение при $s \in [b-z, b]$:

$$\beta \geq \nu s + \nu \frac{1+\bar{p}}{p}.$$

Для всех s это неравенство истинно, если

$$\beta = \nu b + \nu \frac{1+\bar{p}}{p}.$$

Положим ν равным минимальному значению $(pz - \bar{p})^{-1}$; тогда

$$x_{\langle 0\rangle}(0) = \beta = \frac{b}{pz - \bar{p}} + \frac{1+\bar{p}}{(pz - \bar{p})p}.$$

Это оценка сверху решения j_0 при условии $z > \bar{p}/p$. Например, при $p = \bar{p} = 0,5$ и $z = 1,5$ имеем $j_0 \leq 4b+12$; в случаях, представленных на рис. 1, j_0, соответственно, оценивается числами 15,81, 8,9 и 5,65. Рисунок показывает, что оценка достаточно точна; она тем точнее, чем больше $p(z+1)-1$, в частности, чем больше p. Можно получить более точную оценку, подобрав подходящее $x_{\langle 0\rangle}$, а также оценить решение в случаях $z \leq \bar{p}/p$.

Запишем исходную систему в форме $(T-E)x = r$, где вектор $r \geq 0$, и заметим, что если $r_1 = \gamma r_2$, то $x_1 = \gamma x_2$ в силу линейности (здесь r_1 и r_2 — различные правые части, а x_1 и x_2 — соответствующие решения). Более того, если $r_1 \geq r_2$, то $x_1 \geq x_2$. Эта монотонность устанавливается дословно так же, как и теорема 2: положительной правой части отвечают положительные решения, поэтому положительной правой части $r_1 - r_2$ отвечает $x_1 - x_2 > 0$.

Следовательно, если $\|r\| = \gamma$ (норма в смысле ℓ_∞, в конечномерном случае — максимальное абсолютное значение), а 1 означает вектор из единиц, то решение системы $(T - E)x = r$ оценивается по решению системы $(T - E)j = 1$:

$$x \leq \gamma j.$$

Этот результат представляет самостоятельный интерес при изучении динамики кумулятивных сумм более общего вида, однако мы используем его как вспомогательный. Из него следует, что $x \leq \gamma j_0$. Полученная выше оценка для j_0 позволяет оценить решение для любой правой части. Пусть $j_0 \leq M$, то есть $x \leq \|r\|M$.

Используем это для оценки спектрального радиуса обратного оператора $G = (T - E)^{-1}$. Очевидно, $G^n r \leq \|r\|M^n$, а следовательно, $\sqrt[n]{G^n r} \leq M\sqrt[n]{\|r\|} \to M$. Спектральный радиус самого оператора оценить легче: если $\|x\| = 1$, то $\|(T - E)x\| \leq 2$. Таким образом, $\|(T-E)^n\| \leq 2^n$ и спектральный радиус не превосходит числа 2. Число обусловленности оператора $T - E$ (равное произведению спектральных радиусов оператора и обратного к нему), таким образом, оценивается величиной $2M$. Оно широко используется для оценки возмущений решения при вариации оператора или правой части [12], в том числе при оценивании влияний ошибок округления при численном решении. Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 7. *Линейный оператор T системы* (1)–(3) *допускает оценку нормы $\|T\| \leq 2$, обратный к нему имеет норму*

$$\|T^{-1}\| \leq M = \frac{b}{pz - \bar{p}} + \frac{1 + \bar{p}}{(pz - \bar{p})p}$$

при условии $z > \bar{p}/p$, и число обусловленности $\sigma(T) \leq 2M$.

§ 5. Алгоритм построения решения при рациональном z

Систему уравнений можно решать любым пригодным методом, однако целесообразно учесть структуру матрицы — по следующим соображениям. Число b может быть велико по сравнению с N^{-1}, где N — знаменатель дроби, выражающей рациональное z. По этой причине размерность системы может оказаться большой, тогда как реальная сложность решения может быть существенно ниже. Например, при $z = 1{,}1$ имеем $N = 10$; но при $b = 10$ размерность системы уравнений имеет порядок 100. С другой стороны, предлагаемый ниже алгоритм приводит к системе порядка 10.

Сформулируем алгоритм вычисления решения для рационального $z = M/N$ (дробь несократима). Отрезок $[b-1, b]$ разобьем на равные части длины $1/N$: отрезки $[b - K/N, b - (K-1)/N]$, $K = 1 : N$. На K-ой части положим решение равным константе C_K. Эти константы определим далее. Для любого s вида $b - m/N$ при натуральном m (но $s > 0$) либо $s = 0$ положим

$$j_s = \sum_{K=1}^{N} A_{s,K} C_K + B_s$$

при неизвестных коэффициентах.

Уравнения системы приводят к рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}
A_{s,K} &= \frac{A_{s+1,K} - pA_{s+z+1,K}}{\bar{p}}, \quad 0 \le s < b - z - 1, \\
B_s &= \frac{B_{s+1} - pB_{s+z+1} - 1}{\bar{p}}, \quad 0 \le s < b - z - 1, \\
A_{s,K} &= \frac{A_{s+1,K}}{\bar{p}}, \quad B_s = \frac{B_{s+1} - 1}{\bar{p}}, \quad b - z - 1 \le s < b - 1, \\
A_{s,K} &= \delta_{m,K}, \quad B_{s,K} = 0, \quad b - 1 \le s < b.
\end{aligned}$$

Здесь $\delta_{x,y}$ — символ Кронекера. Соотношения позволяют определить для любого s указанного вида коэффициенты за конечное число шагов. Осталось найти величины C_K.

Выразим j_s при $0 \le s < 1$ указанного вида через C_K иначе:

$$j_s = \sum_{K=1}^{N} A'_{s,K} C_K + B'_s,$$

где коэффициенты выражаются с помощью (3):

$$A'_{s,K} = \bar{p}A_{0,K} + pA_{s+z,K}, \quad B'_s = 1 + \bar{p}B_0 + pB_{s+z}.$$

Это дает необходимое число уравнений для неизвестных C_K.

Порядок системы линейных алгебраических уравнений, таким образом, равен N, тогда как порядок исходной системы линейных алгебраических уравнений есть bN. Отметим, что, в частности, при целых

z уравнение всего одно. Отметим еще, что размерность системы и, следовательно, сложность расчетов в прикладной задаче зависит от теоретико-числовых свойств параметра z; в частности, близким значениям параметра могут отвечать очень различные по размерности системы. Расчеты показывают, что решения для близких значений z близки, но строгое доказательство этого утверждения будет опубликовано позже (кроме устойчивости по отношению к z и возможности оптимизировать расчеты выбором подходящего z с минимальным знаменателем, этот результат будет основанием для замены иррационального z рациональным приближением).

На рис. 1, 2 приводятся примеры решений для различных значений параметров. Решения получены численно по предложенному алгоритму с использованием Perl Data Language [13].

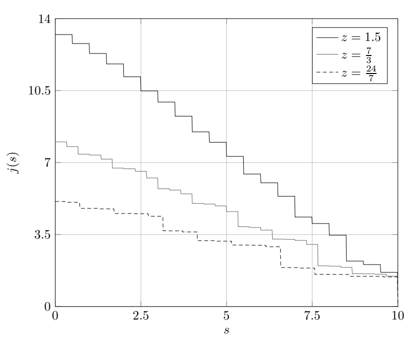

Рис. 1.

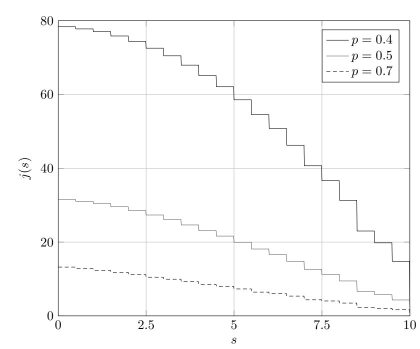

Рис. 2.

Библиографический список

[1] Loukas G., Öke G. *Protection Against Denial of Service Attacks: A Survey.* The Computer Journal // V. 53, No. 7. 2010. P. 1020–1037.

[2] Kim S., Li S., Long H., Pyke R. *Analyzing Network Traffic for Malicious Activity* // Canadian Applied Mathematics Quarterly. V. 12. 2004. P. 479–489.

[3] Котенко Д. И., Котенко И. В., Саенко И. Б. *Моделирование атак в больших компьютерных сетях* // Материалы XVII международной заочной научно-практической конференции «Технические науки — от теории к практике». Часть I. Новосибирск: «СибАК». 2013. С. 12–16.

[4] Page E. S. *Continuous Inspection Schemes* // Biometrika. 41. 1954. P. 100–114.

[5] Мазалов В. В., Журавлев Д. Н. *О методе кумулятивных сумм в задаче обнаружения изменения трафика компьютерных сетей* // Программирование. Вып. 6. 2002. С. 156–162.

[6] Nikitina N. N., Mazalov V. V. *CUSUM method in detection of a change point for Bernoulli distribution* // Extended abstracts of the International workshop «Networking Games and Management». Petrozavodsk. 2013. P. 62–69.

[7] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. 3-е изд. М.: Наука, 1984.

[8] Нечепуренко М. И. *Итерации вещественных функций и функциональные уравнения.* Новосибирск, 1997.

[9] Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. *Разностные уравнения и их приложения.* Киев: Наук. думка, 1986.

[10] Prusinska A. Tret'yakov A. *The theorem on existence of singular solutions to nonlinear equations* // Тр. ПетрГУ. Сер. Математика. 2005. Вып. 12. С. 22–36.

[11] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* 7-е изд. М.: Физматлит, 2004.

[12] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы.* Москва–Санкт-Петербург: Физматлит, 2000.

[13] Glazebrook K., Economou F. *PDL: The Perl Data Language* // Dr. Dobb's Journal. V. 22. No. 9. 1997. http://www.ddj.com/184410442 (19.08.2013).

Работа поступила 3 сентября 2013 г.

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11.

Петрозаводский государственный университет,
г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.
E-mail: chernov@krc.karelia.ru